3790

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

Otto Blumenthal
in Aachen.

62. Band.

Mit 27 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

Inhalt des zweiundsechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten.

Von

Fritz Hartogs in München.

Ist von einer Größe $F(x, y)$, welche für alle der Bedingung $|x| < R$, $|y| < S$ genügenden Werte der beiden unabhängigen komplexen Veränderlichen x und y eindeutig definiert ist, bekannt: *erstens*, daß sie für jeden der erwähnten Werte von y eine im Kreise $|x| < R$ reguläre analytische Funktion von x darstelle, und *vice versa*, *zweitens*, daß sie im Gebiete $|x| < R$, $|y| < S$ durchweg *stetig* sei, so läßt sich sowohl nach Cauchyschen als auch nach Weierstraßschen Methoden unschwer der Nachweis führen, daß $F(x, y)$ eine in dem genannten Gebiete reguläre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sei, d. h. in der Umgebung jeder Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ desselben durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ fortschreitende Doppelreihe dargestellt werden könne.

Herr W. F. Osgood*) hat nun zunächst gezeigt, daß die zweite der erwähnten Voraussetzungen ersetzt werden kann durch die, daß $f(x, y)$ in dem betrachteten Gebiete dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke G verbleibe, und es ist ihm dann weiterhin**) gelungen, die Frage, ob überhaupt noch eine weitere Voraussetzung zur ersten hinzutreten müsse, auf die einfachere zurückzuführen, ob der folgende Satz beweisbar sei:

> Die Größe $\Phi(x, y)$ möge für jeden der Bedingung $|y| < S$ genügenden Wert von y eine im Kreise $|x| < R$ reguläre analytische Funktion von x sein, und vice versa; außerdem jedoch stelle sie im Bereiche $|x| < R$, $|y| < k < S$ eine reguläre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen

---

*) Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. 52 (1899), p. 462. Vgl. a. Encykl. d. math. Wiss. II B 1, Nr. 40.

**) Zweite Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. 53 (1900), p. 461.

x und y dar; dann gilt das letztere auch für den ganzen Bereich $|x| < R$, $|y| < S$.*)

Es soll nun in der vorliegenden Arbeit zunächst der Nachweis geführt werden, daß diese letztere Frage in bejahendem Sinne zu beantworten ist, und zwar besteht dieser Nachweis im wesentlichen in der Aufstellung des folgenden Satzes:

*Es sei T ein zusammenhängender Bereich der x-Ebene, welcher nur aus inneren Punkten bestehe. Die Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ mögen in T sämtlich eindeutig und regulär sein, und die Reihe $S(x,y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ konvergiere, solange $|y| < \mathrm{P}'$ ist, für jedes x des Bereiches T. Gibt es alsdann irgend einen (von Null verschiedenen) Wert $y = y_0$, für welchen die Reihe $S(x, y)$ in der Umgebung jedes Punktes von T gleichmäßig konvergiert, so gilt das nämliche auch für jeden beliebigen Wert von y, welcher der Bedingung $|y| < \mathrm{P}'$ genügt.***)

Der Beweis stützt sich auf einen Hilfssatz, welcher in seiner allgemeineren Fassung der Lehre von den Punktmengen angehört und den Inhalt von § 1 bildet. Es folgt dann in § 2 der eigentliche Beweis, und hieran anschließend wird in § 3 nochmals ausführlich dargelegt, wie sich (unter Anwendung der von Herrn Osgood angegebenen Methoden) der vollständige Beweis des an die Spitze gestellten Satzes bei Weglassung der zweiten Voraussetzung schließlich gestaltet. § 4 endlich enthält die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf den Fall von mehr als zwei Veränderlichen, wobei sich die analogen Resultate ergeben.

Der oben angeführte Satz dient alsdann weiterhin (§ 5) dazu, verschiedene Fragen, welche die Entwicklung der Funktionen zweier Veränderlichen x, y nach Potenzen *einer* derselben, y, betreffen, ihrer Erledigung zuzuführen, wobei das wesentliche Ergebnis ist, daß ein Ausdruck von der Form $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ in einem beliebigen Gebiete der xy-Mannigfaltigkeit dann und nur dann eine reguläre analytische Funktion von x und y darstellt, wenn a) die Funktionen $f_\nu(x)$ für alle vorkommenden Werte von x sämtlich regulär sind, und b) die Reihe in der Umgebung jeder Stelle des Gebietes *gleichmäßig* konvergiert. Hieran anknüpfende Betrachtungen über die singulären Stellen, welche bei einem Ausdrucke jener Art an der Begrenzung des Bereiches der gleichmäßigen Konvergenz

*) L. c. p. 464.

**) Wie hieraus leicht zu ersehen, kann von denjenigen beiden Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes, welche sich auf das größere Gebiet $|x| < R$, $|y| < S$ beziehen, noch die eine, das reguläre Verhalten *in bezug auf* x betreffende, unterdrückt werden. (Vgl. p. 13.)

notwendig auftreten (§ 6), geben nun Anlaß zu Untersuchungen über die *allgemeine Gestalt* des letztgenannten Bereiches, und es wird zu diesem Zwecke das Verhalten einer positiven, von x abhängigen Größe R'_x studiert, welche bei gegebenem $x = x_0$ den Radius desjenigen Kreises um den Nullpunkt der y-Ebene angibt, welcher von allen Werten y erfüllt wird, für die die Reihe $S(x, y)$ in der Umgebung des Punktes x_0 gleichmäßig konvergiert; jener Kreis ist zugleich der größte, dessen innere Punkte y noch sämtlich *reguläre* Stellen (x_0, y) der durch jene Reihe dargestellten analytischen Funktion von x, y ergeben, so daß also jeder das Verhalten der Größe R'_x betreffende Satz zugleich als eine allgemeine Aussage über die Lagerung der singulären Stellen bei den analytischen Funktionen zweier Veränderlichen aufgefaßt werden kann.

Während dabei die zuerst (§ 7) in den Vordergrund tretende Frage diejenige nach der Stetigkeit der Größe R'_x ist, wobei sich gewisse Verallgemeinerungen des Satzes von der Stetigkeit derjenigen Funktion $r' = \varphi(r)$ ergeben, welche den zu r assoziierten Konvergenzradius r' einer Potenzreihe zweier Veränderlichen darstellt*), wird dann weiterhin (§ 8) für die Funktion R'_x eine ganz allgemein gültige Eigenschaft aufgestellt, von der, wenigstens unter gewissen Stetigkeits- und Differentiierbarkeitsbedingungen, nachgewiesen werden kann (§ 10), daß sie für diese Größe *charakteristisch* ist, so daß — jene einschränkenden Bedingungen als erfüllt vorausgesetzt — damit die *allgemeinste Gestalt des Bereiches der gleichmäßigen Konvergenz* einer Reihe $\sum\limits_{\nu} f_\nu(x)\, y^\nu$ festgestellt ist. Eine hieraus speziell resultierende Eigenschaft des *Bereiches der absoluten Konvergenz einer Potenzreihe zweier Veränderlichen* wird in einem Anhange (§ 12) direkt hergeleitet und der Nachweis daran geknüpft, daß diese Eigenschaft — ohne jede Einschränkung — die einzige Bedingung darstellt, welcher jener Bereich überhaupt unterworfen ist.

Bei einer Potenzreihe zweier Veränderlichen $\mathfrak{P}(x, y) = \sum\limits_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ ist außer der Konvergenz der Doppelreihe selbst vornehmlich die der *Zeilenreihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu \right\} y^\nu$ sowie die der *Diagonalenreihe* $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \sum\limits_{\mu=0}^{\lambda} a_\mu^{(\lambda-\mu)} x^\mu y^{\lambda-\mu} \right\}$ von Interesse. Die Zeilenreihe stellt nur einen speziellen Fall des oben mit $S(x, y)$ bezeichneten Ausdrucks dar und brauchte nicht mehr gesondert betrachtet zu werden. Hingegen ist § 11 noch den Hauptfragen gewidmet, welche die Diagonalenreihe betreffen; auch diese lassen sich mittels des in § 2 bewiesenen Satzes leicht erledigen, und es ergibt sich in erster

*) Näheres sowie Literatur über diesen letzteren Gegenstand siehe § 12, 3.

Linie das Resultat, daß eine Diagonalenreihe in jedem Gebiete T, in welchem sie überhaupt konvergiert, allemal auch *gleichmäßig* konvergiert und eine reguläre analytische Funktion von x und y darstellt.

Inhalt.

§ 1.

Hilfssatz.

1. Es bedeute $P_1, P_2, \cdots$ eine Reihe von (linearen oder mehrdimensionalen) Punktmengen, welche sämtlich in einem endlichen Bezirk gelegen seien, und von denen eine jede die folgende enthalte. Übertrifft alsdann der *innere Inhalt**) jeder derselben eine positive, von Null verschiedene Größe g, so gibt es mindestens einen Punkt, welcher den sämtlichen Punktmengen $P_1, P_2, \cdots$ gemein ist.**)

Dem Beweise, bei welchem wir uns der Einfachheit halber auf den

*) Über diesen Begriff siehe Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale (Turin 1887), p. 153; Jordan, Journal de Math. (4) 8 (1892), p. 77 sowie Cours d'analyse I (1893), p. 28—31; Schoenflies, Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Jahresber. d. D. M.-V. 8 (1900), p. 88 und 91—92.

**) Ich werde nachträglich darauf aufmerksam gemacht, daß der nämliche Satz — jedoch unter abweichender Definition des inneren Inhalts — sich bei W. H. Young (Proc. of London Math. Soc. (2) 2 (1904), p. 28, Theorem 6) ausgesprochen findet. Die dort noch hinzugefügte Aussage, die Gesamtheit der in allen P_ν vorkommenden Punkte bilde eine Menge vom inneren Inhalt $\geqq g$, verliert hingegen bei der hier adoptierten

Fall *ebener* Punktmengen beschränken wollen, sei folgende Bemerkung vorausgeschickt. Bezeichnet der Buchstabe f — wie auch beim folgenden Beweise stets — eine aus einer endlichen Anzahl von Quadraten (inkl. Begrenzung) bestehende Fläche, und wird irgend eine Punktmenge P nach Maßgabe der Zugehörigkeit ihrer Punkte zu f in zwei Teile P_1, P_2 gespalten, so gilt offenbar stets

$$a = a_1 + a_2,$$

wo a, a_1, a_2 die inneren Inhalte von P, P_1, P_2 bezeichnen.*)

Es bedeute nun $a_\nu\,(\nu = 1, 2, \cdots)$ den inneren Inhalt von P_ν und es werde eine positive Größe g_0 der Ungleichung $0 < g_0 < g$ entsprechend beliebig gewählt. Alsdann gibt es eine aus einer endlichen Anzahl von Quadraten (inkl. Begrenzung) bestehende Fläche f_1, deren sämtliche Punkte innere Punkte von P_1 sind, und deren Inhalt *größer* ist als $a_1 - g_0$. Der innere Inhalt derjenigen Punktmenge, welche aus P_1 entsteht, wenn man f_1 fortnimmt, ist daher**) kleiner als g_0; a fortiori gilt dies also auch von dem inneren Inhalt der Punktmenge, welche aus P_2 hervorgeht, wenn die mit f_1 gemeinsamen Punkte fortgenommen werden, und daher ist (nach der vorausgeschickten Bemerkung) der innere Inhalt des in f_1 gelegenen Teiles von P_2 *größer* als $a_2 - g_0$. Es gibt infolgedessen eine Teilfläche f_2 von f_1 (wiederum von der nämlichen Art), deren sämtliche Punkte innere Punkte von P_2 sind, und deren Inhalt noch immer größer ist als $a_2 - g_0$. Durch Anwendung des nämlichen Verfahrens ergibt sich hieraus wiederum die Existenz einer Teilfläche f_3 von f_2, deren sämtliche Punkte innere Punkte von P_3 sind, und deren Inhalt größer ist als $a_3 - g_0$, usf. Die Flächen $f_1, f_2, \cdots$ haben aber sicher sämtlich mindestens einen Punkt gemein, und dieser gehört alsdann auch den sämtlichen Punktmengen $P_\nu\,(\nu = 1, 2, \cdots)$ an.

2. Es bedeute nun $Q_1, Q_2, \cdots$ eine Reihe *beliebiger* Punktmengen in einem endlichen Bezirk. Gibt es alsdann keinen Punkt, welcher *unendlich vielen* Q_ν angehört, so konvergiert der innere Inhalt***) von Q_ν mit wachsendem ν gegen 0.

Peano-Jordanschen Inhaltsdefinition ihre Gültigkeit (vgl. Beisp. 3 in Fußn. *) p. 7); nur vom *äußeren* Inhalt jener Menge läßt sich hier das Entsprechende behaupten. (S. Nr. 3.)

*) Diese Aussage würde ihre Gültigkeit selbst dann noch beibehalten, wenn f allgemeiner eine beliebige Punktmenge bedeutete, deren *Begrenzungsstellen* eine *inhaltlose* Punktmenge bilden.

**) Schon nach dem allgemeinen Satze $a \geqq a_1 + a_2$ für den inneren Inhalt a einer Punktmenge, welche auf beliebige Weise in zwei Punktmengen P_1 und P_2 (mit den inneren Inhalten a_1 und a_2) zerlegt wird.

***) Nicht aber notwendig der *äußere* Inhalt. (Vgl. Beispiel 2 in Fußn. *), p. 7.) — Selbstverständlich ist die Inhaltsdefinition entsprechend der Dimension des Bereiches zu wählen, in welchem die sämtlichen Punktmengen gelegen sind.

Zum Beweise betrachten wir die Punktmengen

$$
\begin{array}{l}
P_1 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots \\
P_2 = \phantom{Q_1 + {}} Q_2 + Q_3 + \cdots \\
P_3 = \phantom{Q_1 + Q_2 + {}} Q_3 + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

von denen eine jede die folgende enthält. Ist nun die Behauptung unrichtig, d. h. gibt es eine positive von Null verschiedene Größe g derart, daß die inneren Inhalte unendlich vieler Q_ν oberhalb g liegen, so bleiben die inneren Inhalte *sämtlicher* P_ν oberhalb g. Es gibt somit nach Nr. 1 mindestens einen Punkt, welcher sämtlichen P_ν und daher auch unendlich vielen Q_ν angehört, was der Voraussetzung widerspricht.*)

3. Diese Betrachtungen gestatten noch eine leichte Verallgemeinerung, von welcher im folgenden allerdings keinerlei Gebrauch gemacht werden wird. Bedeutet nämlich $Q_1, Q_2, \cdots$ wiederum eine Reihe beliebiger Punktmengen in einem endlichen Bezirk, Q die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche unendlich vielen dieser Punktmengen angehören, und $\bar{Q}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ die Gesamtheit derjenigen Punkte von Q_ν, welche nicht auch in Q vorkommen, so gibt es keinen Punkt, welcher unendlich vielen $\bar{Q}_\nu$ angehört, und somit gilt nach Nr. 2:

$$\lim_{\nu=\infty} \bar{a}_\nu = 0,$$

wenn man mit $\bar{a}_\nu$ den inneren Inhalt von $\bar{Q}_\nu$ bezeichnet.

Nach einem allgemeinen Satze gilt nun, wenn irgend eine Punktmenge P in zwei Bestandteile P_1, P_2 zerlegt wird, für den inneren Inhalt a von P:

$$a \leqq a_1 + A_2,$$

wo a_1 den *inneren Inhalt* von P_1, A_2 den *äußeren Inhalt* von P_2 bezeichnet. Daraus folgt für den vorliegenden Fall sofort

$$a_\nu \leqq \bar{a}_\nu + A,$$

wo a_ν den inneren Inhalt von Q_ν, A den äußeren Inhalt von Q bezeichnet, und hieraus durch Grenzübergang:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \leqq A.$$

Das Ergebnis ist demnach folgendes:

Bezeichnet man mit $Q_1, Q_2, \cdots$ eine Reihe völlig beliebiger in einem endlichen Bezirk gelegener Punktmengen, so gilt stets:

---

*) Dieser Satz ist für den Fall, daß jede der Punktmengen aus einer endlichen Anzahl von Teilstrecken einer einzigen geradlinigen Strecke besteht, bereits von Arzelà aufgestellt worden. Rendiconti Acc. dei Lincei (4) 1 (1885), p. 262 und Mem. Acc. Bologna (5) 8 (1899), p. 130.

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \leqq A.\text{*)}$$

Dabei bedeutet a_ν ($\nu = 1, 2, \cdots$) den inneren Inhalt von Q_ν, A den äußeren Inhalt derjenigen Punktmenge Q, welche aus allen Punkten besteht, die unendlich vielen Q_ν angehören.

4. Es mag hier noch folgende Bemerkung eingefügt werden.

Ist von einer reellen stetigen Funktion $g(x, y)$ der reellen Veränderlichen x und y bekannt, daß sie in dem ganzen Gebiete $\alpha_0 \leqq x \leqq \alpha_1$, $\beta_0 \leqq y \leqq \beta_1$ mit eventuellem Ausschluß der Punkte (x, y) einer Menge P vom inneren Inhalt a *verschwinde*, überall aber der Bedingung

$$0 \leqq g(x, y) \leqq G$$

genüge, so gilt:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1} g(x, y)\, dx\, dy \leqq G \cdot a.$$

Denn da die Funktion $g(x, y)$ nicht nur in jedem nicht zu P gehörigen Punkte des Gebietes, sondern (infolge ihrer Stetigkeit) auch noch in jedem der (eventuell schon zu P gehörigen) Begrenzungspunkte von P den Wert 0 besitzt, so ist es bei der Bildung der das Integral approximierenden Summen gestattet, für jeden Gebietsteil, welcher nicht ausschließlich aus *inneren* Punkten von P besteht, als zugehörigen Funktionswert 0 zu wählen, worauf sich dann sofort die Behauptung ergibt.

Das Analoge gilt im Falle einer oder auch beliebig vieler Veränderlichen.

---

*) Dabei kann ebensowohl der Fall der Gleichheit wie der der Ungleichheit eintreten. Ist z. B. $Q_1 = Q_2 = \cdots$, so tritt das eine oder das andere ein, je nachdem der innere und der äußere Inhalt von Q_1 miteinander übereinstimmen oder nicht. Während ferner in dem *speziellen* Falle, wo $Q_{\nu+1}$ in Q_ν enthalten ist, der Grenzwert $\lim a_\nu$ (und ebenso der Grenzwert $\lim A_\nu$, wo A_ν der äußere Inhalt von Q_ν) existiert, und die bewiesene Ungleichung sich offenbar zu dem folgenden Ungleichungssysteme unmittelbar ergänzen läßt:

$$a \leqq \lim a_\nu \leqq A \leqq \lim A_\nu$$

(wo a den inneren Inhalt von Q bedeutet), so ist im *allgemeinen* Falle die Ungleichung des Textes die *einzige* ihrer Art. Es kann nämlich sowohl $A > \overline{\lim}\, A_\nu$ als auch $A < \underline{\lim}\, A_\nu$, und sowohl $a > \overline{\lim}\, A_\nu$ als auch $a < \underline{\lim}\, a_\nu$ sein.

Beispiele. 1. Sind f_1 und f_2 zwei beliebige Flächenstücke und setzt man $Q_{2\mu-1} = f_1$, $Q_{2\mu} = f_2$ ($\mu = 1, 2, \cdots$), so ist $Q = f_1 + f_2$, und somit a und A größer als $\overline{\lim}\, A_\nu$.

2. Ist f ein beliebiges Flächenstück, welches von den Punkten $p_1, p_2, \cdots$ überall dicht erfüllt wird, und setzt man $Q_\nu = p_\nu + p_{\nu+1} + \cdots$, so ist $Q = 0$, hingegen $A_\nu = f$ und somit $A < \lim A_\nu$.

3. Bedeutet dagegen Q_ν das volle Flächenstück f mit alleinigem Ausschluß der Punkte $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$, so hat man $a_\nu = f$, $a = 0$ und somit $a < \lim a_\nu$.

§ 2.

Satz über die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$.

Mit x und y mögen zwei voneinander unabhängige komplexe Veränderliche bezeichnet werden. Es seien $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ von y unabhängige analytische Funktionen der Veränderlichen x, welche sich für jeden Punkt x eines gegebenen Bereiches T*) der x-Ebene sämtlich regulär verhalten. Wir betrachten alsdann die Reihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu.$$

Die Gesamtheit der Werte von y, für welche dieselbe im Bereiche T durchweg konvergiert, erfüllt offenbar einen Kreis um den Punkt $y = 0$, dessen Radius P' genannt werde. Unter der Annahme, daß P' von Null verschieden sei, greifen wir einen beliebigen Wert $y = y_0$ heraus, dessen absoluter Betrag unterhalb P' liege; es kann alsdann insbesondere eintreten, daß die Konvergenz der Reihe $S(x, y_0)$ für die Umgebung eines jeden Punktes x des Bereiches T eine *gleichmäßige* ist.

Konvergiert nun $S(x, y_0)$ in irgend einem Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho$ der x-Ebene gleichmäßig, so gibt es nach Annahme einer beliebigen positiven Größe ε eine Zahl N derart, daß für alle $n > N$

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x) y_0^\nu \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

und somit

$$|f_n(x) y_0^n| < \varepsilon,$$

---

*) Unter einem „*Bereich* T“ der x-Ebene werde im folgenden stets ein Kontinuum im Weierstraßschen Sinne (unter Ausschluß der Begrenzungspunkte) verstanden, d. h. eine Punktmenge von der Beschaffenheit, daß a) jeder Punkt x derselben ein *innerer* Punkt der Menge ist (d. h. daß alle Punkte eines genügend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkte x ebenfalls zu T gehören), und daß b) je zwei Punkte von T durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können, welche ganz in T verläuft. Eine Punktmenge, welche aus einem Bereiche T durch Hinzufügung seiner sämtlichen Begrenzungspunkte hervorgeht, soll hingegen ein „*Bereich* B“ genannt werden.

Entsprechend bedeute ein „*Bereich* T“ der xy-Mannigfaltigkeit eine Punktmenge von der Beschaffenheit, daß a) jeder Punkt (x, y) derselben ein *innerer* Punkt der Menge ist (d. h. daß alle Punkte (x', y') eines gewissen Gebietes $|x' - x| < \varrho$, $|y' - y| < \varrho'$ ebenfalls noch zu T gehören), und daß b) je zwei Punkte von T durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke (darstellbar durch je ein Gleichungspaar $x = \alpha t + \beta$, $y = \alpha' t + \beta'$, wobei t die sämtlichen Werte eines reellen Intervalles durchläuft) zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können welche ganz in T verläuft.

welchen Wert x innerhalb des angegebenen Kreises auch haben möge; hieraus folgt aber, sobald $|y| < |y_0|$ ist:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu\right| < \varepsilon \sum_{\nu=n}^{\infty} \left|\frac{y}{y_0}\right|^\nu \qquad (n > N),$$

und somit konvergiert $S(x, y)$ auch für jeden der Bedingung $|y| < |y_0|$ genügenden Wert von y in jenem Kreise gleichmäßig.

Tritt also für $y = y_0$ der oben bemerkte Fall ein, so tritt er auch für jeden beliebigen Wert von y ein, dessen absoluter Betrag kleiner ist als $|y_0|$, und es geht daraus hervor, daß die Gesamtheit der Werte von y, für welche $S(x, y)$ in der Umgebung eines jeden Punktes von T gleichmäßig konvergiert, wiederum einen Kreis um den Nullpunkt erfüllt, dessen Radius wir mit r' bezeichnen wollen; dabei ist natürlich $0 \leqq r' \leqq \mathsf{P}'$.

Es soll jedoch nun der Nachweis geführt werden, daß r' notwendig mit einem der beiden Werte 0 oder P' zusammenfallen muß. Hierzu genügt es offenbar, folgenden Satz zu beweisen:

Die Potenzreihe $S(x, y) = \Sigma f_\nu(x) y^\nu$, deren Koeffizienten $f_\nu(x)$ für alle x des Bereiches T eindeutig und regulär seien, möge für $y = y_1$ im Bereiche T durchweg konvergieren. Gibt es alsdann irgend einen (von Null verschiedenen) Wert $y = y_0$, für welchen $S(x, y)$ in der Umgebung jedes Punktes von T gleichmäßig konvergiert, so gilt das nämliche auch für jeden beliebigen Wert von y, welcher der Bedingung $|y| < |y_1|$ genügt.

Zur Abkürzung werde $|y_0| = \beta$, $|y_1| = \mathsf{B}$ gesetzt; nur der Fall $\beta < \mathsf{B}$ bedarf eines Beweises. Um irgend einen dem Bereiche T angehörigen Punkt x, von dem wir der Einfachheit halber annehmen, daß es der Nullpunkt der x-Ebene sei, werde ein Kreis beschrieben, in welchem $S(x, y_0)$ noch gleichmäßig konvergiert*), und der Radius desselben mit R bezeichnet. Es gibt alsdann eine (von x unabhängige) Zahl n' derart, daß

$$(1) \qquad |f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{\beta^\nu}$$

für $\nu \geqq n'$ und $|x| \leqq R$.

Andererseits existiert infolge der Konvergenz von $S(x, y_1)$ im Bereich T zu jedem Werte x der Kreisperipherie $|x| = R$ eine Zahl n_x derart, daß

$$(2) \qquad |f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{\mathsf{B}^\nu}$$

für $\nu \geqq n_x$. Bezeichnet man daher die Gesamtheit derjenigen Punkte der Kreisperipherie, für welche

$$|f_\nu(x)| > \frac{1}{\mathsf{B}^\nu}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log \mathsf{B} > 0$$

*) Diese Forderung erfüllt in Wahrheit jeder um $x = 0$ beschriebene, noch ganz innerhalb T gelegene Kreis.

gilt, mit Q_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so gibt es keinen Punkt x, welcher unendlich vielen Q_ν gemein ist, und es folgt daraus gemäß § 1, 2:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0, \tag{3}$$

wo a_ν den inneren Inhalt der Menge Q_ν bedeutet.*)

Es möge nun für $|x| \leqq R$ gesetzt werden:

$$\frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log \mathsf{B} = g_\nu(u, v) + h_\nu(u, v) \qquad (x = u + iv) \tag{4}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dabei sei die im Kreise $|x| \leqq R$ eindeutige und stetige Funktion $g_\nu(u, v)$ der reellen Veränderlichen u, v dadurch definiert, daß sie in jedem *inneren* Punkte dieses Kreises endliche und stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitze, welche die Gleichung

$$\frac{\partial^2 g_\nu(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g_\nu(u, v)}{\partial v^2} = 0$$

befriedigen**), und daß sie auf der Peripherie jenes Kreises mit

$$\frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log \mathsf{B}$$

übereinstimme, solange dieser Ausdruck größer als Null ist (d. h. für alle Punkte von Q_ν), längs der übrigen Teile der Peripherie jedoch verschwinde.

Es gilt alsdann in dem ganzen Gebiete $|x| \leqq R$ einerseits offenbar

$$g_\nu(u, v) \geqq 0, \tag{5}$$

andererseits aber

$$-\infty \leqq h_\nu(u, v) \leqq 0. \tag{6}$$

Umgibt man nämlich jede dem Bereiche $|x| \leqq R$ angehörende Nullstelle von $f_\nu(x)$ mit einem Kreise, welcher so klein gewählt sei, daß für denselben durchweg

$$|f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{\mathsf{B}^\nu}$$

gelte, und nimmt aus dem Bereiche $|x| \leqq R$ alle Gebiete heraus, welche zugleich einem dieser Kreise angehören, so ist $h_\nu(u, v)$ in dem übrig bleibenden Gebiete harmonisch und nimmt daher seinen Maximalwert auf der Begrenzung desselben an; längs dieser ist aber durchweg:

$$h_\nu(u, v) = \frac{1}{\nu} \log |f_\nu(x)| + \log \mathsf{B} - g_\nu(u, v) \leqq 0.$$

---

*) Behufs Fixierung des Inhaltsbegriffs für die eindimensional gedachten, längs einer Kreislinie ausgebreiteten Punktmengen Q_ν kann man sich, wenn man will, den Kreis auf eine gerade Linie abgewickelt denken.

**) Wir nennen im folgenden eine Funktion $g(u, v)$ kurzweg *harmonisch* in einem Bereiche der uv-Ebene, wenn sie in dem letzteren durchweg stetig ist und in jedem *inneren* Punkte desselben endliche und stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitzt, welche der Laplaceschen Gleichung genügen.

Ebenso gilt aber diese Ungleichung auch innerhalb der ausgeschiedenen Gebietsteile.

Wählt man speziell $\nu \geqq n'$, so ist nach (1) der Maximalwert, welchen $g_\nu(u, v)$ auf der Peripherie $|x| = R$ annehmen kann, nicht größer als $\log \mathsf{B} - \log \beta$; längs der nicht zu Q_ν gehörigen Teile der Peripherie aber ist $g_\nu(u, v)$ gemäß Definition gleich null. Daraus folgt nach § 1, 4 für den Mittelwert $g_\nu(0, 0)$ aus den Werten von $g_\nu(u, v)$ längs der Kreisperipherie:

$$g_\nu(0, 0) \leqq \frac{1}{2\pi R}(\log \mathsf{B} - \log \beta)\, a_\nu \qquad (\nu \geqq n'),$$

und hieraus ergibt sich mit Berücksichtigung von (5) in bekannter Weise mittels des Poissonschen Integrals, wenn man noch r ein für allemal der Ungleichung $0 < r < R$ entsprechend beliebig wählt:

$$g_\nu(u, v) \leqq \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{R + r}{R - r}(\log \mathsf{B} - \log \beta)\, a_\nu$$
$$(|x| \leqq r, \quad \nu \geqq n').$$

Infolge Gleichung (3) gibt es daher nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe ε eine (von u und v unabhängige) Zahl n derart, daß für alle $\nu \geqq n$:

$$g_\nu(u, v) \leqq \varepsilon \qquad (|x| \leqq r)$$

und somit a fortiori wegen (6):

$$-\infty \leqq \frac{1}{\nu}\log|f_\nu(x)| + \log \mathsf{B} \leqq \varepsilon \qquad (\nu \geqq n, \ |x| \leqq r)$$

d. h.

$$|f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^\varepsilon}{\mathsf{B}}\right)^\nu, \qquad (\ \text{„} \qquad \text{„}\ )$$

und daher konvergiert $S(x, y)$, solange $|y| < \frac{\mathsf{B}}{e^\varepsilon}$ bleibt, im Kreise $|x| \leqq r$ gleichmäßig. Da aber ε beliebig klein angenommen werden konnte, so ist damit die Behauptung erwiesen.*)

---

*) Die durch diesen Satz als die einzig zulässigen bezeichneten Fälle $r' = \mathsf{P}'$ und $r' = 0$ können nun auch tatsächlich beide eintreten. Der erstere darf (wie aus § 5, 4 hervorgeht) als der gewöhnliche bezeichnet werden; es genügt $f_\nu(x) = 1$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ zu setzen, um ihn zu erhalten. (Ein Beispiel allgemeinerer Art findet sich u. a. in § 11, 1.) Um ein Beispiel für den zweiten Fall zu konstruieren, bedienen wir uns gewisser von Herrn C. **Runge** (Acta Math. 6 [1885], p. 246) aufgestellter ganzer rationaler Funktionen $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzen:

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n=\infty} g_n(x) = 0$$

für jeden endlichen Wert von x; und

$$\text{(2)} \qquad \left|g_n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right| > 1 - \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

§ 3.

Eine in bezug auf x sowie in bezug auf y reguläre analytische Funktion ist auch eine reguläre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y.

1. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen können nun zunächst dazu dienen, folgenden Satz zu beweisen:

*Die Größe $F(x, y)$ sei für alle den Bedingungen $|x| < R$, $|y| < S$ genügenden Werte der Veränderlichen x und y eindeutig definiert; für jeden der erwähnten Werte von x stelle sie eine im Gebiete $|y| < S$ reguläre analytische Funktion von y dar, und vice versa. Alsdann ist $F(x, y)$ eine im ganzen Bereiche $|x| < R$, $|y| < S$ reguläre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y.**)

Setzt man nun

$$f_0(x) = 1, \quad f_\nu(x) = 1 + [3 g_\nu(x)]^{\nu^2} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

so konvergiert wegen (1) $S(x, y)$ unabhängig von x für $|y| < 1$. Die Konvergenz ist jedoch für keinen (von Null verschiedenen) Wert von y eine gleichmäßige in bezug auf die Umgebung des Punktes $x = 0$. Denn für $\nu > 2$ gilt

$$\left| f_\nu\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right)\right| > \left(3 - \frac{3}{\nu}\right)^{\nu^2} - 1 \geqq 2^{\nu^2} - 1$$

und infolgedessen wachsen, wie auch $y = y_0$ $(\neq 0)$ und $\varrho > 0$ angenommen werden, in der Reihe der Größen $f_\nu\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right) y_0^\nu$, bei welchen die Argumente $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}$ von irgend einem Te[illegible] an dem Kreise $|x| < \varrho$ angehören, die absoluten Beträge ins Unendliche. Enthält also der Bereich T den Punkt $x = 0$, so gilt $\mathrm{P}' = 1$, $r' = 0$.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier noch folgendes bemerkt. Ist irgend ein **Bereich** B (s. p. 8, Fußn. *)) vorgelegt, in welchem $S(x, y)$ für $|y| < \mathrm{P}'$ durchweg konvergiert, und gibt es einen (von Null verschiedenen) Wert $y = y_0$, für welchen $S(x, y_0)$ im Bereich B gleichmäßig konvergiert, so folgt zwar aus dem bewiesenen Satze, daß $S(x, y)$ auch für jeden der Bedingung $|y| < \mathrm{P}'$ genügenden Wert von y in bezug auf die Umgebung *jedes inneren Punktes* von B gleichmäßig konvergiert; hingegen gibt der Satz keine Auskunft darüber, ob unter den genannten Voraussetzungen auch die gleichmäßige Konvergenz von $S(x, y)$ $(|y| < \mathrm{P}')$ im *vollen Bereiche* B gewährleistet ist. Tatsächlich ist dieses *nicht* der Fall; m. a. W. bezeichnet man hier mit r' die obere Grenze aller Werte $|y|$, für welche $S(x, y)$ *im Bereiche* B gleichmäßig konvergiert, so können *diese* Größen P' und r' sehr wohl beide größer als Null und *trotzdem voneinander verschieden* sein. Setzt man z. B.:

$$f_\nu(x) = 1 + \left(\frac{2 g_\nu(x)}{c_\nu}\right)^\nu, \quad c_\nu = \operatorname*{Max}_{|x| \leq 1} |g_\nu(x)|,$$

wo die Funktionen $g_\nu(x)$ dieselbe Bedeutung haben wie oben, und wählt als Bereich B die Kreisfläche $|x| \leqq 1$, so ist, wie leicht ersichtlich, $\mathrm{P}' = 1$ und $r' = \frac{1}{2}$.

*) Offenbar kann an Stelle des Bereiches $|x| < R$ irgend ein Bereich T der x-Ebene, an Stelle von $|y| < S$ ein solcher T' der y-Ebene treten, ohne daß der Satz dadurch an Allgemeinheit gewinnen würde.

Wie Herr **Osgood***) nachgewiesen hat, ist dieser Satz dann und nur dann richtig, wenn der folgende gilt:

Die Größe $\Phi(x, y)$ möge für jeden der Bedingung $|x| < R$ genügenden Wert von x eine im Kreise $|y| < S$ reguläre analytische Funktion von y sein [und vice versa], außerdem jedoch stelle sie im Bereiche $|x| < R$, $|y| < k < S$ eine reguläre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y dar. Dann gilt das letztere auch für den ganzen Bereich $|x| < R$, $|y| < S$.

Dieser Satz ist aber eine unmittelbare Folgerung aus dem Bewiesenen, und zwar zeigt sich, daß die in Klammer eingeschlossenen Worte unbeschadet der Gültigkeit des Satzes auch fortgelassen werden können.

$\Phi(x, y)$ ist nämlich im Gebiete $|x| < R$, $|y| < k$ durch eine absolut konvergierende, nach Potenzen von x und y fortschreitende Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ darstellbar. Ordnet man diese nach Potenzen von y, so sind die Koeffizienten $\mathfrak{P}_\nu(x)$ für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen, und die Reihe

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x) y^\nu$ konvergiert für jeden der Bedingung $|y| < k$ genügenden Wert von y in der Umgebung jeder Stelle $x = x_0$ des Kreises $|x| < R$ gleichmäßig. Da nun nach Voraussetzung ferner $\Phi(x_0, y)$ — welchen Wert x_0 innerhalb des Gebietes $|x_0| < R$ auch habe — eine für $|y| < S$ reguläre analytische Funktion von y ist, so muß die die Funktion $\Phi(x_0, y)$ zunächst nur für $|y| < k$ darstellende Potenzreihe $\Sigma \mathfrak{P}_\nu(x_0) y^\nu$ auch noch für $|y| < S$ konvergieren und mit $\Phi(x_0, y)$ übereinstimmen. Nach § 2 ist dann aber auch für jeden der *letzteren* Bedingung genügenden Wert von y die Konvergenz der Reihe $\Sigma \mathfrak{P}_\nu(x) y^\nu$ eine gleichmäßige in bezug auf die Umgebung jeder Stelle $x = x_0$, so daß**) diese Reihe auch noch in dem vollen Gebiete $|x| < R$, $|y| < S$ eine reguläre analytische Funktion von (x, y) darstellt.

2. Der schließliche Beweis des an die Spitze gestellten Satzes gestaltet sich nun unter Anwendung der von Herrn **Osgood** herrührenden

*) Math. Ann. 53 (1900) p. 464. (Vgl. die Einleitung.)

**) Mit Benutzung des folgenden häufig angewandten Satzes: *Konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x) y_0^\nu$, wo $\mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu$, im Bereiche $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig, so konvergiert die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ für $|x| < \varrho$, $|y| < |y_0|$ absolut.* Denn setzt man $\operatorname{Max}_{|x| \leq \varrho} |\mathfrak{P}_\nu(x)| = g_\nu$, so ist nach Annahme einer beliebigen positiven Größe h für hinreichend große Werte von ν: $g_\nu |y_0|^\nu < h$ und somit $|a_\mu^{(\nu)}| \varrho^\mu |y_0|^\nu < h$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$, woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Methoden, speziell mit Benutzung des von ihm bewiesenen „Satzes A"*) wie folgt:

Die positive Größe R_0 sei der Ungleichung $0 < R_0 < R$ entsprechend beliebig gewählt. Jedem Punkt $y = y'$ des Kreises $|y| \leqq \frac{1}{3} S$ entspricht eine Funktion $F(x, y')$, deren absoluter Betrag im Kreise $|x| \leqq R_0$ einen Maximalwert $M(y')$ besitzt. Mit $P_i (i = 1, 2, \cdots)$ möge die Gesamtheit derjenigen Punkte y des Kreises $|y| \leqq \frac{1}{3} S$ bezeichnet werden, für welche $M(y) \leqq i$ ist. Dann muß es nach einer von Herrn Osgood mehrfach angewandten Schlußweise**) eine Zahl $i = i_0$ geben, für welche die zugehörige Punktmenge P_{i_0} einen gewissen zweidimensionalen Teilbereich B des Kreises $|y| \leqq \frac{1}{3} S$ überall dicht erfüllt; infolgedessen muß, da

$$|F(x, y)| \leqq i_0$$

ist, solange $|x| \leqq R_0$ und y zu P_{i_0} gehört, auch noch das gleiche gelten, solange $|x| \leqq R_0$ und y in B gelegen ist. Es sei nun $y = y_0$ irgend ein *innerer* Punkt von B, und der Kreis $|y - y_0| \leqq k$ gehöre dem Bereiche B noch an; dann folgt aus dem „Satze A", daß $F(x, y)$ eine im Gebiete $|x| < R_0$, $|y - y_0| < k$ reguläre analytische Funktion von (x, y) ist. Da aber auch der Kreis $|y - y_0| < \frac{2}{3} S$ dem Gebiet $|y| < S$ sicher noch angehört, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, daß $F(x, y)$ auch noch im Gebiete $|x| < R_0$, $|y - y_0| < \frac{2}{3} S$ durchweg regulär sein muß, speziell also in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $y = 0$. Das nämliche läßt sich aber selbstverständlich auch für jeden anderen Punkt des Gebietes $|x| < R$, $|y| < S$ dartun.

§ 4.

Fall von n Veränderlichen.

1. Die Betrachtungen der beiden vorigen Paragraphen können nun auch auf den Fall von mehr als zwei Veränderlichen ausgedehnt werden.

---

*) Als „Satz A" ist in der „Zweiten Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen" (Math. Ann. 53, p. 461) derjenige bezeichnet, welcher sich von dem an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Satze dadurch unterscheidet, daß noch weiterhin vorausgesetzt wird, $F(x, y)$ bleibe im betrachteten Gebiete unterhalb einer endlichen Schranke G. (Der Beweis desselben [Math. Ann. 52, p. 462] gestattet noch eine kleine formale Vereinfachung, welche sich ergibt, indem man [p. 463] an Stelle des Wertes $|\psi(x, y) - \psi(x, y')|$ direkt $|\psi(x, y) - \psi(x, 0)|$ abschätzt, wo $\psi(x, 0) = f_m(x)$.)

**) Ist $P_1, P_2, \cdots$ eine Reihe ebener Punktmengen, von denen jede in der folgenden enthalten ist, und sind alle Punkte einer Kreisfläche C an denselben beteiligt, so gibt es stets einen zweidimensionalen Teilbereich B von C, welcher von einer der Punktmengen (und also auch von allen folgenden) überall dicht erfüllt wird. (Math. Ann. 53, p. 462.)

Was zunächst den in § 2 bewiesenen Satz betrifft, so gestattet dieser eine Verallgemeinerung nach zwei Richtungen hin; es können nämlich sowohl an Stelle von x als auch an Stelle von y mehrere Variable treten. Wir nehmen an, daß beides zugleich geschehe, beschränken uns jedoch der Bequemlichkeit halber auf den Fall, wo x und y durch je *zwei* Variable ersetzt sind. Der Satz kann alsdann folgendermaßen formuliert werden:

Die Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |f_{\mu\nu}(x,x')y^{\mu}y'^{\nu}|,$$

deren Koeffizienten $f_{\mu\nu}(x,x')$ im Bereiche T) der xx'-Mannigfaltigkeit eindeutige und reguläre analytische Funktionen der beiden Veränderlichen x, x' seien, möge für $y = y_1$, $y' = y_1'$ im Bereiche T durchweg konvergieren. Gibt es alsdann irgend ein Paar von Null verschiedener Werte $y = y_0$, $y' = y_0'$, für welche jene Reihe in der Umgebung jedes Punktes (x,x') des Bereiches T gleichmäßig konvergiert, so gilt das nämliche auch für jedes beliebige Wertepaar y, y', welches den Bedingungen $|y| < |y_1|$, $|y'| < |y_1'|$ genügt.*

Beweis. Zur Abkürzung werde $|y_1| = \mathsf{B}$, $|y_1'| = \mathsf{B}'$ gesetzt und die kleinere der beiden Zahlen $|y_0|$ und $|y_1|$ [bzw. $|y_0'|$ und $|y_1'|$] mit β [bzw. β'] bezeichnet. Irgend ein Punkt des Bereiches T habe, wie wir der Einfachheit halber annehmen, die Koordinaten $x = 0$, $x' = 0$ und die Doppelreihe konvergiere für $y = y_0$, $y' = y_0'$ im Gebiete $|x| \leqq R$, $|x'| \leqq R'$ noch gleichmäßig. Nach Vorgabe einer positiven Größe δ läßt sich also eine bestimmte endliche Anzahl von Gliedern der Reihe derart fixieren, daß nach Abtrennung derselben der Rest (und somit hier auch jedes einzelne Glied des Restes), solange x und x' in jener Weise beschränkt bleiben, kleiner ist als δ. Nimmt man $\delta = 1$ an, so ergibt dies die Existenz einer positiven (von x und y unabhängigen) Zahl l' von der Eigenschaft, daß

$$(1) \qquad |f_{\mu\nu}(x,x')| \leqq \frac{1}{|y_0|^{\mu}|y_0'|^{\nu}} \leqq \frac{1}{\beta^{\mu}\beta'^{\nu}},$$

sobald $\mu + \nu \geqq l'$, $|x| \leqq R$, $|x'| \leqq R'$.

Andererseits existiert infolge der Konvergenz der Doppelreihe für $y = y_1$, $y' = y_1'$ zu jedem Wertsystem (x,x') des Gebietes $|x| = R$, $|x'| = R'$, eine Zahl $l_{x,x'}$ derart, daß

$$(2) \qquad |f_{\mu\nu}(x,x')| \leqq \frac{1}{\mathsf{B}^{\mu}\mathsf{B}'^{\nu}}$$

für $\mu + \nu \geqq l_{x,x'}$. Bezeichnet man daher die Gesamtheit derjenigen Punkte (x,x') des Gebietes $|x| = R$, $|x'| = R'$, für welche

*) Siehe p. 8, Fußn. *) (Die Stelle der Veränderlichen y vertritt hier x'.)

$$|f_{\mu\nu}(x,x')| > \frac{1}{\mathsf{B}^{\mu}\mathsf{B}'^{\nu}} \quad \text{d. h.} \quad \log|f_{\mu\nu}(x,x')| + \mu \log \mathsf{B} + \nu \log \mathsf{B}' > 0,$$

mit $Q_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots$), so gibt es keinen Punkt (x, x'), welcher unendlich vielen $Q_{\mu\nu}$ gemein ist, und daraus folgt gemäß § 1, 2

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} a_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

wo $a_{\mu\nu}$ den inneren Inhalt der Menge $Q_{\mu\nu}$ bedeutet.*)

Es möge nun für $|x| \leqq R$, $|x'| \leqq R'$ gesetzt werden:

$$\log|f_{\mu\nu}(x,x'| + \mu \log \mathsf{B} + \nu \log \mathsf{B}' = g_{\mu\nu}(r,\varphi; r',\varphi') + h_{\mu\nu}(r,\varphi; r',\varphi') \tag{4}$$
$$(x = re^{i\varphi};\ x' = r'e^{i\varphi'};\ \mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

Dabei sei die Funktion $g_{\mu\nu}(r,\varphi; r',\varphi')$ durch folgende vier Festsetzungen definiert:

a) Für $r = R$, $r' = R'$ stimme $g_{\mu\nu}(r,\varphi; r',\varphi') = g_{\mu\nu}(R,\varphi; R',\varphi')$ mit dem entsprechenden Werte der linken Seite der vorigen Gleichung überein, solange derselbe größer als 0 ist (d. h. für alle Punkte von $Q_{\mu\nu}$), besitze jedoch sonst den Wert Null.

b) Für $r < R$, $r' = R'$ sei $g_{\mu\nu}(r,\varphi; r',\varphi')$ durch die Gleichung

$$g_{\mu\nu}(r,\varphi; R',\varphi') = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2} \frac{g_{\mu\nu}(R,\psi; R',\varphi')\,d\psi}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}, \quad \text{und}$$

c) für $r = R$, $r' < R'$ durch eine analoge Gleichung bestimmt.

d) Für $r < R$, $r' < R'$ endlich gelte:

$$g_{\mu\nu}(r,\varphi; r',\varphi') =$$
$$= \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \frac{R'^2 - r'^2}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g_{\mu\nu}(R,\psi; R',\psi')\,d\psi\,d\psi'}{[R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2][R'^2 - 2R'r'\cos(\psi' - \varphi') + r'^2]}.$$

Offenbar existieren die angegebenen Integrale sämtlich; auch kann das Doppelintegral durch die beiden bezüglichen *iterierten* Integrale ersetzt werden. Hieraus folgt aber sofort gemäß der Theorie des einfachen Poissonschen Integrals, daß $g_{\mu\nu}(r,\varphi; r'\varphi')$ für irgend ein festes Wertepaar r', φ' im Gebiete $r \leqq R$ harmonisch**) ist (und vice versa); für den

*) Behufs Fixierung des Inhaltsbegriffs für die (als eben gedachten) Punktmengen $Q_{\mu\nu}$ kann man sich die beiden Kreisperipherien $|x| = R$, $|x'| = R'$ in ihrer natürlichen Länge auf die beiden Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgetragen denken. Die Punktmengen liegen alsdann sämtlich in einem Rechtecke mit den Seiten $2\pi R$, $2\pi R'$.

**) Über die exakte Bedeutung, in welcher dieser Ausdruck gebraucht ist, vgl. p. 10, Fußn. **)

Fall $r' = R'$ ergibt sich dies nämlich aus b), für den Fall $r' < R'$ aus c) in Verbindung mit d).*)

Es gilt alsdann in dem ganzen Gebiete $|x| \leqq R$, $|x'| \leqq R'$ einerseits offenbar:

(5) $$g_{\mu\nu}(r, \varphi; r', \varphi') \geqq 0,$$

andererseits aber:

(6) $$-\infty \leqq h_{\mu\nu}(r, \varphi; r', \varphi') \leqq 0.$$

Findet nämlich die letztere Ungleichung für irgend ein Wertsystem $(r_0, \varphi_0; r_0', \varphi_0')$ nicht statt, so werde, falls $r_0 < R$ ist, um jede dem Bereiche $|x| \leqq R$ angehörige Nullstelle der Funktion $f_{\mu\nu}(x, x_0')$ $(x_0' = r_0' e^{i\varphi_0'})$ ein Kreis beschrieben, der so klein gewählt sei, daß für denselben durchweg $|f_{\mu\nu}(x, x_0')| \leqq \frac{1}{\mathsf{B}^\mu \mathsf{B}'^\nu}$ und somit $h_{\mu\nu}(r, \varphi; r_0', \varphi_0') \leqq 0$ gelte, so daß also der Punkt (r_0, φ_0) sicherlich keinem dieser Kreise angehört. Nimmt man aber aus dem Bereiche $|x| \leqq R$ alle Gebiete heraus, welche zugleich einem jener Kreise angehören, so ist $h_{\mu\nu}(r, \varphi; r_0', \varphi_0')$ in dem übrig bleibenden Gebiete harmonisch und nimmt daher seinen Maximalwert auf der Begrenzung desselben an. Es gibt also eine Randstelle (r_1, φ_1) dieses Gebietes, für welche

$$h_{\mu\nu}(r_1, \varphi_1; r_0', \varphi_0') \geqq h_{\mu\nu}(r_0, \varphi_0; r_0', \varphi_0') > 0$$

ist. Diese Randstelle kann infolgedessen nicht der Peripherie eines der ausgeschiedenen Kreise angehören, d. h. es muß $r_1 = R$ sein und es gilt also:

$$h_{\mu\nu}(R, \varphi_1; r_0', \varphi_0') > 0.$$

Ist nun $r_0' < R'$, so betrachte man die Funktion $f_{\mu\nu}(Re^{i\varphi_1}, y)$ von y und

---

*) Die auf diese Weise gebildete Funktion $g_{\mu\nu}(r, \varphi; r', \varphi')$ darf nicht etwa allgemein als der reelle Teil einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen (d. h. als „biharmonische Funktion", vgl. Encykl. d. Math. Wiss. II B 1, Nr. 42 sowie die daselbst aufgeführte Literatur) angesehen werden; denn sie genügt zwar, wenn man $x = u + iv$, $x' = u' + iv'$ setzt, den beiden Differentialgleichungen $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v'^2} = 0$, nicht aber notwendig den beiden weiteren $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial u'} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v'} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v'} - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u'} = 0$. (Die Existenz derartiger Funktionen $g_{\mu\nu}$ bildet keineswegs einen Widerspruch zu dem Satze des § 3, da, wenn auch $g_{\mu\nu}$ sicherlich der reelle Teil einer analytischen Funktion von x, sowie derjenige einer analytischen Funktion von x' ist, die zugehörigen imaginären Bestandteile im allgemeinen voneinander verschieden sein werden. So ist z. B. uu' das eine Mal der reelle Teil der Funktion $(u + iv)u'$ von x, das andere Mal der reelle Teil der Funktion $u(u' + iv')$ von x', niemals aber der reelle Teil einer analytischen Funktion von (x, x').)

wiederhole für diese die analogen Schlüsse; es ergibt sich alsdann die Existenz eines Wertes φ_1' derart, daß

$$h_{\mu\nu}(R,\varphi_1;R',\varphi_1')>0$$

wird, was aber der Festsetzung a) widerspricht.

Wählt man speziell $\mu+\nu\geqq l'$, so ist nach (1) der Maximalwert von $g_{\mu\nu}(R,\varphi;R',\varphi')$ nicht größer als $\mu\log\frac{\mathsf{B}}{\beta}+\nu\log\frac{\mathsf{B}'}{\beta'}$; für alle nicht zu $Q_{\mu\nu}$ gehörigen Wertsysteme $(R,\varphi;R',\varphi')$ aber ist gemäß Definition

$$g_{\mu\nu}(R,\varphi;R',\varphi')=0.$$

Daraus folgt nach § 1, 4 für den Mittelwert $g_{\mu\nu}(0,*;0,*)=g_{\mu\nu}(0)$ der Werte $g_{\mu\nu}(R,\varphi;R',\varphi')$:

$$g_{\mu\nu}(0)\leqq\frac{a_{\mu\nu}}{4\pi^2RR'}\left(\mu\log\frac{\mathsf{B}}{\beta}+\nu\log\frac{\mathsf{B}'}{\beta'}\right)\qquad(\mu+\nu\geqq l').$$

Werden nun R_0 und R_0' ein für allemal den Ungleichungen $0<R_0<R$, $0<R_0'<R'$ entsprechend beliebig angenommen, so ergibt sich, da $g_{\mu\nu}(R,\varphi;R',\varphi')$ durchweg $\geqq 0$ ist, aus dem Doppelintegral sofort:

$$g_{\mu\nu}(r,\varphi;r',\varphi')\leqq\frac{R+R_0}{R-R_0}\cdot\frac{R'+R_0'}{R'-R_0'}g_{\mu\nu}(0)\leqq(C\mu+C'\nu)a_{\mu\nu}$$
$$(\mu+\nu\geqq l',\ r\leqq R_0,\ r'\leqq R_0'),$$

wo C und C' zwei positive Konstanten bedeuten. Infolge Gleichung (3) gibt es daher nach Annahme einer beliebigen positiven Größe ε eine (von den Veränderlichen unabhängige) Zahl l derart, daß für alle $\mu+\nu\geqq l$:

$$g_{\mu\nu}(r,\varphi;r',\varphi')\leqq(\mu+\nu)\varepsilon\qquad(r\leqq R_0,\ r'\leqq R_0')$$

und somit a fortiori wegen (6):

$$-\infty\leqq\log|f_{\mu\nu}(x,x')|+\mu\log\mathsf{B}+\nu\log\mathsf{B}'\leqq(\mu+\nu)\varepsilon$$
$$(\mu+\nu\geqq l,\ |x|\leqq R_0,\ |x'|\leqq R_0')$$

d. h.

$$|f_{\mu\nu}(x,x')|\leqq\left(\frac{e^\varepsilon}{\mathsf{B}}\right)^\mu\cdot\left(\frac{e^\varepsilon}{\mathsf{B}'}\right)^\nu\quad(\mu+\nu\geqq l,|x|\leqq R_0,|x'|\leqq R_0'),$$

und daher konvergiert $\sum_{\mu,\nu}|f_{\mu\nu}(x,x')y^\mu y'^\nu|$, solange $|y|<\frac{\mathsf{B}}{e^\varepsilon}$, $|y'|<\frac{\mathsf{B}'}{e^\varepsilon}$, im Gebiete $|x|\leqq R_0$, $|x'|\leqq R_0'$ *gleichmäßig*. Da aber ε beliebig klein angenommen werden konnte, so ist damit die Behauptung erwiesen.

2. Jede der beiden in diesem Satze liegenden Verallgemeinerungen kann nun dazu dienen, die Betrachtungen des § 3 auf den Fall von mehr als zwei Veränderlichen auszudehnen. Zunächst ergibt sich wiederum die nachstehende Folgerung:

Die Größe $\Phi(x,x';y,y')$ möge für jedes den Bedingungen $|x|<R$, $|x'|<R'$ genügende Wertepaar x,x' eine im Gebiete $|y|<S$, $|y'|<S'$ regu-

läre analytische Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen y, y' sein, außerdem jedoch stelle sie eine im Bereiche $|x| < R$, $|x'| < R'$, $|y| < k < S$, $|y'| < k' < S'$ reguläre analytische Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, x', y, y' dar; alsdann gilt das letztere auch für den ganzen Bereich $|x| < R$, $|x'| < R'$, $|y| < S$, $|y'| < S'$.

$\Phi(x, x'; y, y')$ ist nämlich im Gebiete $|x| < R$, $|x'| < R'$, $|y| < k$, $|y'| < k'$ durch eine absolut konvergierende, nach Potenzen von x, x', y, y' fortschreitende vierfach unendliche Reihe darstellbar. Ordnet man diese nach Potenzen von y und y', wobei sie die Gestalt

$$\sum_{\mu,\nu} \mathfrak{P}_{\mu\nu}(x, x') y^\mu y'^\nu$$

annehmen möge, so sind die Koeffizienten $\mathfrak{P}_{\mu\nu}(x, x')$ für $|x| < R$, $|x'| < R'$ absolut konvergente Potenzreihen, und die Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu} |\mathfrak{P}_{\mu\nu}(x, x') y^\mu y'^\nu|$$

konvergiert für jedes den Bedingungen $|y| < k$, $|y'| < k'$ genügende Wertepaar y, y' in der Umgebung einer jeden Stelle x, x' des Gebietes $|x| < R$, $|x'| < R'$ *gleichmäßig*. Da nun ferner $\Phi(x_0, x_0'; y, y')$ — welche Werte x_0 und x_0' innerhalb des Gebietes $|x_0| < R$, $|x_0'| < R'$ auch annehmen mögen — eine für $|y| < S$, $|y'| < S'$ reguläre analytische Funktion von (y, y') ist, so muß die die Funktion zunächst nur für $|y| < k$, $|y'| < k'$ darstellende Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} \mathfrak{P}_{\mu\nu}(x_0, x_0') y^\mu y'^\nu$ auch noch für $|y| < S$, $|y'| < S'$ absolut konvergieren und mit $\Phi(x_0, x_0'; y, y')$ übereinstimmen. Nach dem vorigen Satze ist aber dann auch für jedes der *letzteren* Bedingung genügende Wertepaar y, y' die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\mu,\nu} |\mathfrak{P}_{\mu\nu}(x, x') y^\mu y'^\nu|$$

eine gleichmäßige in bezug auf die Umgebung jeder Stelle x_0, x_0', woraus folgt*), daß die Reihe $\sum_{\mu,\nu} \mathfrak{P}_{\mu\nu}(x, x') y^\mu y'^\nu$ auch noch in dem vollen Gebiete $|x| < R$, $|x'| < R'$, $|y| < S$, $|y'| < S'$ eine reguläre analytische Funktion der vier Veränderlichen darstellt.

Hieraus ergibt sich nun endlich der folgende Satz:

Ist von der eindeutigen Funktion $F(z, z_1, \cdots, z_n)$ der $n + 1$ komplexen Veränderlichen $z, z_1, \cdots, z_n$ bekannt, daß sie, solange sämtliche Veränderlichen dem absoluten Betrage nach unterhalb R bleiben, in bezug auf jede

*) Nach einer Schlußweise, welche der p. 13, Fußn. **) angegebenen völlig analog ist.

einzelne derselben regulär sei, so ist sie auch eine in dem so definierten Gebiete reguläre analytische Funktion der $n+1$ unabhängigen Veränderlichen $z, z_1, \cdots, z_n$.

Nimmt man nämlich den Satz für n Veränderliche als bewiesen an, so entspricht jedem Punkte $z = z'$ des Kreises $|z| \leqq \frac{1}{3} R$ eine analytische Funktion $F(z', z_1, \cdots, z_n)$ der n Veränderlichen $z_1, \cdots, z_n$, deren absoluter Betrag im Gebiete $|z_\alpha| \leqq R_0 < R$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ einen Maximalwert $M(z')$ besitzt. Hieraus folgt aber — nach der bereits in § 3 angewandten Schlußweise — die Existenz einer positiven Zahl i_0 derart, daß diejenigen Punkte z', für welche $M(z') \leqq i_0$ ist, einen gewissen Teilbereich B des Kreises $|z| \leqq \frac{1}{3} R$ überall dicht erfüllen, so daß also durchweg

$$|F(z, z_1, \cdots, z_n)| \leqq i_0$$

gilt, solange $|z_\alpha| \leqq R_0$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ und z dem Bereiche B angehört. Ist nun $z = z_0$ irgend ein innerer Punkt des Bereiches B und der Kreis $|z - z_0| \leqq k$ noch vollständig in B gelegen, so folgt aus dem Osgoodschen „Satze A", angewandt auf den Fall von $n+1$ Veränderlichen*), daß $F(z, z_1, \cdots, z_n)$ eine im Gebiete $|z - z_0| < k$, $|z_\alpha| < R_0$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ reguläre analytische Funktion von $z, z_1, \cdots, z_n$ ist. Nun gehört aber auch der Kreis $|z - z_0| < \frac{2}{3} R$ dem Gebiete $|z| < R$ sicher noch vollständig an, so daß auch in diesem noch $F(z, z_1, \cdots, z_n)$ nach Voraussetzung eine analytische Funktion von z (oder auch — nach der Annahme des Induktionsschlusses — von z und $n-1$ der übrigen Veränderlichen) darstellt. Wendet man also den soeben bewiesenen Satz an, wobei die Größe $z - z_0$ (und noch beliebig viele, jedoch höchstens $n-1$ der Veränderlichen $z_1, \cdots, z_n$) an Stelle von $y, y', \cdots$, die übrigen Veränderlichen an Stelle von $x, x', \cdots$ treten, so ergibt sich, daß $F(z, z_1, \cdots, z_n)$ auch noch im Gebiete $|z - z_0| < \frac{2}{3} R$, $|z_\alpha| < R_0$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ durchweg regulär sein muß, speziell also in der Umgebung des Punktes $z = z_1 = \cdots = z_n = 0$.

§ 5.

Gebiet, in welchem ein Ausdruck von der Form $\sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ eine reguläre analytische Funktion von x und y darstellt.

1. Wir wenden uns nun einer zweiten Folgerung aus dem in § 2 bewiesenen Satze zu.

---

*) Daß der „Satz A" auch für beliebig viele Veränderliche gültig ist, wurde bereits von Herrn Osgood ausdrücklich bemerkt (Math. Ann. 52, p. 464).

Die Potenzreihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu,$$

deren Koeffizienten $f_\nu(x)$ für alle x eines Bereiches T eindeutig definiert seien, möge, solange $|y| < \varrho'$ ist, im Bereiche T durchweg konvergieren. Man überzeugt sich alsdann ohne Mühe davon, daß $S(x, y)$ *dann und nur dann* eine in dem ganzen Gebiete $(T, |y| < \varrho')$ reguläre analytische Funktion der beiden Veränderlichen x, y darstellt, wenn *erstens* die Funktionen $f_\nu(x)$ sämtlich im Bereiche T reguläre analytische Funktionen von x sind, und *zweitens* die Reihe $S(x, y)$ für jeden der betrachteten Werte von y*) in der Umgebung eines jeden Punktes x von T *gleichmäßig* konvergiert.

Es sei nämlich $x = x_0$ ein beliebiger Punkt von T und das Gebiet $|x - x_0| \leqq \varrho$ gehöre dem Bereiche T noch vollständig an. Sind nun die beiden angegebenen Bedingungen erfüllt, so geht, wenn man die sämtlichen Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt, aus $S(x, y)$ eine nach Potenzen von $x - x_0$ und y fortschreitende Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ hervor, welche im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ absolut konvergiert**) und dem Werte nach mit $S(x, y)$ übereinstimmt; $S(x, y)$ verhält sich somit in der Umgebung einer jeden Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ $(|y_0| < \varrho')$ regulär. Umgekehrt gestattet die Reihe $S(x, y)$, wenn sie sich im Bereiche $(T, |y| < \varrho')$ durchweg regulär verhält, in dem Teilgebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ die Darstellung durch eine absolut konvergente, nach Potenzen von $x - x_0$ und y fortschreitende Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$; wird eine solche aber nach Potenzen von y geordnet, wobei sie die Gestalt $\sum_\nu \mathfrak{P}_\nu(x - x_0) y^\nu$ annimmt, so sind die Koeffizienten $\mathfrak{P}_\nu(x - x_0)$ für $|x - x_0| < \varrho$ konvergente Potenzreihen, und die Reihe $\sum_\nu \mathfrak{P}_\nu(x - x_0) y^\nu$ konvergiert, solange $|y| < \varrho'$ bleibt, in jedem Bereiche $|x - x_0| \leqq \varrho_0 < \varrho$ gleichmäßig. Da nun für $|x - x_0| < \varrho$ die Größen $\mathfrak{P}_\nu(x - x_0)$ offenbar mit $f_\nu(x)$ der Reihe nach übereinstimmen müssen, so ist damit das Bestehen der beiden Bedingungen nachgewiesen.

2. Es kann aber nunmehr mit Hilfe des Satzes von § 2 (angewandt in der ihm in § 3, 1 gegebenen Gestalt) sofort gezeigt werden, daß die obige Aussage auch dann noch ihre Gültigkeit beibehält, wenn an Stelle des Gebietes $(T, |y| < \varrho')$ ein völlig beliebiger Bereich T der xy-Mannigfaltigkeit tritt. Wir sprechen demnach folgenden Satz aus:

---

*) Oder auch bloß für *irgend einen* von Null verschiedenen Wert von y (§ 2).

**) Siehe p. 13, Fußn. **).

Die Gesamtheit der x-Koordinaten eines Bereiches T *der xy-Mannigfaltigkeit sei mit* T *bezeichnet. Damit die Reihe* $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$, *deren Koeffizienten* $f_\nu(x)$ *für alle* x *des Bereiches* T *eindeutig definiert seien, im Bereiche* T, *in welchem sie durchweg konvergieren möge*), eine reguläre analytische Funktion von* (x, y) *darstelle, ist notwendig und hinreichend,*

a) daß die Koeffizienten $f_\nu(x)$ *im Bereiche* T *sämtlich reguläre analytische Funktionen von* x *seien,*

b) daß, sobald (x_0, y_0) *einen Punkt von* T *bedeutet, die Reihe* $S(x, y_0)$ *in der Umgebung der Stelle* $x = x_0$ *gleichmäßig konvergiere.**)*

Beweis. α) Die Bedingungen sind *hinreichend*. Ist nämlich (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt des Bereiches T, und wählt man y' ($|y'| > |y_0|$) so, daß der Punkt (x_0, y') dem Bereiche T ebenfalls noch angehöre, so gibt es, wenn die beiden angegebenen Bedingungen erfüllt sind, eine gewisse noch in T gelegene Umgebung $|x - x_0| \leqq \varrho$ des Punktes x_0, in welcher $S(x, y)$ für $y = y'$ und somit auch für $|y| < |y'|$ gleichmäßig konvergiert. Alsdann stellt aber gemäß Nr. 1 $S(x, y)$ eine in dem ganzen Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < |y'|$, speziell also in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) reguläre analytische Funktion von (x, y) dar.

β) Die Bedingungen sind *notwendig*. Ist nämlich wiederum (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt des Bereiches T und gehört das Gebiet $|x - x_0| < \varrho$, $|y - y_0| < \varrho'$ demselben ebenfalls noch an, so stellt, wenn $y = y_1$ irgend einen Punkt des Kreises $|y - y_0| < \varrho'$ bedeutet, $S(x, y)$ nach Voraussetzung eine speziell im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y - y_1| < \varrho' - |y_1 - y_0|$ reguläre analytische Funktion von (x, y) dar. Andererseits ist $S(x, y)$ für jeden der Bedingung $|x - x_0| < \varrho$ genügenden Wert von x eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe, welche nach Voraussetzung für $|y - y_0| < \varrho'$ und somit auch für $|y| < |y_0| + \varrho'$ konvergiert, speziell also eine im Gebiete $|y - y_1| < |y_0| + \varrho' - |y_1|$ reguläre analytische Funktion von y darstellt. Daraus folgt aber nach dem erwähnten Satze, daß $S(x, y)$ auch noch im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y - y_1| < |y_0| + \varrho' - |y_1|$ eine durchweg reguläre analytische Funktion von (x, y) darstellen muß.

*) Aus der Konvergenz von $S(x, y)$ für jeden Punkt (x_0, y_0) des Bereiches T folgt natürlich auch diejenige für alle Punkte (x_0, y) ($|y| < |y_0|$). Die Frage ist jedoch *nicht*, unter welchen Bedingungen $S(x, y)$ in diesem größeren Bereiche durchweg regulär ist (was bereits durch das Vorhergehende beantwortet wird), sondern gerade, unter welchen Bedingungen $S(x, y)$ in T regulär ist. Der Inhalt des vorliegenden Satzes ist nun, daß das letztere nicht eintreten kann, ohne daß auch zugleich das erstere stattfindet.

**) Nach § 2 kann b) wiederum ersetzt werden durch die Bedingung, daß zu jedem $x = x_0$ des Bereiches T ein beliebiger (von Null verschiedener) Wert y_0 existiere, derart, daß $S(x, y_0)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ gleichmäßig konvergiere.

Wählt man nun wieder einen beliebigen Punkt y des Gebietes

$$|y - y_1| < |y_0| + \varrho' - |y_1|$$

und bezeichnet denselben mit y_2, so ergibt die Wiederholung jener Schlußweise, daß $S(x, y)$ auch noch im Gebiete

$$|x - x_0| < \varrho, \quad |y - y_2| < |y_0| + \varrho' - |y_2|$$

eine durchweg reguläre analytische Funktion von (x, y) darstellt, usf. Man wird es nun stets so einrichten können, daß einer der Punkte y_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ mit dem Nullpunkt zusammenfällt. Ist nämlich y_0 nicht selbst schon gleich Null, so kann man, falls $\varrho' > |y_0|$ ist, $y_1 = 0$ wählen; ist aber $\varrho' \leqq |y_0|$, so erreicht man es leicht (z. B. indem man $y_1, y_2, \cdots$ so wählt, daß in der Reihe $|y_0|, |y_1|, \cdots$ jedes Glied mindestens um $\frac{1}{2}\varrho'$ kleiner ist als das vorhergehende), daß für irgend einen Wert von k: $2|y_{k-1}| < |y_0| + \varrho'$ wird, worauf es gestattet ist, $y_k = 0$ zu setzen. Nun verhält sich, wie nachgewiesen wurde, $S(x,y)$ im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y - y_k| < |y_0| + \varrho' - |y_k|$, d. h. für $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < |y_0| + \varrho'$ durchweg regulär, was nach Nr. 1 nur möglich ist, wenn die Funktionen $f_\nu(x)$ sämtlich im Kreise $|x - x_0| < \varrho$ regulär sind und die Reihe $S(x, y)$ für $|y| < |y_0| + \varrho'$ in der Umgebung jedes Punktes des genannten Kreises gleichmäßig konvergiert, speziell also für $y = y_0$ in der Umgebung des Punktes $x = x_0$, w. z. b. w.*)

3. Einen Überblick über die Gesamtheit der Stellen (x, y), für welche ein Ausdruck von der Form $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ eine reguläre analytische Funktion von (x, y) darstellt, kann man sich nach dem Vorigen nun in der folgenden Weise verschaffen.

Es bedeute $\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ eine beliebige nach positiven Potenzen von x und y fortschreitende Doppelreihe und (ϱ, ϱ') die Gesamtheit der Paare positiver, *von Null verschiedener* Zahlen, für welche $\mathfrak{P}(\varrho, \varrho')$

*) Der Satz läßt sich mit Hilfe des § 4 ohne Schwierigkeit auf den Fall ausdehnen, wo an Stelle von x und y mehrere Veränderliche treten, und kann alsdann folgendermaßen formuliert werden: Damit die Reihe $\sum_{\mu,\nu} f_{\mu\nu}(x, x') y^\mu y'^\nu$ in einem Bereiche T, in welchem sie absolut konvergiert, eine reguläre analytische Funktion der Veränderlichen x, x', y, y' darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß a) die Koeffizienten $f_{\mu\nu}(x, x')$ im betrachteten Gebiete durchweg reguläre analytische Funktionen von (x, x') seien, und daß b) sobald (x_0, x_0', y_0, y_0') einen Punkt von T bedeutet, die Reihe $\sum \left| f_{\mu\nu}(x, x') y_0^\mu y_0'^\nu \right|$ in der Umgebung des Punktes (x_0, x_0') gleichmäßig konvergiere.

absolut konvergiert; die obere Grenze R aller Werte ϱ, sowie die obere Grenze R' aller Werte ϱ' können alsdann etwa als die beiden *Maximalradien* des Bereiches der absoluten Konvergenz von $\mathfrak{P}(x, y)$ bezeichnet werden.*) Ist nun ϱ' irgend eine positive, der Bedingung $0 < \varrho' < R'$ genügende Zahl, so läßt sich stets eine zweite $\varrho > 0$ angeben, derart, daß $\mathfrak{P}(\varrho, \varrho')$ *absolut*, und daher $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x) y^\nu$ $\left(\text{wo } \mathfrak{P}_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu\right)$ für $y = \varrho'$ im Kreise $|x| \leqq \varrho$ *gleichmäßig* konvergiert; konvergiert umgekehrt $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x) y^\nu$ für irgend einen Wert y mit dem absoluten Betrage ϱ' in einem Kreise $|x| \leqq \varrho$ gleichmäßig, so konvergiert**) $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiete $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ absolut, und es ist infolgedessen $\varrho' \leqq R'$.

Soll nun die Reihe $S(x, y) = \Sigma f_\nu(x) y^\nu$ in der vollen Umgebung einer Stelle (x_0, y_0) konvergieren und eine daselbst reguläre analytische Funktion von x, y darstellen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Stelle eine gewisse Umgebung $\mathsf{T} = (|x - x_0| < \sigma,\ |y - y_0| < \sigma')$ besitze, für welche die in Nr. 2 genannten Bedingungen a) und b) erfüllt sind, d. h. also daß

a) der Punkt x_0 Mittelpunkt eines Kreises sei, in welchem die Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sich sämtlich regulär verhalten, und

b) ein Paar positiver Zahlen ϱ, ϱ' — und zwar $\varrho > 0$, $\varrho' > |y_0|$ — existiere, derart daß $S(x, \varrho')$ im Bereiche $|x - x_0| \leqq \varrho_1$ gleichmäßig konvergiere.***)

Bezeichnet man aber mit R'_x den y-Maximalradius derjenigen Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$, welche aus der Reihe $S(x, y)$ hervorgeht, wenn deren Terme nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden, so kann die Bedingung b) ersetzt werden durch die folgende:

b') $|y_0| < R'_{x_0}$.

Ist nämlich die Bedingung b') erfüllt, und wählt man ϱ' der Ungleichung $|y_0| < \varrho' < R'_{x_0}$ entsprechend, so konvergiert $S(x, \varrho')$ nach obigem

---

*) Konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ in keinem Punkte (x, y) absolut, dessen Koordinaten beide von Null verschieden sind, so sind R und R' gleich 0 zu setzen. Gibt es jedoch einen Punkt (x_0, y_0) jener Art, so sind R und R' beide von Null verschieden (nämlich $R \geqq |x_0|$, $R' \geqq |y_0|$) und $\mathfrak{P}(x, y)$ konvergiert jedenfalls in dem ganzen Gebiete $|x| \leqq |x_0|$, $|y| \leqq |y_0|$ absolut. Natürlich können R und R' auch unendlich groß sein.

**) Siehe p. 13, Fußn. **).

***) Der Inhalt der Bedingung b) kann, wie leicht zu sehen, auch so ausgedrückt werden, daß $S(x, y)$ in der vollen Umgebung des Punktes $x = x_0$, $y = y_0$ gleichmäßig (in bezug auf x und y) konvergiere.

in einem gewissen Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho$ gleichmäßig. Ist umgekehrt die Bedingung b) erfüllt, so muß $\varrho' \leqq R'_{x_0}$ und somit $|y_0| < R'_{x_0}$ sein.*)

4. Über die Größe R'_x seien noch folgende Bemerkungen hinzugefügt. Beschränkt man x auf solche Werte, welche der soeben fixierten Bedingung a) genügen, und bezeichnet ferner noch mit P'_x den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$, so kann das Ergebnis von § 2 in der folgenden Beziehung zwischen den Größen R'_x und P'_x zum Ausdruck gebracht werden:

Für jeden Wert $x = x_0$ der genannten Art ist entweder:

$$R'_{x_0} = 0 \quad \textit{oder} \quad R'_{x_0} = \varliminf_{x = x_0} \mathsf{P}'_x.^{**})$$

Verhalten sich nämlich sämtliche $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ im Kreise $|x - x_0| < \varrho$ noch regulär und bezeichnet man das Gebiet $0 < |x - x_0| < \varrho$ mit T, so erfüllt (vgl. § 2) einerseits die Gesamtheit der Werte y, für welche $S(x, y)$ in T durchweg konvergiert, einen Kreis um $y = 0$, dessen Radius $\mathsf{P}'_{(\varrho)}$ genannt sei, andererseits die Gesamtheit derjenigen Werte y, für welche $S(x, y)$ in der Umgebung jedes Punktes von T — und infolgedessen nach einem bekannten, von Herrn Runge***) bewiesenen Satze auch in der Umgebung jedes Punktes des vollen Gebietes $|x - x_0| < \varrho$ — *gleichmäßig* konvergiert, einen ebensolchen Kreis, dessen Radius $r'_{(\varrho)}$ heißen möge. Nach § 2 sind nun zwei Fälle möglich; entweder ist $r'_{(\varrho)} = 0$ oder

---

*) R'_{x_0} kann also auch als die obere Grenze der absoluten Beträge derjenigen Werte von y definiert werden, für welche $S(x, y)$ in einer (wenn auch noch so kleinen) Umgebung von $x = x_0$ gleichmäßig konvergiert. — Als Beispiel kann das p. 11, Fußn. *) behandelte dienen. Es ist dort $R'_x = 0$ für $x = i\nu$ $(\nu \geqq 0)$, sonst durchweg $R'_x = 1$. Zum Nachweise genügt es, noch folgende dritte Eigenschaft der Funktionen $g_n(x)$ zu benutzen: $|g_n(x)| < \left|\frac{1}{n(nx - 1)}\right| + \frac{1}{n}$, wenn gleichzeitig $|x| \leqq n$ und $|x - ti| \geqq \frac{2}{n}$ für jeden nicht negativen Wert von t ist. (l. c. p. 247.)

**) Über die Bedeutung dieses Grenzwertes vgl. Encykl. d. math. W. II A 1. Nr. 23. — Man überzeugt sich leicht davon, daß $\varliminf_{x=x_0} \mathsf{P}'_x$ und P'_{x_0} sehr wohl voneinander verschieden sein können. Ordnet man nämlich die Doppelreihe

$$\mathfrak{P}(x - x_0, y) = \sum_{\mu = 0}^{\infty} \mathfrak{Q}_\mu(y)(x - x_0)^\mu$$

nach Potenzen von $x - x_0$, so ist P'_{x_0} der Konvergenzradius von $\mathfrak{Q}_0(y)$, dagegen R'_{x_0} als Maximalradius nicht oberhalb des Konvergenzradius *irgend einer* Reihe $\mathfrak{Q}_\mu(y)$. Ist also R'_{x_0} von Null verschieden (und somit $R'_{x_0} = \varliminf_{x = x_0} \mathsf{P}'_x$) und hat eine der Reihen $\mathfrak{Q}_\mu(y)$ einen kleineren Konvergenzradius als die erste, so ist allemal $\varliminf_{x = x_0} \mathsf{P}'_x < \mathsf{P}'_{x_0}$.

***) Acta Math. 6 (1885), p. 247.

$r'_{(\varrho)} = \mathsf{P}'_{(\varrho)}$. Läßt man nun ϱ gegen 0 abnehmen, so kann es erstens eintreten, daß $r'_{(\varrho)}$ beständig gleich Null ist und daher auch

$$\lim_{\varrho=0} r'_{(\varrho)} = 0$$

wird. Oder aber $r'_{(\varrho)}$ ist für irgend einen Wert $\varrho = \varrho_0$ und daher a fortiori für jeden kleineren Wert von ϱ von Null verschieden, so daß für $\varrho \leqq \varrho_0$ beständig $r'_{(\varrho)} = \mathsf{P}'_{(\varrho)}$ und daher

$$\lim_{\varrho=0} r'_{(\varrho)} = \lim_{\varrho=0} \mathsf{P}'_{(\varrho)}$$

wird. Da nun $\mathsf{P}'_{(\varrho)}$ die untere Grenze aller Größen P'_x des Gebietes $0 < |x - x_0| < \varrho$ darstellt, so ist $\lim\limits_{\varrho=0} \mathsf{P}'_{(\varrho)}$ mit $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x$ gleichbedeutend; andererseits ist offenbar*) $\lim\limits_{\varrho=0} r'_{(\varrho)} = R'_{x_0}$ und somit das obige erwiesen.**)

Man kann nun noch folgendes zeigen:

*Die Gesamtheit der Stellen $x = x_0$, für welche R'_{x_0} nicht mit $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x$ übereinstimmt (d. h. für welche gleichzeitig $R'_{x_0} = 0$ und $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x > 0$ ist), erfüllt niemals einen Bereich T überall dicht.****) (Dabei wird, wie bisher, vorausgesetzt, daß die Funktionen $f_\nu(x)$ im betrachteten Gebiete sämtlich regulär seien.)

Verschwindet nämlich $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x$ für jeden Punkt $x = x_0$ von T, so gibt es in T überhaupt keine Stelle der obigen Art. Ist dagegen für irgend einen Punkt x_0 des Bereiches $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x > g > 0$, so gilt für alle x einer gewissen Umgebung $|x - x_0| < \varrho$ des Punktes x_0:

$$\mathsf{P}'_x \geqq g.$$

---

*) Vgl. z. B. p. 25, Fußn. *).

**) Bei dem p. 25, Fußn. *) erwähnten Beispiele gilt durchweg $\mathsf{P}'_x = 1$, und daher auch $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x = 1$ für jeden endlichen Wert x_0. Hingegen hat, wie bereits angeführt, R'_{x_0} längs der positiv imaginären Halbachse den Wert 0, sonst jedoch in Übereinstimmung mit $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x$ den Wert 1.

***) Hingegen können die Punkte x, für welche R'_x und P'_x *selbst* voneinander differieren, tatsächlich ein Gebiet überall dicht erfüllen. Setzt man nämlich

$$f_\nu(x) = 1 + \nu!\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right),$$

wo die Punkte $x_1, x_2, \cdots$ ein Gebiet überall dicht erfüllen mögen, so ist $\mathsf{P}'_x = 1$ für $x = x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$, dagegen für jeden endlichen Wert $x = x_0$ ist $\underline{\lim}_{x=x_0} \mathsf{P}'_x = 0$ und daher auch $R'_{x_0} = 0$. Denn bliebe in irgend einem Bereiche der x-Ebene P'_x oberhalb einer positiven Größe g, so würde $S(x, y)$ für $|y| < g$ in diesem Bereiche konvergieren, also nach § 11, 1 für hinreichend kleine $|y|$ auch in jedem vorgegebenen Bereiche der x-Ebene, während doch $S(0, y)$ offenbar für jeden von 0 verschiedenen Wert y divergiert.

Wählt man also y_0 der Bedingung $0 < |y_0| < g$ entsprechend, so konvergiert $S(x, y_0)$ durchweg im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$. In diesem letzteren gibt*) es aber alsdann notwendig einen Teilbereich B, in bezug auf welchen $S(x, y)$ sicher *gleichmäßig* konvergiert, solange $|y| < |y_0|$ ist. Für jeden inneren Punkt $x = x_0$ des Bereiches B gilt dann $R'_{x_0} > 0$, so daß B in seinem Inneren keinen Punkt der genannten Art enthält.

§ 6.

Die singulären Stellen auf der Begrenzung des Gebietes gleichmäßiger Konvergenz.

Nachdem festgestellt ist, unter welchen Bedingungen ein Ausdruck von der Form $S(x, y)$ eine reguläre analytische Funktion von (x, y) darstellt, ist nun auch die Frage mitbeantwortet, in welcher Ausdehnung eine vorgelegte analytische Funktion von (x, y) durch einen derartigen Ausdruck dargestellt werden kann. Es gilt nämlich:

Eine gegebene analytische Funktion $f(x, y)$ zweier Veränderlichen x, y läßt sich in einem vorgelegten Bereiche T *der xy-Mannigfaltigkeit, in welchem sie eindeutig definiert und durchweg regulär ist, dann und nur dann durch einen Ausdruck von der Form $S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu$ (in welchem die $f_\nu(x)$ beliebige von y unabhängige Größen bedeuten) darstellen, wenn die Fortsetzung derselben auch noch für alle Punkte (x', ky') eindeutig und regulär ist. Dabei soll (x', y') alle Punkte von* T, *k alle komplexen Zahlen durchlaufen, deren absoluter Betrag unterhalb* 1 *liegt.*

Daß die angegebene Bedingung *hinreichend* ist, ist selbstverständlich; denn ist sie erfüllt, so kann $f(x, y)$ für jeden der in Betracht kommenden Werte von x nach Potenzen der Größe y entwickelt werden, so daß man eine in T gültige Darstellung der verlangten Art erhält.**) Gibt es um-

*) Die Existenz eines Teilbereiches B, für welchen $S(x, y_0)$ *selbst* gleichmäßig konvergiert, ist durch Untersuchungen des Herrn Osgood dargetan worden (Ann. of Math. (2) 3 (1901) §§ 1—2). Verlangt man jedoch im Bereiche B bloß die gleichmäßige Konvergenz für $|y| < |y_0|$, so ergibt sich die Existenz desselben schon leicht durch die bloße Anwendung des bereits in § 3 (siehe p. 14, Fußn. **)) benutzten, von Herrn Osgood angegebenen Satzes über Punktmengen. Ist nämlich $x = x'$ irgend ein Punkt des betrachteten Gebietes, so befinden sich wegen der Konvergenz der Reihe $S(x', y_0)$ deren sämtliche Terme $f_\nu(x') y_0^\nu$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke $M(x')$. Bedeutet nun $P_i (i = 1, 2, \cdots)$ die Gesamtheit derjenigen Punkte $x = x'$, für welche $M(x') \leqq i$ ist, so muß es nach jenem Satze einen Teilbereich B geben, in welchem eine jener Punktmengen überall dicht ist, und dieser Bereich hat alsdann offenbar die verlangte Eigenschaft.

**) Dabei ergeben sich die Größen $f_\nu(x)$ notwendig als für alle x des Bereiches reguläre Funktionen, und die Reihe $\Sigma f_\nu(x) y^\nu$ konvergiert in der Umgebung jedes Punktes von T gleichmäßig (§ 5, 2).

gekehrt eine Darstellung dieser Art, so erfüllt $S(x, y)$ in jedem Punkte des Bereiches T und infolgedessen auch des angegebenen größeren Gebietes die beiden in § 5, 3 aufgestellten Bedingungen und stellt somit auch in diesem letzteren Gebiete eine durchweg reguläre analytische Funktion von (x, y) dar; somit ist die angegebene Bedingung auch eine *notwendige.*

Hieraus ergibt sich nun weiter die folgende Charakterisierung des Bereiches der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe $S(x, y)$ vermittelst der singulären Stellen der durch sie dargestellten analytischen Funktion:

1. *Besitzt der Punkt $x = x_0$ eine Umgebung $|x - x_0| < \varrho$, innerhalb welcher sämtliche $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sich regulär verhalten, und ist R'_{x_0} von Null verschieden, so besitzt der durch die Reihe $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ dargestellte Funktionszweig mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|y_0| = R'_{x_0}$ ist (dagegen keine, für welche $|y_0| < R'_{x_0}$ ist).*

Nach § 5, 3 verhält sich nämlich $S(x, y)$ an der Stelle $(x_0, 0)$ regulär und stellt somit eine in einem gewissen Gebiete $|x - x_0| < \varrho_0$, $|y| < \varrho_0'$ reguläre analytische Funktion $f(x, y)$ dar. Verhielte sich nun $f(x, y)$ etwa in einem Gebiete $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y| < R'_{x_0} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ ebenfalls noch durchweg regulär, so würde nach dem Vorigen $f(x, y)$ in dem letztgenannten Gebiete die Darstellung durch eine Reihe $S(x, y)$ gestatten, und diese müßte mit der vorliegenden offenbar identisch sein. Im Widerspruche hiermit kann jedoch (§ 5, 3) $S(x, y)$ nur für solche Stellen (x_0, y) regulär sein, für welche $|y| < R'_{x_0}$ ist. Mithin besitzt die Funktion $f(x, y)$ mindestens eine singuläre Stelle (x_1, y_1), welche der Bedingung $|x_1 - x_0| < \varepsilon$, $|y_1| < R'_{x_0} + \varepsilon$ genügt. Legt man nun der Größe ε eine Reihe gegen 0 abnehmender Werte bei, so befindet sich entweder unter den so erhaltenen singulären Stellen (x_1, y_1) eine, für welche $x_1 = x_0$, $|y_1| \leqq R'_{x_0}$ ist, oder aber die Zahl derselben ist unendlich groß und sie besitzen mindestens eine Häufungsstelle (x_0, y_0) $(|y_0| \leqq R'_{x_0})$, welche offenbar ebenfalls keine reguläre Stelle sein kann. Eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche geradezu $|y_0| < R'_{x_0}$ wäre, ist jedoch in allen Fällen gemäß § 5, 3 ausgeschlossen.

2. *Ist die Stelle $x = x_0$ Begrenzungsstelle eines Bereiches T, in welchem die Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sämtlich regulär sind und R_x' durchweg größer als Null ist, gibt es jedoch entweder keinen Kreis mit dem Mittelpunkt x_0, in welchem die Funktionen $f_\nu(x)$ noch sämtlich regulär sind, oder aber ist $R'_{x_0} = 0$, so ist die Stelle $(x_0, 0)$ für den durch $S(x, y)$ dargestellten Funktionszweig eine singuläre.*

Im Gebiete $\mathsf{T} = (T, |y| < R_x')$*) nämlich stellt $S(x, y)$ sicher eine

*) Daß dies wirklich ein Bereich T ist, erhellt daraus, daß, wenn irgend ein

durchweg reguläre analytische Funktion $f(x, y)$ dar. Würde nun eine nach Potenzen von $x - x_0$ und y fortschreitende, in einem gewissen Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ absolut konvergierende Doppelreihe

$$\mathfrak{P}(x - x_0, y) = \sum_\nu \mathfrak{P}_\nu(x - x_0) y^\nu$$

existieren, welche für diejenigen Punkte dieses Gebietes, welche gleichzeitig dem Bereiche T angehören, mit $f(x, y)$ übereinstimmte, so könnten die bei der Entwickelung von $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ nach Potenzen von y auftretenden Koeffizienten $\mathfrak{P}_\nu(x - x_0)$ offenbar nichts anderes als die Entwickelungen der Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ sein; die Funktionen $f_\nu(x)$ müßten sich somit im Kreise $|x - x_0| < \varrho$ sämtlich regulär verhalten, was in dem einen Falle der Voraussetzung widerspricht. In dem anderen Falle aber wäre dann weiterhin R'_{x_0} identisch mit dem y-Maximalradius der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$, und daher $R'_{x_0} \geqq \varrho'$, während nach Voraussetzung $R'_{x_0} = 0$ sein sollte. Es gibt demnach in beiden Fällen keine Doppelreihe der genannten Art und damit ist die Behauptung erwiesen.

Die letztere Aussage kann noch erheblich vervollständigt werden, wenn man eine Eigenschaft der Größe R_x' benutzt, welche, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, erst im folgenden Paragraphen bewiesen werden soll und folgendermaßen lautet:

Gilt für alle Punkte x eines Bereiches T: $R'_{x_0} \geqq p$, wo p eine positive Größe bezeichnet, und ist x_0 irgend ein Begrenzungspunkt von T, so gilt entweder $R'_{x_0} \geqq p$ oder $R'_{x_0} = 0$. (Dabei wird selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Funktionen $f_\nu(x)$ in einem gewissen Kreise mit dem Mittelpunkt x_0 sämtlich regulär seien.)

Der obige Satz 2 kann alsdann durch den folgenden ersetzt werden:

2ª. *Ist die Stelle $x = x_0$ Begrenzungsstelle eines Bereiches T, in welchem die Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sämtlich regulär sind und R_x' durchweg größer als die Zahl $p \geqq 0$ bleibt, gibt es jedoch entweder keinen Kreis mit dem Mittelpunkt x_0, in welchem die $f_\nu(x)$ noch sämtlich regulär sind, oder aber ist $R'_{x_0} = 0$*), so sind die sämtlichen Stellen (x_0, y) $(|y| \leqq p)$ für den durch $S(x, y)$ dargestellten Funktionszweig singuläre.***)

Punkt (x_0, y_0) demselben angehört, die Funktion in der vollen Umgebung desselben regulär ist, also auch letztere dem Bereich noch angehört.

*) Nach dem Vorstehenden genügt es auch schon zu wissen, daß $R'_{x_0} < p$ sei.

**) Offenbar erhält man eine etwas allgemeinere Fassung des Satzes, wenn man die Voraussetzung durch diejenige des Satzes 2 ersetzt und dann p als $\varliminf\limits_{x=x_0} R_x'$ (wobei x nur solche Werte annehmen soll, welche dem Bereiche T angehören) einführt.

Für *Potenzreihen* $\mathfrak{P}(x, y)$ *zweier Veränderlichen* ergeben sich aus dem Satze

Beweis. Die Reihe $S(x, y)$ stellt eine im Gebiete $(S, |y| < p)$ durchweg reguläre analytische Funktion $f(x, y)$ dar, für welche nach Satz 2 die Stelle $(x_0, 0)$ eine singuläre ist. Ist nun $y = y_1$ irgend ein Wert, dessen absoluter Betrag unterhalb $\frac{1}{2}p$ liegt, so kann nach dem ersten Satze dieses Paragraphen die Funktion $f(x, y)$ im Gebiete

$$(T, |y - y_1| < p - |y_1|),$$

in welchem sie durchweg regulär ist, durch eine Reihe von der Form

$$\bar{S}(x, y - y_1) = \sum_\nu \bar{f}_\nu(x)\,(y - y_1)^\nu$$

dargestellt werden, und für diese gilt alsdann (§ 5, 3) notwendig $\bar{R}'_x \geqq p - |y_1|$*), solange x dem Bereiche T angehört. Nun sind zwei Fälle möglich. Entweder gibt es keinen Kreis mit dem Mittelpunkt x_0, in welchem alle Funktionen $\bar{f}_\nu(x)$ noch regulär sind; alsdann ist nach Satz 2 die Stelle (x_0, y_1) eine singuläre. Oder aber es gibt einen derartigen Kreis; alsdann ist aber (wiederum nach § 5, 3) sicher $\bar{R}'_{x_0} \leqq |y_1|$, da ja $f(x, y)$ die singuläre Stelle $(x_0, 0)$ besitzt. Es galt aber im ganzen Bereich $T: \bar{R}'_x \geqq p - |y_1|$ und diese beiden Aussagen vertragen sich, da $|y_1| < p - |y_1|$ ist, nach der vorher erwähnten Eigenschaft der Größe R'_x nur dann miteinander, wenn geradezu $\bar{R}'_{x_0} = 0$ ist, so daß nach Satz 2 auch in *diesem* Falle (x_0, y_1) eine singuläre Stelle sein muß.

Nachdem festgestellt ist, daß jede Stelle (x_0, y_1) $\left(|y_1| < \frac{1}{2}p\right)$ eine singuläre ist, kann man nun, von einer solchen aus weiter schließend, das gleiche für jede Stelle (x_0, y_2) nachweisen, für welche $|y_2 - y_1| < p - |y_2|$ ist, also durch passende Wahl von y_1 für irgend einen gegebenen Wert y_2, welcher der Bedingung $\frac{1}{2}p \leqq |y_2| < \frac{3}{4}p$ genügt, usf. Mithin ist not-

nachstehende Folgerungen (vgl. dazu d. Verf. I.-D., München 1903, § 19): Konvergiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ in einem Gebiete $|x| < r$, $|y| < r'$ absolut, besitzt jedoch die durch $\mathfrak{P}(x, y)$ dargestellte analytische Funktion eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|x_0| = r$, $|y_0| < r'$ ist, so sind auch die *sämtlichen* Stellen (x_0, y) $(|y| \leqq r')$ singuläre, und r ist daher notwendig der *Maximalradius* in der x-Ebene (§ 5, 3, p. 24). Denn ordnet man $\mathfrak{P}(x, y)$ nach Potenzen von y, so ist für die so entstehende Reihe $S(x, y)$ einerseits $R'_x \geqq r'$ für $|x| < r$, andererseits $R'_{x_0} \leqq |y_0|$, falls überhaupt x_0 Mittelpunkt eines Kreises ist, in welchem die Funktionen $f_\nu(x)$ noch sämtlich regulär sind; hieraus folgt aber in jedem Falle das Behauptete. Ist umgekehrt $r = R$ der x-Maximalradius einer Potenzeihe $\mathfrak{P}(x, y)$, so gibt es notwendig eine singuläre Stelle $(x_0, 0)$, für welche $|x_0| = R$ ist; konvergiert also $\mathfrak{P}(x, y)$ noch in einem Gebiete $|x| < R$, $|y| < r'$ absolut, so sind auch die sämtlichen Stellen (x_0, y) $(|y| \leqq r')$ singuläre.

*) Die auf die Reihe $\bar{S}(x, y - y_1)$ bezügliche Größe R'_x ist mit $\bar{R}'_x$ bezeichnet.

wendig jede Stelle (x_0, y) $(|y| < p)$ und daher auch jede Stelle (x_0, y) $(|y| \leqq p)$ eine singuläre.*)

§ 7.

Eigenschaften der Größe R'_x: Beziehung zwischen ihren Werten im Innern eines Bereiches T und denjenigen auf der Begrenzung desselben.

1. Wir setzen bei allen noch folgenden Betrachtungen stillschweigend voraus, daß die Koeffizienten $f_\nu(x)$ der Reihe $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ für alle vorkommenden Teile der x-Ebene eindeutig und regulär seien, so daß zu jedem in Frage kommenden Punkte x stets ein bestimmter Wert R_x' existiert, welcher Null oder größer als Null sein kann.

An der Stelle $x = x_0$ habe R_x' den Wert p_0. Jeder vorgegebenen Größe $\varepsilon > 0$ läßt sich alsdann eine zweite $\delta > 0$ derart zuordnen, daß $R_x' \geqq p_0 - \varepsilon$ ist, solange nur $|x - x_0| < \delta$ bleibt. Ist $p_0 = 0$, so ist dies selbstverständlich. Ist aber $p_0 > 0$, so konvergiert — $\varepsilon < p_0$ vorausgesetzt — die Reihe $S(x, p_0 - \varepsilon)$ in einem gewissen Kreise $|x - x_0| \leqq \delta$ gleichmäßig, woraus hervorgeht, daß $R_x' \geqq p_0 - \varepsilon$ ist, solange x im Innern jenes Kreises liegt. Da sonach diese Teilbedingung der Stetigkeit für die Größe R_x' unter allen Umständen erfüllt ist — um einen kurzen Ausdruck dafür zur Hand zu haben, sei diese Eigenschaft von R_x' im folgenden stets als „einseitige Stetigkeit" bezeichnet —, so wird es sich

---

*) Beispiel für den ersten Fall: $S(x, y) = e^{\frac{y}{x}} = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$, wo $f_\nu(x) = \frac{1}{\nu!\, x^\nu}$. Wählt man als Bereich T die x-Ebene mit Ausschluß des Punktes $x = 0$, so ist R'_x in T durchweg unendlich groß und mithin *jede* Stelle $(0, y)$ eine singuläre.

Als Beispiel für den zweiten Fall kann man $f_\nu(x) = (x^2 - 4)^{\nu^2}$ wählen; es ist alsdann $R'_x = \infty$ für $|x^2 - 4| < 1$ (also in zwei getrennten Gebieten der x-Ebene), sonst überall $R'_x = 0$. Es ist daher jede beliebige Stelle (x_0, y) eine singuläre, für welche $|x_0{}^2 - 4| = 1$ ist, woraus hervorgeht, daß $S(x, y) = \sum (x^2 - 4)^{\nu^2} y^\nu$ in den beiden getrennten Gebieten je eine analytische Funktion in ihrer ganzen Ausdehnung darstellt. — Als Illustration für den zweiten Fall kann auch das Beispiel p. 11, Fußn. *) (vgl. p. 25, Fußn. *)) dienen; da R'_x für $x = iv$ $(v \geqq 0)$ gleich Null, sonst überall gleich 1 ist, so ist jede Stelle (iv, y) $(v \geqq 0, |y| \leqq 1)$ eine singuläre. Definiert man abweichend $f_\nu(x) = [3 g_\nu(x)]^{\nu^2} + [3 g_\nu(-x)]^{\nu^2}$, wo $g_\nu(x)$ nach wie vor die Rungeschen Funktionen darstellen soll, so wird R'_x längs der ganzen imaginären Achse gleich 0, jedoch außerhalb derselben unendlich groß; es ist also *jede* beliebige Stelle (iv, y) bei reellem v eine singuläre, und somit stellt die Reihe $S(x, y)$, welche hier für alle endlichen Werte der beiden Veränderlichen konvergiert, wiederum zwei analytische Funktionen (deren Existenzbereiche längs der genannten singulären Stellen aneinander grenzen) in ihrer ganzen Ausdehnung dar.

bei weiteren Untersuchungen über die Stetigkeit von R_x' nur um die noch übrig bleibende Frage handeln, ob sich jeder Größe $\varepsilon > 0$ auch stets eine zweite $\delta' > 0$ derart zuordnen läßt, daß für alle $|x - x_0| < \delta'$ die Ungleichung $R_x' \leqq p_0 + \varepsilon$ befriedigt wird; dann und nur dann, wenn auch diese zweite Bedingung erfüllt ist, wird R_x' in $x = x_0$ stetig sein.

Daß nun diese letztgenannte Bedingung — und zwar in dem speziellen Falle $p_0 = 0$ — *nicht* immer erfüllt zu sein braucht, dafür haben sich bereits mehrere Beispiele ergeben.*) Ein sehr allgemeines Beispiel dieser Art liefert die Theorie der Potenzreihen zweier Veränderlichen. Bezeichnet man nämlich die größte positive Zahl r', welche die Eigenschaft besitzt, daß die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiete $|x| < r$, $|y| < r'$ noch absolut konvergiert, als den *zu r assoziierten Konvergenzradius* $r' = \varphi(r)$**) und betrachtet man andererseits die durch Ordnen von $\mathfrak{P}(x, y)$ nach Potenzen von y entstehende Reihe $S(x, y) = \sum_\nu \mathfrak{P}_\nu(x) y^\nu$, so fällt r' stets mit der unteren Grenze aller Größen R_x' des Gebietes $|x| < r$ zusammen.***) Ist nun R der *Maximalradius* von $\mathfrak{P}(x, y)$ in der x-Ebene (§ 5, 3) und nimmt man des weiteren an, erstens, daß die Konvergenzradien sämtlicher Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ die Größe R mindestens um eine bestimmte positive Größe h übertreffen, und zweitens, daß der zu R assoziierte Radius r' noch größer als 0 sei (so daß also $\mathfrak{P}(x, y)$ noch in einem Gebiete $|x| < R$, $|y| < r'$ absolut konvergiert), so ist nach dem Gesagten $R_x' \geqq r'$, solange $|x| < R$ bleibt, dagegen muß es allemal mindestens einen Wert $x = x_0$ mit dem absoluten Betrage R geben, für welchen $R'_{x_0} = 0$ ist †)

Gerade dieses letztere Beispiel wäre nun aber auch geeignet, den Anschein zu erwecken, als ob eine Unstetigkeit von R_x' überhaupt *nur* an solchen Stellen x eintreten könnte, für welche R_x' den Wert 0 besitzt.

---

*) Vgl. p. 31, Fußn. *).

**) Bezeichnet wiederum R den Maximalradius von $\mathfrak{P}(x, y)$ in der x-Ebene, so ist $r' > 0$ für $r < R$, $r' = 0$ für $r > R$. (Vgl. über diesen Gegenstand § 12.)

***) Denn für die absolute Konvergenz der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ in einem Gebiete $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ ist die gleichmäßige Konvergenz von $S(x, y)$ für jeden der Bedingung $|y| < \varrho'$ genügenden Wert y in der Umgebung jedes Punktes x des Gebietes $|x| < \varrho$ sowohl notwendig als auch hinreichend. (Siehe p. 13, Fußn. **).)

†) Denn für jeden Kreis $|x| < R + \delta$ $(\delta > 0)$ muß die untere Grenze aller Größen R_x' gleich Null sein, das Gebiet $|x| \leqq R + \delta$ muß daher einen Punkt x_1 enthalten, in dessen Umgebung R_x' beliebig kleine Werte annimmt, was wegen der einseitigen Stetigkeit von R_x' nur möglich ist, wenn $R'_{x_1} = 0$ ist. Läßt man δ beliebig klein werden, so muß aus dem nämlichen Grunde R_x' auch für die Häufungsstelle x_0 $(|x_0| = R)$ der Punkte x_1 den Wert 0 besitzen. — **Beispiel:** Wählt man $\mathfrak{P}_\nu(x) = x^{\nu^2}$, so ist $R = 1$; für $|x| < 1$ ist $R_x' = \infty$, für $|x| \geqq 1$ dagegen $R_x' = 0$.

Nach der Theorie der Potenzreihen zweier Veränderlichen nämlich ist $r' = \varphi(r)$ für alle der Bedingung $0 < r < R$ genügenden Werte von r stetig*), und daher kann die untere Grenze der Größen R_x' des Gebietes $|x| < r$ bei wachsendem r nur stetig abnehmen, mit der eventuellen Ausnahme einer bei $r = R$ eintretenden plötzlichen Abnahme auf den Wert 0. Dieses Verhalten von R_x' läßt sich schärfer noch folgendermaßen formulieren: Ist im Innern eines beliebigen Kreises $|x| < r$ durchweg $R_x' \geqq p > 0$, und besitzt R_x' an irgend einer Stelle $x = x_0$ der Peripherie desselben einen *unterhalb* p gelegenen Wert p_0, *so kann derselbe nur gleich* 0 *sein.***)

Wenn nun, wie man hiernach leicht annehmen könnte, die Größe R_x' überhaupt nur an solchen Stellen unstetig sein könnte, an welchen sie den Wert 0 besitzt, so bedürfte der bereits in § 6 (p. 29) herangezogene Satz über die Größe R_x' (von welchem der soeben ausgesprochene offenbar nur ein Spezialfall ist) und ebenso einige weitere Sätze von der nämlichen Art, die wir an ihn knüpfen werden, keines Beweises mehr. Es soll daher zuvörderst an einem Beispiele der Nachweis geführt werden, daß die Größe R_x' auch an einer Stelle $x = x_0$, an welcher sie von Null verschieden ist, (und in deren Umgebung sie folglich ebenfalls von Null verschieden bleibt,) sehr wohl eine Unstetigkeit besitzen kann.

2. Mit $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_\varkappa = c$ sei eine beliebig gewählte konvergente Reihe mit positiven Termen bezeichnet und es werde gesetzt:

$$f_\nu(x) = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_\varkappa}\right)^{\alpha_\varkappa^{(\nu)}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

Dabei sollen die Größen $x_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots)$ sämtlich der Bedingung $0 < |x_\varkappa| < 1$ genügen und im übrigen nur der Beschränkung unterworfen sein, daß sich unter ihren Häufungsstellen die Stelle $x = 0$ befinde, während $\alpha_\varkappa^{(\nu)}$ die größte nicht oberhalb $\nu c_\varkappa |x_\varkappa|$ gelegene ganze Zahl be-

*) Näheres sowie Literatur hierüber vgl. § 12, 3.

**) Denn betrachtet man die Doppelreihe $\mathfrak{P}\left(x - \frac{x_0}{2}, y\right)$, welche aus $S(x, y)$ entsteht, wenn sämtliche $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - \frac{x_0}{2}$ entwickelt werden, so ist einerseits der zu $\frac{r}{2}$ assoziierte Radius mindestens p, hingegen der zu $\frac{r}{2} + \delta$ assoziierte Radius — wie klein auch $\delta > 0$ gewählt sei — höchstens p_0, und infolgedessen notwendig gleich 0. Die untere Grenze aller R_x' jedes Gebietes $\left|x - \frac{x_0}{2}\right| < \frac{r}{2} + \delta$ ist mithin gleich 0 und es gibt also in beliebiger Nähe von $x = x_0$ Punkte, für welche R_x' beliebig klein ist, was wegen der einseitigen Stetigkeit von R_x' nur möglich ist, wenn $R_{x_0}' = 0$ ist.

deute. Da für jeden Wert von ν stets nur eine *endliche* Anzahl von Exponenten $\alpha_\varkappa^{(\nu)}$ von Null verschieden ausfallen können, so sind die $f_\nu(x)$ sämtlich ganze rationale Funktionen.

Für jeden Wert von ν hat man $f_\nu(0) = 1$ und somit liegt jedenfalls R_x' für den Punkt $x = 0$ nicht oberhalb 1. Andererseits gilt, solange $|x| \leqq 1$ ist:

$$(1) \quad |f_\nu(x)| = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x}{x_\varkappa}\right|^{\alpha_\varkappa^{(\nu)}} \leqq \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{|x_\varkappa|}\right)^{\nu c_\varkappa |x_\varkappa|} \leqq \prod_{\varkappa=1}^{\infty} e^{\nu c_\varkappa} = e^{\nu c}$$

(und zwar behält, wie sogleich angemerkt werde, diese Beziehung ihre Gültigkeit auch dann noch bei, wenn auf der linken Seite einzelne Faktoren des Produktes gestrichen werden). Die Reihe $\sum\limits_\nu f_\nu(x) y^\nu$ konvergiert also, solange $|y| < e^{-c}$ ist, im Kreise $|x| \leqq 1$ sicher gleichmäßig und es ist somit $R_x' \geqq e^{-c}$ für jeden Wert x, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist.

Während demnach R_x' im ganzen Gebiete $|x| < 1$ von Null verschieden, im Punkte $x = 0$ jedoch keinesfalls oberhalb 1 gelegen ist, nimmt R_x' doch in beliebiger Nähe des Punktes $x = 0$ beliebig große Werte an. Ist nämlich b eine beliebige positive Größe und beschreibt man um einen der Punkte $x_\varkappa$, welcher x_k genannt werde, einen so kleinen Kreis, daß für jeden Punkt x desselben

$$\left|1 - \frac{x}{x_k}\right| \leqq e^{-\frac{b+c}{c_k |x_k|}},$$

so ergibt sich, solange x diesem Kreise angehört,

$$\left|1 - \frac{x}{x_k}\right|^{\alpha_k^{(\nu)}} \leqq e^{-\frac{b+c}{c_k|x_k|}\{\nu c_k |x_k| - 1\}} = e^{-(b+c)\left\{\nu - \frac{1}{c_k|x_k|}\right\}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

und da ferner nach (1) die Beziehung

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x}{x_\varkappa}\right|^{\alpha_\varkappa^{(\nu)}} \leqq e^{\nu c}$$

auch bei Streichung des dem Werte $\varkappa = k$ entsprechenden Faktors gilt, durch Multiplikation schließlich:

$$|f_\nu(x)| \leqq e^{-b\nu + \frac{b+c}{c_k|x_k|}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Bezeichnet man die rechte Seite der letzteren Ungleichung mit g_ν, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_\nu g_\nu y^\nu$ für $|y| < e^b$ und somit konvergiert auch

$\sum\limits_{\nu} f_\nu(x) y^\nu$ für $|y| < e^b$ im betrachteten Kreise gleichmäßig; es ist also für jeden Punkt x im Innern desselben R_x' mindestens gleich e^b.

Hiermit ist, da b z. B. gleich 1 gewählt werden konnte und da sich ein derartiger Kreis um jeden der Punkte $x_\varkappa$ beschreiben läßt, die Unstetigkeit von R_x' im Punkte $x = 0$ nachgewiesen. Da es überdies freistand, die Punkte $x_\varkappa$ speziell so zu wählen, daß sie den Einheitskreis überall dicht erfüllen, so zeigt sich, daß die Kreise, innerhalb welcher $R_x' \geqq e^b$ bleibt, *die ganze Umgebung des Punktes* $x = 0$ (für welchen selbst $0 < R_x' \leqq 1$ galt) *überall dicht erfüllen können.* Endlich ist daraus, daß b beliebig groß gewählt werden konnte, noch ersichtlich, daß R_x' für die Punkte $x_\varkappa$ selbst den Wert unendlich besitzen muß und daß also R_x' für alle Punkte einer Menge, welche die Umgebung von $x = 0$ überall dicht erfüllt, auch unendlich groß sein kann. Andererseits ist aber die Unstetigkeit von R_x' durchaus nicht an die Bedingung geknüpft, daß in der Umgebung unendlich große Werte von R_x' vorkommen; denn ersetzt man z. B. bei dem obigen Beispiel die $f_\nu(x)$ mit ungeradem Index ν durch $\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$, so nimmt die Größe R_x' in jedem Punkte, in welchem ihr Wert früher oberhalb 2 lag, nunmehr den Wert 2 an.

3. Wenn nun auch, wie dies Beispiel zeigt, selbst im Falle $R'_{x_0} > 0$ diejenigen Gebiete, innerhalb welcher R'_x den Wert R'_{x_0} um eine bestimmte endliche Größe übertrifft, die ganze Umgebung des Punktes $x = x_0$ überall dicht erfüllen können, so unterliegen dieselben, falls R'_{x_0} größer als Null ist, doch sehr erheblichen Beschränkungen. Es soll in dieser Hinsicht zunächst gezeigt werden, daß jene Gebiete niemals einen Bereich T ausmachen können, welcher den Punkt x_0 als Begrenzungspunkt besitzt, und wir sprechen demnach den folgenden (bereits in § 6 benutzten) Satz aus:

*Gilt für alle Punkte x eines Bereiches T $R'_x \geqq p$, wo p eine positive Größe bezeichnet, und ist x_0 irgend ein Begrenzungspunkt von T, so gilt entweder $R'_{x_0} \geqq p$ oder $R'_{x_0} = 0$.**)

---

*) Der Satz kann offenbar auch folgendermaßen ausgesprochen werden: Ist x_0 Begrenzungspunkt eines beliebigen Bereiches T, so ist entweder $R'_{x_0} = \underline{\lim}_{x=x_0} R'_x$ (wo x nur Werte annehmen soll, welche dem Bereiche T angehören) oder $R'_{x_0} = 0$. (Denn ein *größerer* Wert von R'_{x_0} als der zuerst angegebene ist infolge der einseitigen Stetigkeit ausgeschlossen.) — Hat speziell der Punkt x_0 eine solche Lage, daß sich durch ihn die Peripherie eines Kreises legen läßt, dessen Inneres vollständig zu T gehört, so läßt sich die Richtigkeit der Behauptung, wie in Nr. 1 näher ausgeführt, mit Hilfe des Satzes von der stetigen Abhängigkeit der assoziierten Radien dartun. Ist ferner x_0 die Ecke eines geradlinigen Dreiecks, dessen Inneres vollständig zu T gehört, so kann man die Behauptung leicht mit Hilfe der in § 8, 2 sowie in § 12, 2 abgeleiteten Grundeigenschaft der assoziierten Radien erweisen.

Den Beweis dieses Satzes zerlegen wir in mehrere Teile und formulieren dementsprechend die folgenden einzelnen Sätze:

a) *Seien p_0, p_1, p_2 drei positive Größen, welche den Bedingungen $p_0 < p_1 < p_2$ und $p_1^2 < p_0 p_2$ genügen mögen. Besitzt alsdann die (im betrachteten Gebiete durchweg eindeutige und reguläre) Funktion $f(x)$ die folgenden drei Eigenschaften:*

(1) $|f(x)| < \frac{1}{p_0}$ für $|x - x_0| \leqq A$

(2) $|f(\gamma)| > \frac{1}{p_1}$, wo γ ein gewisser der Bedingung $|\gamma - x_0| < \frac{1}{10} A$ genügender Wert, und

(3) $|f(x)| < \frac{1}{p_2}$ für alle Punkte x einer gewissen Linie L*), welche zwei Punkte $x = b$ und $x = c$ miteinander verbinden möge,

und setzt man:

$$g(x') = \left(1 - \frac{x'}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x'}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x'}{\alpha_l}\right),$$

wo $x' = x - \gamma$ ist und $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ die absoluten Beträge derjenigen Nullstellen $x' = a_1, a_2, \cdots, a_l$ der Funktion $f(x)$ bedeuten, welche dem Kreise $|x'| \leqq \frac{1}{5} A$ angehören (eine jede so oft aufgeführt, als ihre Ordnungszahl beträgt), so besitzt $g(x')$ folgende drei Eigenschaften:

(1a) $|g(x')| < \frac{p_1}{p_0}$ für $|x'| \leqq \frac{1}{2} A$

(2a) $g(0) = 1$

(3a) $|g(x')| < \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$ für alle *positiven* Werte von x' unterhalb $\frac{1}{25} A$, welche zugleich dem Intervall $|b - \gamma|$ bis $|c - \gamma|$ angehören (falls es solche Werte überhaupt gibt).

Beweis. Setzt man

$$f(x) = f(\gamma)\left(1 - \frac{x'}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x'}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x'}{a_l}\right) \bar{f}(x'),$$

so ist auch $\bar{f}(x')$ im betrachteten Gebiete eindeutig und regulär und besitzt überdies keine dem Kreise $|x'| \leqq \frac{1}{5} A$ angehörende Nullstelle.

---

*) Es genügt die Betrachtung solcher Linien L, welche aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzt sind.

Da $\bar{f}(0) = 1$ ist, so gibt es sicher einen Wert $x' = x_1'$ mit dem absoluten Betrage $\frac{9}{10}\mathsf{A}$, für welchen $|\bar{f}(x_1')| \geqq 1$ und somit (da $|x_1' + \gamma - x_0| \leqq \mathsf{A}$):

$$\prod_{\lambda=1}^{l} \left| 1 - \frac{x_1'}{\alpha_\lambda} \right| \leqq \frac{p_1}{p_0}$$

gilt. Daraus folgt aber wegen der für alle $|x'| \leqq \frac{1}{2}\mathsf{A}$ bestehenden Ungleichung

$$|x' - \alpha_\lambda| \leqq \frac{1}{2}\mathsf{A} + \alpha_\lambda \leqq \frac{9}{10}\mathsf{A} - \alpha_\lambda \leqq |x_1' - \alpha_\lambda|$$

unmittelbar die Beziehung (1a).

Ferner hat man, solange x' den absoluten Betrag $\frac{9}{10}\mathsf{A}$ besitzt, sicher $\left| 1 - \frac{x'}{\alpha_\lambda} \right| > 1$, infolgedessen

$$|\bar{f}(x')| \leqq \frac{p_1}{p_0}$$

und daher gilt dies auch für $|x'| \leqq \frac{9}{10}\mathsf{A}$. Mithin ist die im Gebiete $|x'| \leqq \frac{1}{5}\mathsf{A}$ harmonische Funktion $\log \frac{p_1}{p_0} - \log |\bar{f}(x')|$ daselbst auch durchweg positiv, und da ihr Wert im Zentrum $\log \frac{p_1}{p_0}$ beträgt, so gilt für $|x'| \leqq \frac{1}{25}\mathsf{A}$:

$$\log \frac{p_1}{p_0} - \log |\bar{f}(x')| \leqq \frac{\frac{1}{5}\mathsf{A} + \frac{1}{25}\mathsf{A}}{\frac{1}{5}\mathsf{A} - \frac{1}{25}\mathsf{A}} \log \frac{p_1}{p_0} = \frac{3}{2} \log \frac{p_1}{p_0}$$

und somit

$$|\bar{f}(x')| \geqq \sqrt{\frac{p_0}{p_1}} \geqq \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Gibt es also Werte von x, welche gleichzeitig der Linie L und dem Gebiete $|x'| \leqq \frac{1}{25}\mathsf{A}$ angehören, so hat man für diese:

$$\prod_{\lambda=1}^{l} \left| 1 - \frac{x'}{\alpha_\lambda} \right| = \frac{|f(x)|}{|f(\gamma)| \cdot |\bar{f}(x')|} < \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

also a fortiori:

$$\prod_{\lambda=1}^{l} \left| 1 - \frac{|x'|}{\alpha_\lambda} \right| < \sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

worin aber die Aussage (3a) sicher enthalten ist.*) Die Gleichung (2a) endlich bedarf keines Beweises.

---

*) Denn während x die Linie L durchläuft, nimmt $|x'|$ sicher jeden Wert des Intervalls $|b - \gamma|$ bis $|c - \gamma|$ an.

b) *Es seien q und Q zwei positive Größen, welche der Bedingung $0 < q < 1 < Q$ genügen. Nach Annahme eines beliebigen Wertes $\delta > 0$ gibt es alsdann stets einen zweiten $\varepsilon > 0$ derart, daß eine jede für alle x des Gebietes $|x| \leqq C$ reguläre Funktion $G(x)$, welche (bei geeigneter Wahl der positiven Zahl ν) die beiden Eigenschaften*

$$|G(x)| \leqq Q^\nu \quad \text{für } |x| \leqq C$$

und

$$|G(x)| \leqq q^\nu \quad \text{für alle } \textit{positiven} \text{ Werte von } x \text{ unterhalb } C$$

besitzt, die Ungleichung

$$|G(x)| \leqq q^{(1-\delta)\nu}$$

für alle $|x| < \varepsilon$ befriedigt.

Beweis. Wir fassen dasjenige — etwa als Kreissektor mit der Öffnung 2π zu bezeichnende — Gebiet der x-Ebene ins Auge, welches aus dem Kreise $|x| \leqq C$ hervorgeht, wenn ein radialer Schnitt vom Punkte $x = 0$ aus nach dem Punkte $x = C$ geführt wird und die beiden Ufer desselben als Bestandteile des Randes angesehen werden. Das so entstehende Gebiet läßt sich, wie leicht zu übersehen*), auf unendlich mannigfache Art eineindeutig und stetig auf die volle Fläche des Einheitskreises einer zweiten (X-)Ebene derart abbilden, daß jedem Rand- bzw. inneren Punkte wieder ein ebensolcher entspricht, und daß die Abbildung für die Umgebung jedes inneren Punktes eine konforme ist. Es möge eine bestimmte derartige Abbildung ein für allemal ausgewählt und diejenigen drei Punkte der X-Ebene, welche dabei den drei Ecken $x = 0$, $x = C + 0i$, $x = C - 0i$ des Sektors entsprechen, bezüglich mit $e^{\alpha i}$, $e^{\beta i}$, $e^{\gamma i}$ bezeichnet werden, wobei, da die Größen α, β, γ nur bis auf additive Vielfache von 2π bestimmt sind, $\gamma < \alpha < \beta < \gamma + 2\pi$ angenommen werden kann.

Die Möglichkeit einer konformen Abbildung der besprochenen Art hat die Existenz einer in dem betrachteten Kreissektor harmonischen**) Funktion zur Folge, welche längs des Randes mit irgend einer gegebenen stetigen Wertefolge übereinstimmt. Die Randwerte einer derartigen Funk-

---

*) Durch die konforme Abbildung $x' = \sqrt{\frac{x}{C}}$ $\left(\text{mit der Bestimmung } \Re\left(\frac{x'}{i}\right) \geqq 0\right)$ nämlich geht das betrachtete Gebiet in die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius 1, durch die lineare Transformation $x'' = \frac{1 + x'}{1 - x'}$ dieser in einen rechten Winkelraum, durch die quadratische Transformation $x''' = x''^2$ letzterer in eine Halbebene, endlich durch nochmalige lineare Transformation $X = \frac{x''' - i}{x''' + i}$ die Halbebene in das Innere des Einheitskreises über. Dabei entsprechen den vier Punkten $x = 0$, $C + 0i$, $-C$, $C - 0i$ des Sektorrandes bezüglich die vier Punkte $X = -i$, 1, i, -1 der Peripherie des Einheitskreises.

**) S. p. 10, Fußn. **).

tion $h(u, v)$ mögen nun in der folgenden Weise vorgezeichnet sein: Es sei $G(x)$ irgend eine Funktion, welche (für einen gewissen Wert von ν) die oben angegebenen beiden Eigenschaften besitze. Für alle diejenigen Punkte des Randes, für welche $|G(x)| > q^{\nu}$ ist, stimme $h(u, v)$ mit $\frac{1}{\nu} \log |G(x)|$ überein, für alle übrigen jedoch (speziell also längs beider Ufer des Schnittes*)) habe $h(u, v)$ den konstanten Wert $\log q$. Es gilt alsdann auch im Inneren des Gebietes einerseits offenbar $h(u, v) \geqq \log q$, andererseits aber:

$$\frac{1}{\nu} \log |G(x)| \leqq h(u, v).$$

Denn beschreibt man um jede Nullstelle von $G(x)$, welche dem Gebiete $|x| \leqq C$ angehört, einen so kleinen Kreis, daß für denselben durchweg $|G(x)| \leqq q^{\nu}$ gelte, und nimmt aus dem Kreissektor alle diejenigen Gebiete heraus, welche gleichzeitig einem dieser Kreise angehören, so ist in dem übrig bleibenden Gebiete die Funktion $\frac{1}{\nu} \log |G(x)| - h(u, v)$ harmonisch**); da sie aber längs des Randes desselben durchweg $\leqq 0$ bleibt, so gilt das nämliche auch im Inneren. Innerhalb der ausgeschiedenen Kreise gilt aber die Ungleichung offenbar ebenfalls.

Durch die oben fixierte konforme Abbildung geht $h(u, v)$ in eine im Kreise $|X| \leqq 1$ harmonische Funktion über, welche ($X = r \cdot e^{i\varphi}$ gesetzt) mit $H(r, \varphi)$ bezeichnet werde. Ist nun $X = X_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ irgend ein innerer Punkt des Einheitskreises und setzt man

$$\sigma = \frac{1 - r_0^2}{2\pi} \int_{\gamma}^{\beta} \frac{d\psi}{1 - 2r_0 \cos(\psi - \varphi_0) + r_0^2}, \quad \tau = \frac{1 - r_0^2}{2\pi} \int_{\beta}^{\gamma + 2\pi} \frac{d\psi}{1 - 2r_0 \cos(\psi - \varphi_0) + r_0^2},$$

so daß

$$\sigma + \tau = 1,$$

so liefert das Poissonsche Integral, angewendet auf die Funktion $H(r, \varphi)$, offenbar:

$$H(r_0, \varphi_0) \leqq \sigma \log q + \tau \log Q = \log q + \tau \log \frac{Q}{q}.$$

Die Werte von σ und τ ändern sich gleichzeitig mit der Lage des Punktes

*) Daraus daß $h(u, v)$ längs beider Ufer des Schnittes den nämlichen Wert erhält, folgt natürlich keineswegs, daß $h(u, v)$ auch für die volle Kreisfläche harmonisch sein, d. h. auch für die reellen positiven Werte von x der Laplaceschen Differentialgleichung genügen müsse. Dies würde vielmehr dann und nur dann der Fall sein, wenn die längs des Schnittes vorgeschriebenen Werte mit den aus den Peripheriewerten mittels des Poissonschen Integrals sich ergebenden übereinstimmen.

**) Als *Randpunkte* des Gebietes sind dabei alle demselben angehörigen Randpunkte des Sektors und Peripheriepunkte der ausgeschiedenen Kreise zu betrachten.

X_0; es ist aber offenbar stets möglich, nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl δ' eine zweite ε' derart zu bestimmen, daß $\tau \leqq \delta'$ ausfällt, solange nur $|X_0 - e^{i\alpha}| < \varepsilon'$ bleibt.*) Wählt man speziell

$$\delta' = \frac{-\log q}{\log \frac{Q}{q}}\,\delta,$$

so wird also bei entsprechender Fixierung von ε':

$$H(r_0, \varphi_0) \leqq (1 - \delta) \log q \quad \text{für} \quad |X_0 - e^{i\alpha}| < \varepsilon'.$$

Infolge der Stetigkeit der konformen Abbildung läßt sich aber die positive Größe ε so klein wählen, daß, sobald nur $|x_0| < \varepsilon$ ist, für den Bildpunkt X_0 von x_0 die Ungleichung

$$|X_0 - e^{i\alpha}| < \varepsilon'$$

und somit die Beziehung

$$\frac{1}{\nu} \log |G(x_0)| \leqq h(u_0, v_0) = H(r_0, \varphi_0) \leqq (1 - \delta) \log q, \quad (x_0 = u_0 + iv_0)$$

d. h.

$$|G(x_0)| \leqq q^{(1-\delta)\nu}$$

stattfindet. Auch ist ersichtlich, daß die so bestimmte Größe ε von der Wahl der Funktion $G(x)$ sowie auch von der Zahl ν völlig unabhängig ist.

4. Um nun zum Beweise des Satzes selbst überzugehen, nehmen wir an, die Behauptung treffe für irgend einen Begrenzungspunkt $x = x_0$ des Bereiches T nicht zu, d. h. es gelte

$$p > R'_{x_0} > 0.$$

Es lassen sich alsdann drei weitere positive Zahlen, und zwar zunächst p_2 und sodann p_0, p_1 bestimmen, welche dem Ungleichungssysteme

$$p > p_2 > R'_{x_0} > p_0 > \frac{p_1^2}{p_2} > \frac{R'^2_{x_0}}{p_2}$$

Genüge leisten, so daß also

$$p > p_2 > p_1 > R'_{x_0} > p_0 > 0$$

und gleichzeitig

$$p_0 p_2 > p_1^2.$$

*) Denn das in der Definition der Größe τ vorkommende Integral bleibt, solange X_0 sich in einer gewissen Umgebung des Punktes $e^{i\alpha}$ befindet, sicher unterhalb einer endlichen Schranke. — Das nämliche ergibt sich übrigens auch leicht ohne Benutzung des Ausdrucks für τ sowohl aus der von H. A. Schwarz (Ges. Abh. II, Berlin 1890, Zusatz p. 360—361) wie auch aus der von C. Neumann (Abelsche Integrale, 2. Aufl., Leipzig 1884, p. 410) angegebenen geometrischen Interpretation des Poissonschen Integrals. Nach der ersteren ist $2\pi\tau$ die Länge desjenigen Bogens des Einheitskreises, dessen Endpunkte mit den Punkten X_0 und $e^{i\beta}$ bzw. $e^{i\gamma}$ in gerader Linie liegen; nach der letzteren die doppelte scheinbare Entfernung der Punkte $e^{i\beta}$ und $e^{i\gamma}$ für den Standort X_0, vermindert um den zugehörigen Zentriwinkel $\gamma + 2\pi - \beta$.

Ferner möge mit $x = A$ ein beliebig gewählter (jedoch für die Folge festgehaltener) Punkt des Bereiches T bezeichnet werden.

Da $p_0 < R'_{x_0}$, so läßt sich um den Punkt x_0 als Mittelpunkt ein Kreis beschreiben, in welchem $S(x, p_0)$ gleichmäßig konvergiert; der Radius desselben sei A. Es existiert alsdann eine (von x unabhängige) positive Zahl ν_0 derart, daß

(1) $$|f_\nu(x)| < \frac{1}{p_0^\nu}, \text{ sobald } \nu > \nu_0 \text{ und } |x - x_0| \leqq \mathsf{A}.$$

Mit $\varepsilon > 0$ sei jetzt eine beliebige positive Größe bezeichnet, welche wir uns jedoch von vornherein kleiner als jede der beiden Zahlen $\frac{1}{100}\mathsf{A}$ und $\frac{1}{5}|A - x_0|$ gewählt denken.

Da nun zweitens $p_1 > R'_{x_0}$, so gibt es unendlich viele ganzzahlige Werte ν, zu welchen mindestens je ein der Bedingung $|\gamma_\nu - x_0| \leqq \varepsilon$ genügender Punkt $x = \gamma_\nu$ existiert, derart daß

(2) $$|f_\nu(\gamma_\nu)| > \frac{1}{p_1^\nu}.$$

Denn wäre dies nicht für unendlich viele Werte von ν der Fall, d. h. wäre etwa für alle $\nu > n$ durchweg $|f_\nu(x)| \leqq \frac{1}{p_1^\nu}$ im Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$, so würde $S(x, y)$ für alle $|y| < p_1$ im Kreise $|x - x_0| \leqq \varepsilon$ gleichmäßig konvergieren, und es wäre somit $p_1 \leqq R'_{x_0}$.

Da endlich drittens x_0 Begrenzungspunkt von T ist, so gibt es einen zu T gehörigen Punkt $x = x_1$, dessen Entfernung von x_0 kleiner ist als ε. Die Punkte A und x_1 können, da beide zu T gehören, durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke bestehende Linie L verbunden werden, welche ganz innerhalb T verläuft. Da längs der Linie L durchweg $R'_x \geqq p$ ist, so konvergiert $S(x, p_2)$ für jeden Punkt x der Linie L und es gibt also zu jedem solchen x eine kleinste positive Zahl ν_x, derart daß

$$|f_\nu(x)| < \frac{1}{p_2^\nu} \quad \text{für} \quad \nu > \nu_x.$$

Die sämtlichen Zahlen ν_x befinden sich aber unterhalb einer endlichen Schranke ν_1. Andernfalls müßte nämlich die Linie L einen Punkt $x = c$ aufweisen, in dessen Umgebung sich beliebig hohe Werte von ν_x befänden, und dies ist deshalb nicht möglich, weil $R_c' \geqq p$ ist, $S(x, p_2)$ also in einer gewissen Umgebung des Punktes c *gleichmäßig* konvergiert und daher innerhalb derselben durchweg

$$|f_\nu(x)| < \frac{1}{p_2^\nu}$$

gilt, sobald ν einen gewissen Wert ν' übersteigt. Somit gilt schließlich

(3) $$|f_\nu(x)| < \frac{1}{p_2^\nu}$$

für $\nu > \nu_1$ und alle Punkte x der Linie L.

Zusammenfassend gibt es also, nachdem ε, wie oben angegeben, gewählt worden ist, stets (unendlich viele) Werte von ν, für welche gleichzeitig die folgenden drei Aussagen bestehen:

(1) $|f_\nu(x)| < \frac{1}{p_0^\nu}$, solange $|x - x_0| \leqq \mathsf{A}$,

(2) $|f_\nu(\gamma_\nu)| > \frac{1}{p_1^\nu}$, wobei $|\gamma_\nu - x_0| \leqq \varepsilon$,

(3) $|f_\nu(x)| < \frac{1}{p_2^\nu}$ für alle Punkte x der Linie L, welche den festen Punkt A mit dem Punkt x_1 verbindet, dessen Entfernung von x_0 kleiner ist als ε.

Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß es, falls der zugrunde gelegte Wert von ε einen gewissen Grad der Kleinheit überschreitet, Funktionen $f_\nu(x)$, welche dieser drei Eigenschaften teilhaftig sind, überhaupt nicht geben kann.

Zu diesem Zwecke sei aus jenen Werten von ν ein beliebiger herausgegriffen. Aus der betreffenden Funktion $f_\nu(x)$ kann man alsdann, wie unmittelbar aus dem Satze a) hervorgeht, eine ganze rationale Funktion $g(x')$ herleiten, welche die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

(1a) $|g(x')| < \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\nu$ für $|x'| \leqq \frac{1}{2}\mathsf{A}$,

(2a) $g(0) = 1$,

(3a) $|g(x')| < \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^\nu}$ für alle *positiven* Werte von x' unterhalb $\frac{1}{25}\mathsf{A}$, welche zugleich dem Intervalle $|x_1 - \gamma_\nu|$ bis $|A - \gamma_\nu|$ angehören.

Bezeichnet man mit $2C$ die kleinere der beiden Zahlen $\frac{1}{25}\mathsf{A}$ und $\frac{4}{5}|A - x_0|$, so daß infolge der über ε getroffenen Bestimmung stets $4\varepsilon < 2C$ ist, so gilt die Ungleichung (3a) sicher für alle positiven Werte von x', welche der Bedingung

$$2\varepsilon \leqq x' \leqq 2C$$

genügen. Denn es ist einerseits $|x_1 - \gamma_\nu| = |x_1 - x_0 - (\gamma_\nu - x_0)| \leqq 2\varepsilon$ und andererseits sowohl $2C \leqq \frac{1}{25}\mathsf{A}$ als auch $2C \leqq |A - \gamma_\nu|$.*)

*) Letzteres nämlich, da
$$|A - \gamma_\nu| = |A - x_0 - (\gamma_\nu - x_0)| \geqq |A - x_0| - \varepsilon \geqq \frac{4}{5}|A - x_0| \geqq 2C.$$

Setzt man daher $x' - 2\varepsilon = x''$ und $g(x') = G(x'')$, so gelten für die Funktion $G(x'')$ sicher die folgenden drei Aussagen:

(1b) $|G(x'')| < Q^\nu$ für $|x''| \leqq C$,*)

(2b) $G(-2\varepsilon) = 1$,

(3b) $|G(x'')| < q^\nu$ für alle *positiven* Werte von x'' unterhalb C,

wobei daran zu erinnern ist, daß zwar der Wert ν sowie die ganze Funktion $G(x'')$, nicht aber die Größen C, $Q = \frac{p_1}{p_0}$ und $q = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$ in einem Abhängigkeitsverhältnisse von der zugrunde gelegten Größe ε stehen. Sobald daher ε einen gewissen Grad der Kleinheit überschreitet, widerstreitet die Existenz einer Funktion $G(x'')$, welche die vorstehenden drei Eigenschaften besitzt, dem Satze b).**)

5. Die soeben bewiesene Eigenschaft der Größe R'_x kann auch in einer etwas anderen Form ausgesprochen werden. Durch das Zeichen $\overline{T}$ seien im folgenden Bereiche gekennzeichnet, welche entweder selbst Bereiche T sind oder aus solchen durch Hinzufügung beliebig vieler Begrenzungspunkte hervorgehen. Die untere Grenze r' aller Größen R'_x eines Bereiches $\overline{T}$ heiße der *dem Bereiche assoziierte Konvergenzradius.****) Es gilt alsdann:

Bei der stetigen Ausbreitung eines Bereiches $\overline{T}$ nimmt der dem Bereiche assoziierte Radius r', solange er von Null verschieden bleibt, höchstens auf stetige Weise ab.

Unter der „stetigen Ausbreitung" eines Bereiches $\overline{T}$ sei dabei folgendes verstanden. Jedem Werte t eines gewissen reellen Intervalles entspreche ein Bereich $\overline{T}_t$, und zwar in folgender Weise:

a) Von je zweien dieser Bereiche ist derjenige, welcher dem kleineren Wert von t entspricht, in dem anderen enthalten.

b) Ist $\overline{T}_t$ einer der Bereiche, so läßt sich jeder Größe $\varepsilon > 0$ eine zweite $h > 0$ derart zuordnen, daß jeder Punkt des Bereiches T_{t+h} vom

---

*) Genauer: für $|x''| \leqq 24\,C$.

**) Als Folgerung ergibt sich: Gilt für alle Punkte einer stetigen Linie L, abgesehen von ihrem Endpunkt x_0, $R'_x \geqq p$, so ist auch $R'_{x_0} \geqq p$ oder $R'_{x_0} = 0$. (Denn nimmt man $p > R'_{x_0} > 0$ an, und genügt p_0 der Ungleichung $p > p_0 > R'_{x_0}$, so beschreibe man um jeden Punkt von L einen Kreis, für welchen durchweg $R'_x \geqq p_0$ gilt; diese Kreise bilden alsdann einen Bereich T, welcher x_0 als Begrenzungspunkt besitzt.) Dieser Satz sowie der des Textes sind in dem Satze § 9, 2 mit enthalten.

***) Die Bedeutung desselben läßt sich z. B. folgendermaßen aussprechen: r' ist die größte Zahl, welche die Eigenschaft besitzt, daß die durch $S(x, y)$ definierte analytische Funktion sich für jeden Punkt des Gebietes $(\overline{T}, |y| < r')$ regulär verhält.

Bereiche $\overline{T}_t$, sowie jeder Punkt des letzteren vom Bereiche $\overline{T}_{t-h}$ um weniger als ε entfernt ist.*)

c) Ein Begrenzungspunkt eines Bereiches $\overline{T}_t$, in dessen beliebiger Nähe sich außer den Punkten von $\overline{T}_t$ noch andere Punkte jedes der Bereiche $\overline{T}_{t+h}$ $(h>0)$ befinden, soll jedem der letztgenannten Bereiche auch selbst angehören.**)

Die bei stetiger Zunahme des Parameters t erfolgende Änderung des Bereiches $\overline{T}_t$ soll alsdann als stetige Ausbreitung desselben bezeichnet werden.

Beweis. Bezeichnet man den zu $\overline{T}_t$ assoziierten Radius mit r_t', so hat man allgemein, wenn $h>0$ ist, $r'_{t-h} \geqq r'_t \geqq r'_{t+h}$ und somit auch $r'_{t-0} \geqq r'_t \geqq r'_{t+0}$. Die Gesamtheit der *inneren* Punkte aller Bereiche $\overline{T}_{t-h}$ $(h>0)$ bildet offenbar einen Bereich T; für irgend einen Punkt x desselben gilt, da er einem gewissen Bereiche $\overline{T}_{t-h}$ angehört, $R'_x \geqq r'_{t-h} \geqq r'_{t-0}$, und daher ist auch $r' \geqq r'_{t-0}$, wenn mit r' der dem Bereiche T assoziierte Radius bezeichnet wird. Nun ist jeder Punkt von $\overline{T}_t$, sofern er nicht dem Bereiche T selbst schon angehört, zum mindesten ein Begrenzungspunkt desselben (da in jeder Nähe eines Punktes von $\overline{T}_t$ sich Punkte von Bereichen $\overline{T}_{t-h}$, also auch *innere* Punkte derselben finden müssen), und daher muß nach dem bewiesenen Satze r'_t, falls es von Null verschieden ist, mit r' identisch sein. Es ist daher $r'_t \geqq r'_{t-0}$ d. h. $r'_t = r'_{t-0}$.

Ist ferner $h_1, h_2, \cdots$ eine Reihe gegen Null abnehmender positiver Werte und ließe sich in *jedem* der Bereiche $\overline{T}_{t+h_m}$ $(m=1,2,\cdots)$ je ein Punkt x_m nachweisen, für welchen $R_x' \leqq r_t' - \delta$ gilt, wo δ eine gewisse positive Zahl ist, so würde wegen der einseitigen Stetigkeit von R_x' die nämliche Ungleichung auch für die Häufungsstelle $x = x_0$ der Punkte x_m gelten müssen. x_0 könnte demnach dem Bereiche $\overline{T}_t$ nicht angehören, müßte jedoch wegen der Eigenschaft b) eine Begrenzungsstelle desselben sein***), also auch eine Begrenzungsstelle desjenigen Bereiches T, welcher bloß aus den *inneren* Punkten von $\overline{T}_t$ besteht, und daraus würde mit Notwendigkeit $R'_{x_0} = 0$ folgen. Nun befinden sich aber in beliebiger Nähe von x_0 Punkte x_m und somit auch (nicht zu $\overline{T}_t$ gehörige) Punkte

*) Ein Punkt x heiße von einem Bereiche $\overline{T}$ um weniger als ε entfernt, wenn er von irgend einem Punkte desselben um weniger als ε entfernt ist.

**) Diese Bedingung ist z. B. stets erfüllt, wenn die Bereiche $\overline{T}_t$ *Bereiche B* sind, oder auch wenn *jeder* Begrenzungspunkt von $\overline{T}_t$ jedem Bereiche $\overline{T}_{t+h}$ angehört.

***) Wäre nämlich x_0 ein *äußerer* Punkt, also ein gewisser Kreis $|x - x_0| \leqq \varrho$ frei von Punkten des Bereiches $\overline{T}_t$, so würden alle diejenigen Punkte x_m, für welche $|x_m - x_0| < \frac{1}{2}\varrho$, um mehr als $\frac{1}{2}\varrho$ von $\overline{T}_t$ entfernt sein, während nach b) alle Punkte x_m, für welche m einen gewissen Wert übersteigt, von $\overline{T}_t$ um *weniger* als $\frac{1}{2}\varrho$ entfernt sein müssen.

jedes der Bereiche $\bar{T}_{t+h}$ ($h > 0$); mithin müßte nach c) x_0 jedem der Bereiche $\bar{T}_{t+h}$ selbst angehören, also $r'_{t+h} = 0$ und somit auch $r'_{t+0} = 0$ sein. Sieht man also von diesem Falle ab, so war die Annahme unzulässig, und es gibt daher, wie klein auch δ gewählt werde, einen gewissen Bereich $\bar{T}_{t+h_m}$, für welchen $r'_{t+h_m} \geqq r'_t - \delta$ ist, so daß a fortiori $r'_{t+0} \geqq r'_t - \delta$ und somit auch $r'_{t+0} \geqq r'_t$, d. h. $r'_{t+0} = r'_t$ gilt.*)

Identifiziert man den Bereich $\bar{T}_t$ mit dem Gebiete $|x| < t$ $(0 < t < \infty)$, so ist (vgl. Nr. 1) r'_t identisch mit dem zu t assoziierten Konvergenzradius der durch Entwickeln der Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von x aus $S(x, y)$ hervorgehenden Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$. Man erhält also den bereits in Nr. 1 angeführten Satz über die Stetigkeit desselben.**)

§ 8.

Grundeigenschaft der Größe R'_x.

1. Es ist im vorigen Paragraphen der Nachweis erbracht worden, daß, falls R'_x in einem Punkte $x = x_0$ unstetig und zugleich von Null verschieden ist, diejenigen Gebiete, innerhalb deren R'_x den Wert R'_{x_0} um mehr als eine bestimmte von Null verschiedene positive Größe übertrifft, niemals einen Bereich T vollständig erfüllen, welcher den Punkt x_0 zum Begrenzungspunkt besitzt. Dies ist aber keineswegs die einzige Beschränkung, welcher die genannten Gebiete unterworfen sind; es sollen vielmehr in dem nächstfolgenden Paragraphen noch weitergehende Beschränkungen hergeleitet werden.

Um die diesbezüglichen Betrachtungen zu vereinfachen, ist es ratsam, eine gewisse sehr allgemeine Eigenschaft der Funktion R'_x zu Hilfe zu nehmen, welche daher vorweg bewiesen werden soll. Auf dieselbe wird alsdann später (§ 10) nochmals eingegangen und insbesondere der Nachweis geführt werden, daß sie unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen für die Größe R'_x charakteristisch ist. Der bezügliche Satz, welcher auch als eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes über gleichmäßige Konvergenz***) angesehen werden kann, lautet folgendermaßen†):

---

*) Entsprechend der Bemerkung in Fußn. **), p. 43 gilt das Analoge auch für *eindimensionale* Bereiche $\bar{T}_t$, welche aus je einem Linienstück (mit oder ohne Einrechnung des Endpunktes) bestehen. Bedeutet z. B. $\bar{T}_t$ die Gesamtheit der Punkte $x_0 + \alpha t(x_1 - x_0)$, wo α alle Werte des Intervalls $0 \leqq \alpha \leqq 1$ annehmen möge, so ist r'_t für $0 < t < 1$ stetig, solange $r'_{t+0} > 0$ ist. (Daraus darf aber wiederum nicht der Schluß gezogen werden, daß R'_x *selbst* längs der die Punkte x_0 und x_1 verbindenden Geraden stetig sein müsse.)

**) Direkte Herleitung dieses Satzes in § 12, 3.

***) Siehe p. 25, Fußn. ***).

†) Wie bisher, so wird auch im folgenden stets vorausgesetzt, daß die Funktionen $f_\nu(x)$ in allen vorkommenden Teilen der x-Ebene eindeutig und regulär seien.

*Es sei p_x eine für jedes x des Bereiches B der x-Ebene eindeutig definierte positive Größe, deren Logarithmus im Bereiche B harmonisch ist.**) *Gilt alsdann $R_x' \geqq p_x$ für jeden Begrenzungspunkt x des Bereiches B, so gilt das nämliche auch für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches B.***) *(Ist also speziell $R_x' = p_x$ längs der Begrenzung, so gilt im ganzen Innern $R_x' \geqq p_x$***).)*

Beweis. Es werde ein Wert $\varepsilon > 0$ in beliebiger Weise angenommen. Ist alsdann x ein beliebiger Begrenzungspunkt von B, so konvergiert, da $e^{-2\varepsilon}p_x < p_x \leqq R_x'$ ist, die Reihe $S(x, e^{-2\varepsilon}p_x)$, und es gibt daher eine kleinste ganze Zahl ν_x derart, daß

$$|f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^{2\varepsilon}}{p_x}\right)^\nu \quad \text{für alle} \quad \nu \geqq \nu_x.$$

Die Zahlen ν_x befinden sich jedoch sämtlich unterhalb einer endlichen Schranke n. Andernfalls gäbe es nämlich einen Punkt $x = x_1$ der x-Ebene, in dessen Umgebung ν_x beliebig große Werte annehmen würde; und zwar müßte x_1 als Häufungsstelle von Begrenzungspunkten von B ebenfalls ein solcher sein. Um den Punkt x_1 beschreibe man nun einen Kreis von solcher Kleinheit, daß *erstens* $S(x, e^{-\varepsilon}p_{x_1})$ in demselben noch *gleichmäßig* konvergiere, so daß also

$$|f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^{\varepsilon}}{p_{x_1}}\right)^\nu$$

sobald ν einen gewissen Wert ν_1 übersteigt und x dem genannten Kreise angehört,

und (was infolge der Stetigkeit von p_x möglich ist) daß *zweitens*

$$p_x \leqq e^\varepsilon p_{x_1}$$

für die nämlichen Werte von x, soweit sie dem Bereiche B noch angehören.

---

*) Und zwar genau in dem p. 10, Fußn. **) angegebenen Sinne. Es wird also ausdrücklich vorausgesetzt, daß $\log p_x$ im Bereiche B (*speziell also längs der Begrenzung desselben*) stetig und daher auch in B zwischen zwei endlichen Grenzen gelegen sei. (Hingegen braucht die Laplacesche Differentialgleichung nur für *innere* Punkte von B befriedigt zu sein.)

**) Dabei ist der Wert $R_x' = \infty$ weder längs der Begrenzung noch im Innern ausgeschlossen. Hingegen kann R_x' infolge der über $\log p_x$ getroffenen Bestimmungen längs des Randes (und daher auch im Innern) nirgends 0 sein. — Beispiele siehe p. 50, Fußn. *).

***) Ist also R_x' längs der Randkurve irgend eines Bereiches B, welcher die Lösung der „Randwertaufgabe" (sog. Dirichletschen Problems) gestattet, bekannt und zwar daselbst durchweg stetig und von Null verschieden, so läßt sich, indem man längs des Randes p_x mit R_x' identifiziert, für jeden inneren Punkt des Bereiches unmittelbar ein gewisser *Mindestwert* p_x von R_x' angeben.

Für alle Punkte (speziell also Begrenzungspunkte) x des Bereiches B, welche jenem Kreise um x_1 angehören, gilt alsdann

$$|f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^\varepsilon}{p_{x_1}}\right)^\nu \leqq \left(\frac{e^{2\varepsilon}}{p_x}\right)^\nu \qquad (\nu \geqq \nu_1),$$

und daher bleibt entgegen der Annahme ν_x in der ganzen Umgebung des Punktes x_1 unterhalb ν_1. Somit gilt schließlich für alle Begrenzungspunkte x des Bereiches B:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & |f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^{2\varepsilon}}{p_x}\right)^\nu \\ & \text{oder:} \qquad\qquad\qquad\qquad (\nu \geqq n) \\ & \frac{1}{\nu}\log|f_\nu(x)| \leqq 2\varepsilon - \log p_x . \end{aligned}\right.$$

Die Größe $2\varepsilon - \log p_x$ besitzt im Bereiche B eine untere Schranke γ. Es werde nun irgend eine der Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu \geqq n)$ ins Auge gefaßt, um jede dem Bereiche B angehörige Nullstelle derselben ein Kreis beschrieben, für welchen durchweg

$$|f_\nu(x)| \leqq e^{\nu\gamma}$$

gilt, und aus dem Bereiche B alle diejenigen Gebietsteile herausgenommen, welche gleichzeitig einem dieser Kreise angehören. In dem übrig bleibenden Gebiet ist die Funktion $\frac{1}{\nu}\log|f_\nu(x)| - 2\varepsilon + \log p_x$ sicher harmonisch, und da sie längs der Begrenzung desselben offenbar nirgends positiv ist, so gilt das nämliche für das Innere desselben, nicht minder aber für die ausgeschiedenen Gebietsteile, so daß die Ungleichungen (1) ihre Gültigkeit für den ganzen Bereich B beibehalten.

Ist nun $x = x_0$ ein beliebiger *innerer* Punkt von B, so gilt innerhalb eines hinreichend kleinen Kreises um denselben:

$$p_x \geqq e^{-\varepsilon} p_{x_0}$$

und daher:

$$|f_\nu(x)| \leqq \left(\frac{e^{2\varepsilon}}{p_x}\right)^\nu \leqq \left(\frac{e^{3\varepsilon}}{p_{x_0}}\right)^\nu,$$

so daß $S(x, y)$ in diesem Kreise sicher gleichmäßig konvergiert, solange $|y| < e^{-3\varepsilon} p_{x_0}$ bleibt. Es ist demnach $R'_{x_0} \geqq e^{-3\varepsilon} p_{x_0}$ und somit, da ε beliebig klein gewählt werden konnte, auch $R'_{x_0} \geqq p_{x_0}$.

Zusatz. *Sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes sämtlich erfüllt, und gilt auch nur für einen einzigen* inneren *Punkt $x = x_0$ des Bereiches B*

$$R'_x = p_x,$$

so besteht diese Gleichung auch für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches B.

Beweis. Um den Punkt x_0 sei ein beliebiger, dem Bereich B noch angehörender Kreis K beschrieben. Gilt nun entgegen der Behauptung für irgend einen Punkt $x = x_1$ seiner Peripherie $R'_{x_1} > p_{x_1}$, so mögen die positiven Größen a und b der Bedingung $R'_{x_1} > a > b > p_{x_1}$ gemäß gewählt werden. Um x_1 läßt sich alsdann infolge der Stetigkeit von p_x und der einseitigen Stetigkeit (§ 7, 1) von R'_x ein Kreis K_1 beschreiben, derart daß für alle Punkte x des Bereiches B, welche diesem Kreise angehören, sowohl $p_x \leqq b$ als auch $R'_x \geqq a$ gilt. Es sei nun längs der Peripherie von K eine neue stetige Folge von Werten $\bar{p}_x$ ins Auge gefaßt, welche außerhalb K_1 mit p_x bezüglich übereinstimmen, im Innern von K_1 dagegen der Bedingung $a > \bar{p}_x > p_x$ genügen mögen. Es gilt alsdann längs der Peripherie von K durchweg $R'_x \geqq \bar{p}_x$, und somit muß nach dem obigen Satze auch $R'_{x_0} \geqq \bar{p}_{x_0}$ sein, wobei die Größe $\bar{p}_{x_0}$ dadurch definiert ist, daß ihr Logarithmus das arithmetische Mittel der Werte $\log \bar{p}_x$ darstellt. Da aber andererseits $\log p_{x_0}$ gleich dem arithmetischen Mittel der Werte $\log p_x$ für die nämliche Kreisperipherie ist, so ist sicher $\bar{p}_{x_0} > p_{x_0}$ und demnach $R'_{x_0} > p_{x_0}$ entgegen der Voraussetzung. Es gilt daher die Beziehung $R'_x = p_x$ auch für den Punkt $x = x_1$, d. h. für jeden Punkt eines beliebigen dem Bereiche B angehörenden Kreises mit dem Mittelpunkt x_0. Von einem solchen Punkte x_1 aus weiterschließend kann man aber, indem man die gleiche Schlußweise eine endliche Anzahl von Malen wiederholt, das nämliche für jeden beliebigen *inneren* Punkt des Bereiches B erweisen; infolge der einseitigen Stetigkeit von R'_x gilt es dann aber auch für jeden *Begrenzungspunkt* von B.

2. Als unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satze ergibt sich eine wichtige Eigenschaft der Funktion $r' = \varphi(r)$, welche den zu r assoziierten Konvergenzradius*) einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ zweier Veränderlichen darstellt.

Betrachtet man nämlich gleichzeitig mit $\mathfrak{P}(x, y)$ die durch Ordnen von $\mathfrak{P}(x, y)$ nach Potenzen von y entstehende Reihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu} \mathfrak{P}_{\nu}(x)\, y^{\nu},$$

so ist (§ 7, 1) $\varphi(r)$ identisch mit der unteren Grenze aller Größen R'_x des Gebietes $|x| < r$. Es seien nun r_1, r_2, r_3 drei beliebige Werte von r, und zwar möge, wenn R den Maximalradius von $\mathfrak{P}(x, y)$ in der x-Ebene**) bezeichnet, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$ und daher $\varphi(r_1) \geqq \varphi(r_2) \geqq \varphi(r_3) > 0$

*) S. § 7, 1 (p. 32). Die hier bewiesene Eigenschaft wird in § 12 direkt hergeleitet und der Nachweis geführt, daß sie (in Gemeinschaft mit der Monotonie von $\varphi(r)$) für die Funktion $\varphi(r)$ charakteristisch ist.

**) S. § 5, 3 (p. 24) sowie p. 32, Fußn. **).

gelten. Bedeutet alsdann B das Ringgebiet $r_1 - \delta \leqq |x| \leqq r_3 - \delta$ (wo δ den Ungleichungen $0 < \delta < r_1$ und $\delta < r_3 - r_2$ gemäß beliebig gewählt sei), so genügt die durch die Gleichung

$$\log p_x - \log \varphi(r_1) = \frac{\log|x| - \log(r_1 - \delta)}{\log(r_3 - \delta) - \log(r_1 - \delta)} \{\log\varphi(r_3) - \log\varphi(r_1)\}$$

definierte Größe p_x allen Anforderungen des Satzes.*) Es ist nämlich $\log p_x$ als lineare Funktion von $\log|x|$ im Bereiche B harmonisch; für $|x| = r_1 - \delta$ hat man $p_x = \varphi(r_1)$, $R'_x \geqq \varphi(r_1)$ und somit $R'_x \geqq p_x$; analog gilt für $|x| = r_3 - \delta$: $R'_x \geqq \varphi(r_3) = p_x$. Infolgedessen gilt im ganzen Bereiche B die Ungleichung $R'_x \geqq p_x$, d. h.:

$$\log R'_x - \log\varphi(r_1) \geqq \frac{\log|x| - \log(r_1 - \delta)}{\log(r_3 - \delta) - \log(r_1 - \delta)} \{\log\varphi(r_3) - \log\varphi(r_1)\}.$$

Speziell ergibt sich also für alle Werte x vom absoluten Betrage r_2:

$$\log R'_x - \log\varphi(r_1) \geqq \frac{\log r_2 - \log(r_1 - \delta)}{\log(r_3 - \delta) - \log(r_1 - \delta)} \{\log\varphi(r_3) - \log\varphi(r_1)\}$$

und diese Beziehung bleibt somit auch noch bestehen, wenn man R'_x durch die *untere Grenze* der sämtlichen Größen R'_x des Gebietes $|x| = r_2$ oder auch durch die jedenfalls nicht kleinere**) untere Grenze $\varphi(r_2)$ aller Größen R'_x des Gebietes $|x| < r_2$ ersetzt. Geht man dann noch für $\delta = 0$ zur Grenze über, so lautet das Ergebnis:

$$\log\varphi(r_2) - \log\varphi(r_1) \geqq \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \{\log\varphi(r_3) - \log\varphi(r_1)\}$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} 1 & \log r_1 & \log\varphi(r_1) \\ 1 & \log r_2 & \log\varphi(r_2) \\ 1 & \log r_3 & \log\varphi(r_3) \end{vmatrix} \leqq 0$$

oder endlich:

$$\varphi(r_2)^{\log\frac{r_3}{r_1}} \geqq \varphi(r_1)^{\log\frac{r_3}{r_2}} \cdot \varphi(r_3)^{\log\frac{r_2}{r_1}}.$$

3. Ist speziell $\log R'_x$ in einem Bereiche T der $x = u + iv$-Ebene stetig und besitzt in jedem Punkte desselben stetige partielle Ableitungen 1. u. 2. Ordnung nach u und v, so kann die in Nr. 1 bewiesene Eigenschaft der Größe R'_x für diesen Bereich auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

---

*) Sollte $\varphi(r_1) = \infty$ sein, so ersetze man die Größe $\varphi(r_1)$ durchweg durch eine positive Größe Ω und gehe zum Schluß für $\Omega = \infty$ zur Grenze über, wobei man als Ergebnis $\varphi(r_2) = \infty$ erhält. (Vgl. § 12, 3.) Ist nicht nur $\varphi(r_1)$, sondern auch $\varphi(r_3)$ unendlich groß, so ist dies Ergebnis selbstverständlich.

**) Nach dem vorstehenden Satze liegt ja R'_x für $|x| < r$ sicher niemals unterhalb der unteren Grenze aller Größen R'_x des Gebietes $|x| = r$.

R'_x genügt in jedem Punkte des Bereiches T der Differentialungleichung:

$$\frac{\partial^2 \log R'_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log R'_x}{\partial v^2} \leqq 0.$$

Beweis. Ist $x = x_0$ irgend ein Punkt des Bereiches T und gehört der Kreis $|x - x_0| \leqq \varrho$ dem Bereiche T noch vollständig an, so sei diejenige in diesem Kreise harmonische Funktion, deren Randwerte mit $\log R'_x$ bezüglich übereinstimmen, mit $g(u, v)$ bezeichnet. Alsdann ist die Funktion

$$G(u, v) = \log R'_x - g(u, v)$$

im ganzen Kreise stetig, längs der Peripherie gleich Null und im Innern (nach Nr. 1) Null oder positiv. Ist speziell $G(u, v)$ im ganzen Kreise Null, so ist $\log R'_x = g(u, v)$ in demselben harmonisch und damit das Stattfinden der Behauptung für den Punkt $x = x_0$ erwiesen (und zwar tritt dann speziell der Fall der *Gleichheit* ein). Gibt es jedoch einen Punkt des Kreises, für welchen $G(u, v) > 0$ ist, so nimmt $G(u, v)$ seinen Maximalwert sicher in einem *inneren* Punkte (u_1, v_1) des Kreises an, speziell also $G(u, v_1)$ seinen Maximalwert im Punkte $u = u_1$ und $G(u_1, v)$ den seinen im Punkte $v = v_1$. Dazu ist aber, da $G(u, v)$ im Innern des Kreises partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung besitzt, notwendig, daß für $u = u_1$, $v = v_1$

$$\frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial u^2} \leqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial v^2} \leqq 0,$$

somit auch

$$\frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G(u, v)}{\partial v^2} \leqq 0$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 \log R'_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log R'_x}{\partial v^2} \leqq 0$$

gelte. Da aber ϱ beliebig klein gewählt werden konnte, so gibt es Punkte (u_1, v_1), für welche die letztere Ungleichung besteht, in beliebiger Nähe der Stelle (u_0, v_0), und daher gilt die Ungleichung wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungen auch für jene Stelle selbst.*)

---

*) **Beispiele:** 1. Ist $f(x)$ im betrachteten Gebiete eindeutig und regulär und setzt man $f_\nu(x) = [f(x)]^\nu$, so besitzt $R'_x = \frac{1}{|f(x)|}$ die in Nr. 1 bewiesene Eigenschaft und genügt außer an den Nullstellen von $f(x)$ überall der Differentialgleichung $\Delta \log R'_x = 0$.

2. Setzt man $f_\nu(x) = \cos \nu x$, also $S(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y)$, wobei

$$S_1(x, y) = \frac{1}{2} \sum (e^{ix} y)^\nu, \qquad S_2(x, y) = \frac{1}{2} \sum (e^{-ix} y)^\nu,$$

so wird (vergl. Beispiel 1) für die Reihe $S_1(x, y)$: $R'_x = e^v$, für die Reihe $S_2(x, y)$: $R'_x = e^{-v}$. Solange diese beiden Werte voneinander verschieden sind, gilt der

§ 9.

Weitere Untersuchungen über das Verhalten von R'_x an Unstetigkeitsstellen.

Es soll nun die im vorigen Paragraphen bewiesene Eigenschaft der Größe R'_x dazu benutzt werden, um die Betrachtungen des § 7 über das Verhalten dieser Größe an solchen Unstetigkeitsstellen, an welchen ihr Wert von Null verschieden ist, erheblich zu verschärfen. Wir beweisen zu diesem Zwecke drei hierauf bezügliche Sätze, von denen der letzte alles diesbezügliche Vorangehende in sich enthält.

Der betrachtete Unstetigkeitspunkt der Funktion R'_x möge im folgenden zum Nullpunkte der x-Ebene gewählt sein und der (von Null verschiedene) Wert von R'_x im Punkte $x = 0$ mit R' bezeichnet werden.*) Es gilt alsdann:

1. *Es sei p eine beliebige positive Zahl oberhalb R' (also $p > R' > 0$). Fixiert man alsdann bei gegebenem $\varrho > 0$ eine Zahl $\beta_\varrho \geqq 0$ derart, daß sich eine endliche Anzahl von Bögen der Kreisperipherie $|x| = \varrho$ nachweisen läßt, deren Zentriwinkelsumme mindestens β_ϱ beträgt und längs welcher durchweg $R'_x \geqq p$ ist, so wird β_ϱ gleichzeitig mit ϱ unendlich klein.*

Beweis. Es gebe entgegen der Behauptung beliebig kleine Werte von ϱ, für welche $\beta_\varrho \geqq \beta > 0$ ist. Infolge der „einseitigen Stetigkeit“

---

kleinere $R'_x = e^{-|v|}$ auch für $S(x, y)$ selbst; aber auch für $v = 0$ ist infolge der einseitigen Stetigkeit $R'_x > 1$ ausgeschlossen und mithin besteht die Beziehung $R'_x = e^{-|v|}$ für jeden endlichen Wert von x. Außer für $v = 0$ ist demnach die Differentialgleichung $\Delta \log R'_x = 0$ überall befriedigt; die in Nr. 1 bewiesene Eigenschaft hingegen gilt für jeden beliebigen Bereich B der x-Ebene, auch wenn derselbe über die Achse des Reellen hinübergreift.

3. Ist $t_0, t_1, t_2, \cdots$ eine Reihe reeller Zahlen, welche jedes endliche Intervall überall dicht erfüllen, und setzt man

$$f_\nu(x) = e^{\nu(2t_\nu x - t_\nu^2)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so wird:

$$|f_\nu(x)| = e^{\nu(2t_\nu u - t_\nu^2)} \leqq e^{\nu u^2}$$

und somit $R'_x \geqq e^{-u^2}$. Es kann aber nicht für irgend einen Punkt $x = x_0 = u_0 + iv_0$ die Größe $R'_{x_0} > e^{-u_0^2}$ ausfallen, denn sobald $|y| = e^{-u_0^2 + \delta}$ $(\delta > 0)$ gewählt wird, divergiert die Reihe $S(x_0, y)$, da für unendlich viele Werte von ν:

$$(t_\nu - u_0)^2 < \delta \quad \text{und somit} \quad |f_\nu(x_0)\, y^\nu| = e^{\nu\{\delta - (t_\nu - u_0)^2\}} > 1$$

wird. Man hat also für jeden endlichen Wert von x:

$$R'_x = e^{-u^2}, \qquad \Delta \log R'_x = -2.$$

*) Im Einklang mit der bisherigen Bezeichnungsweise (vgl. z. B. § 5, 3).

(§ 7, 1) von R'_x kann man nun nach Annahme einer positiven Größe ε eine zweite A derart bestimmen, daß

$$R'_x \geqq e^{-\varepsilon} R'$$

gilt, solange $|x| \leqq$ A ist. Genügt alsdann die Zahl ϱ_0 den Bedingungen $0 < \varrho_0 <$ A und $\beta_{\varrho_0} \geqq \beta$, so lassen sich auf der Kreisperipherie $|x| = \varrho_0$ eine endliche Anzahl von Bögen angeben, deren Zentriwinkelsumme genau β beträgt und längs welcher $R'_x \geqq p$ ist. Jeder dieser Bögen möge in drei gleiche Teile geteilt werden, und es werde eine im Gebiet $|x| \leqq \varrho_0$ harmonische Funktion $g(u, v)$ gebildet, welche längs des mittleren Teiles jedes dieser Bögen den konstanten Wert $\log p$, außerhalb der genannten Bögen den konstanten Wert $\log R' - \varepsilon$ besitze, während ihre Randwerte in den beiden äußeren Teilen jedes der obigen Bögen lediglich der Bedingung

$$\log R' - \varepsilon \leqq g(u, v) \leqq \log p$$

entsprechen, jedoch so gewählt sein mögen, daß $g(u, v)$ längs der ganzen Kreisperipherie stetig wird.*) Es gilt alsdann für die ganze Kreisperipherie offenbar:

$$R'_x \geqq e^{g(u,v)}$$

und somit gilt nach § 8, 1 diese Beziehung auch im ganzen Gebiete $|x| \leqq \varrho_0$, speziell also für den Punkt $x = 0$; hier liefert sie aber:

$$\log R' \geqq g(0,0) \geqq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{3}\beta \log p + \left(2\pi - \frac{1}{3}\beta\right)(\log R' - \varepsilon)\right\}$$

oder:

$$0 \geqq \frac{1}{3}\beta(\log p - \log R') - \left(2\pi - \frac{1}{3}\beta\right)\varepsilon.$$

Diese Ungleichung müßte nun bei beliebig kleinen Werten von ε Geltung haben, d. h. es müßte $p \leqq R'$ sein, während gerade $p > R'$ vorausgesetzt wurde.

2. *Es sei wiederum $p > R' > 0$. Gibt es alsdann in beliebiger Nähe der Stelle $x = 0$ Punkte, für welche $R'_x \geqq p$ ist, und unter diesen wiederum solche ξ, deren jeder mit je einem zweiten Punkte ξ' durch eine zusammenhängende Linie L verbunden werden kann, längs welcher durchweg $R'_x \geqq p$ ist**), so gilt stets*

$$\lim_{\xi=0}\left|\frac{\xi'}{\xi}\right| = 1.$$

---

*) Es genügt offenbar, $g(u, v)$ längs jedes dieser Teile der Kreisperipherie in passender Weise als je eine lineare Funktion der Bogenlänge zu bestimmen.

**) Wenn überhaupt R'_x im Punkte $x = 0$ unstetig ist, so gibt es bei geeigneter Wahl der Größe $p > R'$ in beliebiger Nähe von $x = 0$ stets Punkte, für welche $R'_x \geqq p$ ist. Infolge der „einseitigen Stetigkeit" von R'_x erreicht man es dann durch eine wenn auch noch so geringe Verkleinerung der Größe p sicher daß auch noch

Beweis. Ist die Behauptung unrichtig, so muß eine Reihe von Punktepaaren $\xi_1, \xi_1'; \xi_2, \xi_2'; \cdots$ der angegebenen Art nachweisbar sein, welche überdies den Bedingungen $|\xi_1| > |\xi_2| > \cdots$, $\lim \xi_k = 0$ und

$$\left|\frac{\xi_k'}{\xi_k}\right| \geqq c \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

genügen, wo c eine gewisse positive Zahl oberhalb 1 bedeutet.*) Die zugehörigen Linien L mögen mit $L_1, L_2, \cdots$ bezeichnet werden.

Es sollen nun drei positive Zahlen, und zwar zunächst p_2 und dann p_0 und p_1 bestimmt werden, welche dem Ungleichungssysteme

$$p > p_2 > R', \quad R'^2 > p_0^2 > \frac{p_1^3}{p_2} > \frac{R'^3}{p_2}$$

Genüge leisten, so daß also die Ungleichungen

$$p > p_2 > p_1 > R' > p_0 > 0^{**})$$

sowie

$$p_0^2 p_2 > p_1^3 \quad \text{und somit auch} \quad p_0 p_2 > p_1^2$$

sämtlich erfüllt sind.

Wie in § 7, 4 folgt alsdann *erstens* aus $p_0 < R'$ die Existenz zweier positiver Größen ν_0 und A derart, daß

$$(1) \qquad |f_\nu(x)| < \frac{1}{p_0^\nu}, \quad \text{sobald } \nu > \nu_0 \text{ und } |x| \leqq \mathsf{A}.$$

Wird dann ferner eine Reihe *abnehmender* positiver Konstanten ε_k $(k = 1, 2, \cdots)$ der Bedingung $\varepsilon_k \leqq \frac{k-1}{3} |\xi_k|$ gemäß gewählt, so gibt es *zweitens* unter Zugrundelegung eines dieser Werte ε_k, da $p_1 > R'$ ist, unendlich viele ganzzahlige Werte ν, zu welchen mindestens je ein der Bedingung $|\gamma_\nu| \leqq \varepsilon_k$ genügender Punkt γ_ν existiert, derart, daß:

$$(2) \qquad |f_\nu(\gamma_\nu)| > \frac{1}{p_1^\nu}.$$

---

für die volle Umgebung jedes dieser Punkte $R'_x \geqq p$ gilt, so daß zu jedem derselben ein zweiter Punkt ξ' von der verlangten Art existiert. — Für die spätere Anwendung des Satzes genügt die Betrachtung solcher Linien L, welche aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken zusammengesetzt sind. — Als Beispiel zu diesem und dem folgenden Satze kann das in § 7, 2 behandelte dienen (welches gleichzeitig daran erinnert, daß ungeachtet dieser Sätze die Punkte x, für welche $R'_x \geqq p$ ist, die ganze Umgebung des Punktes $x = 0$ überall dicht erfüllen können).

*) Dies trifft — wie durch Vertauschung von ξ mit ξ' ersichtlich — offenbar auch dann zu, wenn Punktepaare ξ, ξ' vorhanden sind, bei welchen $|\xi|$ beliebig kleine Werte annimmt und gleichzeitig $\left|\frac{\xi'}{\xi}\right| \leqq \vartheta < 1$ gilt.

**) Evident bis auf die Ungleichung $p_2 > p_1$, welche alsdann aus $p_1^2 > p_0^2 > \frac{p_1^3}{p_2}$ folgt.

Endlich gilt *drittens* für alle Punkte x der k Linien $L_1, L_2, \cdots L_k$, da längs jeder derselben $R'_x \geqq p$ ist,

$$(3) \qquad |f_\nu(x)| < \frac{1}{p_2^\nu},$$

sobald ν eine bestimmte Zahl ν_1 überschreitet.

Zusammenfassend gibt es also nach Zugrundelegung einer beliebigen ganzen Zahl k stets unendlich viele Werte von ν, für welche gleichzeitig die folgenden drei Aussagen bestehen:

$$(1) \qquad |f_\nu(x)| < \frac{1}{p_0^\nu}, \quad \text{solange } |x| \leqq \mathsf{A},$$

$$(2) \qquad |f_\nu(\gamma_\nu)| > \frac{1}{p_1^\nu}, \quad \text{wobei } |\gamma_\nu| \leqq \varepsilon_k,$$

$$(3) \qquad |f_\nu(x)| < \frac{1}{p_2^\nu} \quad \text{für alle Punkte } x \text{ der Linien } L_1, L_2, \cdots, L_k.$$

Von diesen Werten ν sei ein beliebiger herausgegriffen und mit ν_k bezeichnet, doch so, daß $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$ wird. Aus jeder der Funktionen $f_{\nu_k}(x)$ läßt sich alsdann, vorausgesetzt daß $\varepsilon_k < \frac{1}{10}\mathsf{A}$ ist, d. h. daß k einen gewissen Wert k_0 überschreitet, nach dem Satze a) in § 7, 3 eine ganze rationale Funktion $g_{\nu_k}(x')$ herleiten, welche die folgenden Eigenschaften besitzt*):

(1^a) $\quad |g_{\nu_k}(x')| < Q^{\nu_k} \quad$ für $|x'| \leqq \frac{1}{2}\mathsf{A}$

(2^a) $\quad g_{\nu_k}(0) = 1$

(3^a) $\quad |g_{\nu_k}(x')| < q^{\nu_k}$ für alle *positiven* Werte von x' unterhalb $\frac{1}{25}\mathsf{A}$, welche zugleich einem der Intervalle $|\xi_i - \gamma_{\nu_k}|$ bis $|\xi_i' - \gamma_{\nu_k}|$ $(i = 1, 2, \cdots k)$ oder auch welche zugleich einem der engeren Intervalle t_i bis Ct_i $(i = 1, 2, \cdots k)$ angehören.

Dabei ist $Q = \frac{p_1}{p_0}$, $q = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$, $t_i = |\xi_i| + \varepsilon_i$, $C = \frac{2c+1}{c+2} > 1$. Es gilt nämlich einerseits:

$$|\xi_i - \gamma_{\nu k}| \leqq |\xi_i| + |\varepsilon_k| \leqq t_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

und andererseits:

$$|\xi_i' - \gamma_{\nu_k}| \geqq |\xi_i'| - \varepsilon_k \geqq c\,|\xi_i| - \varepsilon_i \geqq \left(c - \frac{c-1}{3}\right)|\xi_i|$$
$$= C\left(1 + \frac{c-1}{3}\right)|\xi_i| \geqq Ct_i.$$

---

*) Daß der Zusammenhang zwischen x und x' bei jeder der Funktionen ein anderer ist, kommt dabei nicht in Betracht.

Da ferner $t_i \leqq \left(1 + \frac{c-1}{3}\right) | \xi_i |$, also die Größen t_i mit wachsendem i gegen 0 konvergieren, so liegen die Intervalle t_i bis Ct_i, sobald i eine gewisse Zahl i_0 überschreitet, sämtlich unterhalb $\frac{1}{25}$ A.

Es sei nun irgend eine der Funktionen $g_{\nu_k}(x')$ $(k > k_0,\ k > i_0)$ ins Auge gefaßt. In der x'-Ebene werde über der durch die Punkte t_i und Ct_i begrenzten Strecke s_i $(i_0 < i \leqq k)$ der Achse des Reellen ein Halbkreis $\varkappa_i$ beschrieben und in dem so entstehenden Zweieck Z_i diejenige harmonische Funktion $h(u', v')$ aufgesucht, deren Randwerte mit den Werten der Funktion $\frac{1}{\nu_k} \log |g_{\nu_k}(x')|$ bezüglich übereinstimmen, solange diese oberhalb $\log q$ bleiben, längs der übrigen Teile der Begrenzung (speziell also längs s_i) jedoch mit $\log q$ übereinstimmen (nirgends also mehr als $\log Q$ betragen). Nach einer bereits mehrfach angewandten*) Schlußweise gilt alsdann für das ganze Gebiet Z_i:

$$\frac{1}{\nu_k} \log |g_{\nu_k}(x')| \leqq h(u', v').$$

Bildet man nun das Zweieck Z_i auf den Einheitskreis einer zweiten $(X = re^{i\varphi})$-Ebene so ab, daß den beiden Seiten desselben je ein Halbkreis entspricht**) — etwa dem Bogen $\varkappa_i$ der Halbkreis $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, der Strecke s_i der Halbkreis $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$ —, so geht $h(u', v')$ in eine im Kreise $|X| \leqq 1$ harmonische Funktion $H(r, \varphi)$ über, für deren Randwerte die Bedingungen

$$H(1, \varphi) \leqq \log Q \quad (0 \leqq \varphi \leqq \pi) \quad \text{und} \quad H(1, \varphi) = \log q \quad (\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

erfüllt sind, und welche selbst daher, solange $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$ ist, die Ungleichung

$$H(r, \varphi) \leqq \frac{1}{2} (\log Q + \log q)$$

befriedigt.***) Infolgedessen gilt aber auch

$$h(u', v') \leqq \frac{1}{2} (\log Q + \log q)$$

innerhalb desjenigen Kreissegments S_i, welches bei der in Rede stehenden konformen Abbildung der Halbkreisfläche $0 \leqq r \leqq 1$, $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$ der

---

*) Vgl. z. B. p. 39.

**) Eine derartige konforme Abbildung der x'- auf die X-Ebene ist p. 38, Fußn. *) angegeben.

***) Vgl. die Bemerkung in Fußn. *), p. 40.

X-Ebene entspricht und dessen Begrenzung aus der Strecke s_i und einem Kreisquadranten besteht.*) In diesem Segmente gilt daher a fortiori:

$$\frac{1}{\nu_k} \log |g_{\nu_k}(x')| \leqq \frac{1}{2} (\log Q + \log q)$$

d. h.

$$|g_{\nu_k}(x')| \leqq (\sqrt{Qq})^{\nu_k} = q_0^{\nu_k},$$

wobei $q_0 = \sqrt{Qq} < 1$ ist, da $q_0{}^4 = \frac{p_1{}^3}{p_0{}^2 p_2} < 1$.

Die Funktionen $g_{\nu_k}(x')$ $(k > k_0,\ k > i_0)$ besitzen also nunmehr die folgenden Eigenschaften:

$$(1^b) \qquad |g_{\nu_k}(x')| < Q^{\nu_k} \qquad \text{für } |x'| \leqq \frac{1}{2} \mathsf{A},$$

$$(2^b) \qquad g_{\nu_k}(0) = 1,$$

$$(3^b) \qquad |g_{\nu_k}(x')| \leqq q_0^{\nu_k} \qquad \text{innerhalb jedes Segmentes } S_i$$

$$(i = i_0 + 1,\ i_0 + 2, \cdots, k).$$

Bildet man daher die neue Summe**)

$$\bar{S}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{\nu_k}(x) y^{\nu_k},$$

so ist bei dieser offenbar $R'_x \geqq \frac{1}{q_0}$ für jeden Punkt x, welcher im Inneren eines *beliebigen* Segmentes $S_i (i > i_0)$ gelegen ist, dagegen $\frac{1}{Q} < R'_x \leqq 1$ für $x = 0$. Dies ergibt aber, da $\frac{1}{q_0} > 1$ ist, sofort einen Widerspruch gegen den Satz 1. Beschreibt man nämlich um $x = 0$ einen Kreis K_i, welcher durch den Mittelpunkt der Strecke s_i hindurchgeht, so entspricht derjenige Teil seiner Peripherie, welcher innerhalb des Segmentes S_i liegt, einem von i unabhängigen Zentriwinkel β, während mit wachsendem i der Radius des Kreises K_i beliebig klein wird.

3. *Sind die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, so gilt nicht nur* $\lim\limits_{\xi=0} \left| \frac{\xi'}{\xi} \right| = 1$, *sondern geradezu:*

$$\lim_{\xi=0} \frac{\xi'}{\xi} = 1.$$

(Dabei ist es gestattet, unter einer „zusammenhängenden, die Punkte ξ und ξ' verbindenden Linie“ allgemein eine beliebige abgeschlossene Punktmenge zu verstehen, welche es ermöglicht, nach Annahme irgend

*) Dies geht aus der benutzten konformen Abbildung unmittelbar hervor.

**) Der Bequemlichkeit halber ist von hier an die Veränderliche wieder mit x bezeichnet.

einer positiven Größe ε zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ eine endliche Anzahl von Punkten einzuschalten, deren sukzessive Entfernung kleiner ist als ε.)

Beweis. Gesetzt, der Satz träfe in einem bestimmten Falle nicht zu. Es kann alsdann nach Fixierung einer der Ungleichung $p > p' > R'$ genügenden positiven Größe p' um jeden Punkt einer der Linien L als Mittelpunkt ein Kreis beschrieben werden, für welchen durchweg die Bedingung $R'_x \geqq p'$ erfüllt ist. Nun lassen sich, da L eine abgeschlossene Punktmenge darstellt, aus diesen Kreisen stets eine *endliche* Anzahl derart herausgreifen, daß jeder Punkt von L sich im Inneren mindestens einer derselben befindet*); und es ist daher möglich, die beiden Endpunkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ der Linie L durch eine aus einer endlichen Anzahl *geradliniger* Stücke zusammengesetzte Linie L' zu verbinden, längs welcher durchweg $R'_x \geqq p'$ gilt. Da jede der Linien L durch eine derartige Linie L' ersetzt werden kann, so genügt es also, den Satz für den speziellen Fall zu erweisen, daß nur solche Linien L in Betracht gezogen werden, welche aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzt sind.

Es mögen nun entgegen der Behauptung Punktepaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ vorhanden sein, welche der Bedingung

$$\left|\frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{x}} - 1\right| > 6l > 0$$

genügen, während sich unter den Werten $\mathfrak{x}$ solche von beliebig kleinem absoluten Betrage befinden; die positive Zahl l mag dabei unterhalb $\frac{1}{3}$ gelegen sein. Es werde alsdann zunächst eine Größe $\varepsilon > 0$ willkürlich angenommen, $x = re^{i\varphi}$ gesetzt und mit $h(r, \varphi)$ eine im Kreise $r \leqq 1$ harmonische Funktion bezeichnet, welche längs des Bogens $l \leqq \varphi \leqq 2l$ der Kreisperipherie $r = 1$ den konstanten Wert $\log p$, längs des Bogens $3l \leqq \varphi \leqq 2\pi$ den konstanten Wert $\log R' - 2\varepsilon$ annimmt, während ihre Werte längs der übrigen Teile der Kreisperipherie durchweg zwischen den beiden soeben genannten gelegen seien, jedoch so gewählt werden mögen, daß nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Die so ein für allemal gewählte Funktion $h(r, \varphi)$ überschreitet nirgends die Größe $\log p$, für ihren Wert $h(0)$ im Mittelpunkte gilt speziell:

$$2\pi h(0) \geqq l \cdot \log p + (2\pi - l) \cdot (\log R' - 2\varepsilon), \tag{1}$$

und ferner läßt sich um jede der beiden Stellen $x = 1$ und $x = e^{3il}$ ein Kreis von solcher Kleinheit beschreiben, daß für jeden Punkt desselben, für welchen noch $r \leqq 1$ ist, die Ungleichung

*) Vgl. hierüber A. Schoenflies, Jahresber. d. D. M.-V. 8 (1899), p. 51—52. Die Gültigkeit für *beliebige* abgeschlossene Mengen ist leicht nachzuweisen. (Vgl. d. Verf. I.-D., München 1903, § 18.)

(2) $$h(r, \varphi) \leqq \log R' - \varepsilon$$

besteht; der kleinere unter den Radien dieser beiden Kreise möge mit 2σ bezeichnet werden.

Es bedeute nun τ die kleinere der beiden Zahlen $4l^2$ und σ. Man kann alsdann infolge der „einseitigen Stetigkeit" von R_x' und wegen des Satzes 2 eine Größe $A > 0$ derart bestimmen, daß einerseits

(3) $$R_x' > e^{-\varepsilon} R',$$

solange $|x| \leqq A$ bleibt, und andererseits

(4) $$1 - \tau < \left|\frac{\xi'}{\xi}\right| < 1 + \tau,$$

sobald ξ und ξ' irgend 2 Punkte sind, deren erster der Bedingung $|\xi| \leqq A$ genügt, und welche miteinander durch eine (aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke bestehende) Linie verbunden werden können, längs welcher durchweg $R_x' \geqq p$ ist.

Nach Annahme existieren nun sicher zwei Punkte ξ und ξ', welche den Bedingungen

$$|\xi| \leqq \frac{1}{2} A, \quad \left|\frac{\xi'}{\xi} - 1\right| > 6l$$

genügen und miteinander durch eine (aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke zusammengesetzte) Linie L verbunden werden können, längs welcher $R_x' \geqq p$ ist. Da $|\xi| \leqq \frac{1}{2} A$ ist, so folgt dann zunächst aus (4), daß auch die Ungleichung

$$1 - \tau < \left|\frac{\xi'}{\xi}\right| < 1 + \tau$$

befriedigt sein muß. Setzt man daher für den Augenblick $\frac{\xi'}{\xi} = \mu e^{i\omega}$ ($\mu > 0$, $-\pi \leqq \omega < \pi$), so hat man:

$$|\mu e^{i\omega} - 1|^2 = \mu^2 - 2\mu \cos\omega + 1 > 36l^2$$

und folglich

$$\cos\omega < 1 - \frac{36l^2 - (\mu - 1)^2}{2\mu}$$

oder, da $|\mu - 1| < \tau \leqq 4l^2$, also $(\mu - 1)^2 < 16l^4 < 2l^2$ und ferner $2\mu < 2(1 + \tau) \leqq 2(1 + 4l^2) < 3$,

$$\cos\omega < 1 - \frac{34l^2}{2\mu} < 1 - (3l)^2.$$

Ist nun $\cos\omega \geqq 0$, so ergibt sich aus

$$\cos^2\omega \leqq \cos\omega < 1 - (3l)^2$$

die Beziehung:

$$\sin^2\omega > (3l)^2$$

und somit
$$|\omega| \geqq |\sin \omega| > 3l.$$

Ist aber $\cos \omega \leqq 0$, also $|\omega| \geqq \frac{\pi}{2}$, so hat man ebenfalls $|\omega| > 3l$.

Durchwandert der Punkt x die Linie L in der Richtung von ξ nach ξ', so ändert der Ausdruck $\frac{x}{\xi}$, ohne irgendwo zu verschwinden, seinen Wert auf stetige Weise, und daher bewegt sich auch die Anomalie desselben, ausgehend vom Werte 0, stetig bis zu ihrem Endwerte $\omega \pm 2m\pi$ (wo m eine ganze Zahl). Da nun $|\omega \pm 2m\pi| \geqq |\omega| > 3l$ ist, so muß es auf L einen *ersten* Punkt $x = \xi_1$ geben, in welchem die Anomalie einen der beiden Werte $\pm 3l$ erreicht; auf dem Wege von ξ nach ξ_1 aber gibt es einen *letzten* Punkt $x = \xi_0$, in welchem sie den Wert 0 besitzt.*) Die beiden Punkte ξ_0 und ξ_1 sollen im folgenden mit $x_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ und $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ bezeichnet werden, und zwar so geordnet, daß — bei geeigneter Fixierung der in φ_0 und φ_1 noch enthaltenen willkürlichen Konstanten —
$$\varphi_1 = \varphi_0 + 3l$$
wird; das zwischen x_0 und x_1 gelegene Stück der Linie L möge L_0 genannt werden, wobei aber durch eventuelle Fortlassung einzelner Teile der Linie L dafür gesorgt sei, daß L_0 sich selbst nirgends durchsetze oder berühre. Ist alsdann $x = re^{i\varphi}$ irgend ein (nicht mit x_0 oder x_1 zusammenfallender) Punkt der Linie L_0, so genügt die Größe φ bei geeigneter Wahl der in ihr noch enthaltenen willkürlichen Konstanten der Bedingung:
$$\varphi_0 < \varphi < \varphi_1.$$

Überdies gilt nach (4) für *jeden* Punkt x der Linie L_0 (wie überhaupt der Linie L):
$$(1-\tau)|\xi| < |x| < (1+\tau)|\xi|$$
oder, da $\tau \leqq 4l^2 < \frac{1}{2}$ und $|\xi| \leqq \frac{1}{2}\mathsf{A}$:
$$\frac{1}{2}|\xi| < |x| < \frac{3}{4}\mathsf{A},$$
so daß auch für die *obere Grenze* α der absoluten Beträge aller Werte x längs der Linie L_0 die Ungleichung:
$$(5) \qquad \alpha \leqq \frac{3}{4}\mathsf{A}$$
besteht. Endlich gilt noch $\alpha \leqq (1+\tau) r_0$ (und ebenso $\alpha \leqq (1+\tau) r_1$), da $|x_0| < \frac{3}{4}\mathsf{A}$ ist und somit für jeden Punkt x der Linie L_0 gemäß (4) auch die Beziehung $|x| < (1+\tau) r_0$ stattfindet.

*) $\xi_0 = \xi$, falls die Anomalie den Wert 0 außer im Punkte ξ längs der Teilstrecke $\overline{\xi\xi_1}$ nirgends annimmt.

Setzt man nun $X_0 = \alpha e^{i\varphi_0}$ und $X_1 = \alpha e^{i\varphi_1}$, so daß

$$|X_0 - x_0| = \alpha - r_0 \leqq \tau r_0 \leqq \sigma\alpha$$

und ebenso $|X_1 - x_1| \leqq \sigma\alpha$, so bilden die geradlinige Strecke $\overline{X_0 x_0}$, die Linie L_0, die geradlinige Strecke $\overline{x_1 X_1}$ und endlich der Kreisbogen $x = \alpha e^{i\varphi}$ $(\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi)$ zusammen eine aus lauter geradlinigen Strecken und einem Kreisbogen bestehende, einfach geschlossene Kurve, welche einen den Nullpunkt enthaltenden Bereich B vollständig begrenzt.*) Es existiert alsdann eine in B harmonische Funktion $g(r, \varphi)$, welche längs aller nicht zu L_0 gehörigen Teile der Begrenzung den konstanten Wert $\log R' - \varepsilon$ besitzt, deren Randwerte längs der Linie L_0 jedoch nachstehenden Bedingungen entsprechen: Gibt es Teile von L_0, welche keinem der beiden Kreise $|x - X_0| < 2\sigma\alpha$, $|x - X_1| < 2\sigma\alpha$ angehören, so soll längs derselben $g(r, \varphi)$ den konstanten Wert $\log p$ besitzen; im übrigen sollen jedoch die Randwerte längs L_0 lediglich der Bedingung genügen, daß sie das durch die beiden Werte $\log R' - \varepsilon$ und $\log p$ eingeschlossene Intervall nirgends verlassen und daß die Randwerte sich längs der ganzen Begrenzung von B stetig aneinander fügen.

Man überzeugt sich alsdann sofort, daß für jeden Punkt der Begrenzung:

$$\log R_x' \geqq g(r, \varphi)$$

gilt; denn längs L_0 hat man $\log R_x' \geqq \log p \geqq g(r, \varphi)$ und längs aller übrigen Teile der Begrenzung infolge (5) und (3):

$$\log R_x' > \log R' - \varepsilon = g(r, \varphi).$$

Nach § 8, 1 gilt somit auch

$$\log R_x' \geqq g(r, \varphi)$$

für den ganzen Bereich B, speziell also, wenn $g(0)$ den Wert von $g(r, \varphi)$ für $r = 0$ bezeichnet:

$$\log R' \geqq g(0). \tag{6}$$

Die zu Beginn des Beweises eingeführte Funktion $h(r, \varphi)$ kann nun dazu dienen, den Wert $g(0)$ abzuschätzen. Die durch die Gleichung

$$\bar{h}(r, \varphi) = h\left(\frac{r}{\alpha}, \varphi - \varphi_0\right)$$

definierte Funktion ist nämlich im Kreise $|x| \leqq \alpha$ harmonisch und überschreitet nirgends die Größe $\log p$; längs des Kreisbogens $r = \alpha$, $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$ besitzt sie den Wert $\log R' - 2\varepsilon$; für ihren Wert

*) Ist speziell $\alpha = r_0$, so fallen die Punkte x_0 und X_0 zusammen, wobei dann die betreffende geradlinige Strecke wegfällt; analog wenn $\alpha = r_1$ ist.

$\bar{h}(0) = h(0)$ im Mittelpunkte gilt die Beziehung (1); endlich folgt aus (2) die Gültigkeit der Ungleichung

$$\bar{h}(r, \varphi) \leqq \log R' - \varepsilon$$

für alle Punkte (r, φ), welche der Bedingung $r \leqq \alpha$ genügen und zugleich einem der beiden Kreise $|re^{i\varphi} - X_0| \leqq 2\sigma\alpha$, $|re^{i\varphi} - X_1| \leqq 2\sigma\alpha$ angehören.

Es besteht infolgedessen längs der vollen Begrenzung des Bereiches B und mithin auch im ganzen Bereiche B selbst die Beziehung:

$$\bar{h}(r, \varphi) \leqq g(r, \varphi).$$

Soweit nämlich die Begrenzung von B einem der beiden soeben erwähnten Kreise angehört (speziell also längs der beiden geradlinigen Stücke $\overline{X_0 x_0}$ und $\overline{x_1 X_1}$, sowie längs einzelner Teile der Linie L_0) hat man:

$$\bar{h}(r, \varphi) \leqq \log R' - \varepsilon \leqq g(r, \varphi),$$

da ja die Funktion $g(r, \varphi)$ überhaupt nirgends unter $\log R' - \varepsilon$ herabsinkt. Für die keinem dieser beiden Kreise angehörigen Teile der Linie L_0 dagegen gilt:

$$\bar{h}(r, \varphi) \leqq \log p = g(r, \varphi),$$

da, wie bemerkt, $\bar{h}(r, \varphi)$ niemals den Wert $\log p$ überschreitet. Endlich ist längs des kreisförmigen Teiles der Begrenzung:

$$\bar{h}(r, \varphi) = \log R' - 2\varepsilon; \quad g(r, \varphi) = \log R' - \varepsilon,$$

so daß hier die Behauptung ebenfalls zutrifft. Infolgedessen gilt also speziell

$$\bar{h}(0) \leqq g(0)$$

und daher gemäß (6) und (1):

$$\log R' \geqq g(0) \geqq \bar{h}(0) \geqq \frac{l}{2\pi} \log p + \frac{2\pi - l}{2\pi} (\log R' - 2\varepsilon)$$

oder:

$$0 \geqq l(\log p - \log R') - (2\pi - l)\, 2\varepsilon.$$

Diese Ungleichung müßte nun für jeden positiven Wert von ε Geltung haben, was der Voraussetzung widerspricht, nach welcher $p > R'$ ist.

§ 10.

Nachweis, daß die in § 8 bewiesene Eigenschaft der Größe R_x' unter gewissen Einschränkungen für dieselbe charakteristisch ist.

1. Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß die in § 8, 1 bewiesene Eigenschaft der Größe R_x' unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen für dieselbe *charakteristisch* ist.*)

---

*) Es möge dabei auch an die funktionentheoretische Bedeutung der Größe R_x' erinnert werden, wie sie z. B. in § 6, Satz 1 ausgedrückt ist.

Der Bereich T der x-Ebene möge *meßbar* sein, ferner einfach zusammenhängend oder wenigstens durch eine endliche Anzahl von Schnitten in einen einfach zusammenhängenden überführbar. Es wird alsdann angenommen, daß eine im Bereiche T eindeutig definierte, reelle Größe U_x vorgelegt sei, und daß e^{U_x} für jeden beliebigen, dem Bereiche T angehörenden Bereich B diejenige Eigenschaft besitze, welche nach dem oben erwähnten Satze der Größe R_x' zukommt. Die Aufgabe ist alsdann, eine Reihe von analytischen Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ anzugeben, welche sich im Bereiche T sämtlich eindeutig und regulär verhalten und es bewirken, daß die zur Reihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu$$

gehörige Größe R_x' im Bereiche T durchweg mit e^{U_x} identisch werde.

Über die Größe U_x soll dabei jedoch vorausgesetzt werden, daß sie nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v im Bereiche T endlich*) und stetig sei. Sie genügt alsdann, wie aus § 8, 3 hervorgeht**), für jeden Punkt des Bereiches T der Ungleichung

$$\Delta U_x = \frac{\partial^2 U_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial v^2} \leqq 0,$$

welche uns für das folgende als Ausgangspunkt dienen wird. Setzt man:

$$\Delta U_x = -2\pi k_x,$$

so ist die für den Bereich T definierte Größe k_x daselbst durchweg $\geqq 0$, sowie nach Voraussetzung endlich und stetig. Bleibt sie, wie wir weiterhin annehmen wollen, in T unterhalb einer endlichen Schranke K, so existiert also das Integral

$$V_{x_0} = \iint\limits_T k_x \log \frac{1}{r}\, du\, dv \qquad (r = |x - x_0|)$$

für jeden Punkt $x = x_0$ des Bereiches T, und zwar, wenn man von demjenigen Teile des Integrationsgebiets, welcher der Umgebung des Punktes x_0 angehört, absieht, als *eigentliches Integral*. Es soll aber noch des weiteren vorausgesetzt werden, daß k_x irgend ein System von Bedingungen erfülle, welche die Gültigkeit der Beziehung

*) Demnach bleibt u. a. der Fall, wo für R_x' in gewissen Punkten von T der Wert 0 vorgeschrieben ist, von der folgenden Betrachtung ausgeschlossen.

**) Wie aus dem dortigen Beweise ersichtlich ist, würde es bereits genügen, die Eigenschaft der Größe U_x für alle dem Bereiche T angehörenden *kreisförmigen* Bereiche B auszusprechen.

$$\Delta V_x = -2\pi k_x$$

für alle x des Bereiches T gewährleisten.*)

Erfüllt nun die Größe U_x im Bereiche T die sämtlichen erwähnten Voraussetzungen, so läßt sich stets eine Reihe $S(x, y) = \sum\limits_{\nu} f_{\nu}(x) y^{\nu}$ nachweisen, deren Koeffizienten $f_{\nu}(x)$ im Bereiche T eindeutig und regulär sind, und für welche R_x' im Bereiche T durchweg mit e^{U_x} zusammenfällt.

Es ist nämlich die Funktion

$$h_x = U_x - V_x$$

im Bereich T stetig und genügt an jeder Stelle desselben der Differentialgleichung $\Delta h_x = 0$. Ist also der Bereich T, wie wir fürs erste annehmen wollen, einfach zusammenhängend, so existiert eine in T eindeutige und reguläre analytische Funktion $f(x)$, welche der Bedingung:

$$\log |f(x)| = -h_x$$

genügt.

Es möge nun in der x-Ebene irgend ein Quadrat Q fixiert werden, welches in seinem Innern den ganzen Bereich T enthält; das Zeichen Q bedeute zugleich den Inhalt desselben. Für alle diejenigen Werte von ν, welche nicht eine ganzzahlige Potenz der Zahl 8 sind, werde

$$f_{\nu}(x) = 0$$

gesetzt. Ist dagegen $\nu = 8^{\lambda}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$, so denken wir uns das Quadrat Q in 4^{λ} einander kongruente Teilquadrate $Q_{\sigma}^{(\lambda)}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, 4^{\lambda})$ zerlegt, den Mittelpunkt eines jeden derselben mit $x_{\sigma}^{(\lambda)}$ bezeichnet, verstehen unter $k_{\sigma}^{(\lambda)}$ den Wert der Größe k_x im Punkte $x = x_{\sigma}^{(\lambda)}$, vorausgesetzt, daß dieser Punkt dem Bereiche T noch angehört, andernfalls den Wert 0, bezeichnen mit $m_{\sigma}^{(\lambda)}$ die größte nicht oberhalb $2^{\lambda} Q k_{\sigma}^{(\lambda)}$ gelegene ganze Zahl und definieren $f_{\nu}(x)$ vermöge der Gleichung

$$f_{\nu}(x) = f[(x)]^{\nu} \prod_{\sigma=1}^{4^{\lambda}} (x - x_{\sigma}^{(\lambda)})^{m_{\sigma}^{(\lambda)}}$$

als eine in T reguläre analytische Funktion.

Zunächst sieht man leicht, daß für die so entstehende Reihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(x) y^{\nu}$$

im Bereiche T durchweg $R_x' > 0$ ausfällt. Ist nämlich $x = x_0$ irgend ein

---

*) Ein derartiges System von Bedingungen ist z. B., daß k_x in T endliche und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach u und v besitze, oder auch, daß ΔV_x existiere und stetig sei. (Siehe z. B. Kronecker, Vorl. üb. d. Th. d. einfachen und d. vielfachen Integrale, Leipzig 1894, XVI §§ 7—8.)

Punkt des Bereiches T und gehört die Kreisfläche $|x - x_0| \leqq \varrho$ dem letzteren noch vollständig an, so besitzt der absolute Betrag von $f(x)$ für diese Kreisfläche eine obere Schranke G. Wählt man alsdann die positive Zahl d größer als 1, mindestens aber gleich der Diagonale des Quadrates Q, so hat man für jeden Wert von ν und für alle Werte x, welche der Bedingung $|x - x_0| \leqq \varrho$ genügen:

$$|f_\nu(x)| \leqq G^\nu \prod_{\sigma=1}^{4^\lambda} d^{2^\lambda Q K} = (G \cdot d^{QK})^\nu.$$

Mithin konvergiert $S(x, y)$ für jeden der Bedingung

$$|y| < \frac{1}{G \cdot d^{QK}}$$

genügenden Wert von y im Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho$ gleichmäßig, und es ist also:

$$R_x' \geqq \frac{1}{G \cdot d^{QK}} > 0$$

für $|x - x_0| < \varrho$, speziell also für $x = x_0$.

Nunmehr möge die Größe P_x' für irgend eine Stelle $x = x_0$ des Bereiches aufgesucht werden. Es ist nach Definition:

$$\frac{1}{\mathsf{P}_x'} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|f_\nu(x)|} = |f(x)| \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \prod_{\sigma=1}^{4^\lambda} |x - x_\sigma^{(\lambda)}|^{\frac{m_\sigma^{(\lambda)}}{8^\lambda}},$$

also:

$$\log \mathsf{P}_{x_0}' = h_{x_0} - \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \sum_{\sigma=1}^{4^\lambda} \frac{m_\sigma^{(\lambda)}}{8^\lambda} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|.$$

Für jeden (hinreichend großen) Wert von λ möge nun das aus denjenigen 5^2 Quadraten $Q_\sigma^{(\lambda)}$, deren mittelstes den betrachteten Punkt x_0 (im Innern oder auf der Begrenzung) enthält, zusammengesetzte größere Quadrat mit $Q^{(\lambda)}$ bezeichnet werden. Die ganze positive Zahl l werde alsdann so groß gewählt, daß das Quadrat $Q^{(l)}$ noch ganz innerhalb T gelegen, und daß seine Diagonale kleiner als 1 sei. Für jede der Zahlen $\lambda = l,\ l+1, \cdots$ seien diejenigen der Werte $\sigma = 1, 2, \cdots, 4^\lambda$, für welche $Q_\sigma^{(\lambda)}$ dem Quadrate $Q^{(l)}$ angehört, abkürzend mit σ', die übrigen mit σ'' bezeichnet.

Es existiert alsdann

$$-\lim_{\lambda=\infty} \sum_{\sigma''} \frac{m_\sigma^{(\lambda)}}{8^\lambda} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|$$

und stimmt überein mit dem eigentlichen Integral

$$\iint\limits_{T-Q^{(l)}} k_x \log \frac{1}{r}\, du\, dv \qquad (r = |x_0 - x|),$$

erstreckt über den Bereich T mit Ausschluß des Quadrates $Q^{(l)}$. Da nämlich

$$m_\sigma^{(\lambda)} = 2^\lambda Q k_\sigma^{(\lambda)} - \vartheta_\sigma^{(\lambda)} \qquad (0 \leqq \vartheta_\sigma^{(\lambda)} < 1),$$

so ist

$$-\lim_{\lambda=\infty} \sum_{\sigma''} \frac{m_\sigma^{(\lambda)}}{8^\lambda} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| = -\lim_{\lambda=\infty} \sum_{\sigma''} k_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \frac{Q}{4^\lambda}$$
$$+ \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma''} \vartheta_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|.$$

Der erste dieser beiden Terme stimmt offenbar mit dem erwähnten Integrale überein; der andere aber ist gleich Null, denn man hat für alle Werte $\sigma = \sigma''$:

$$2a \leqq |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \leqq d \qquad (\lambda = l,\ l+1, \cdots),$$

wo a die Seitenlänge eines Quadrates $Q_\sigma^{(l)}$ bezeichnet, während d die nämliche Bedeutung hat wie oben; also

$$\left| \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \right| \leqq \mathsf{A},$$

wo A die größere der beiden Zahlen $|\log 2a|$ und $\log d$ bedeutet. Folglich ist

$$\left| \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma''} \vartheta_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \right| \leqq \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma''} \left| \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \right| \leqq \frac{1}{2^\lambda} \mathsf{A}$$

und

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma''} \vartheta_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| = 0.$$

Demnach kann man nun schreiben:

$$(1) \quad \log \mathsf{P}'_{x_0} = h_{x_0} + \iint\limits_{T-Q^{(l)}} k_x \log \frac{1}{r}\, du\, dv - \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma'} m_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|$$
$$(r = |x_0 - x|).$$

Um noch den letzten Term in diesem Ausdrucke abzuschätzen, fassen wir fürs erste den Grenzwert

$$(2) \qquad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{1}{4^\lambda} \sum_{\sigma'} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|$$

ins Auge. Zunächst ist für $\lambda = l$ (in welchem Falle σ' 25 Werte zu durchlaufen hat) offenbar:

$$\frac{1}{4^\lambda} \sum_{\sigma'} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{1}{4^l} \left\{ 16 \log a + 8 \log \frac{a}{2} + \log |x_0 - x^{(l)}| \right\},$$

wobei a die oben angegebene Bedeutung besitzt, während $x^{(l)}$ den Mittelpunkt des Quadrates $Q^{(l)}$ bezeichnet.

Geht man nun zur Bildung der Summe für den Wert $\lambda = l + 1$ über, so treten an die Stelle jedes einem Quadrate $Q_\sigma^{(l)}$ entsprechenden Summanden $\log |x_0 - x_\sigma^{(l)}|$ vier neue Summanden $\log |x_0 - x_\sigma^{(l+1)}|$, wobei die vier Punkte $x_\sigma^{(l+1)}$ die Mittelpunkte der vier Teilquadrate von $Q_\sigma^{(l)}$ sind. (Vgl. nebenstehende, das Quadrat $Q^{(l)}$ darstellende Figur.) Was dabei zunächst die 16 äußeren Quadrate $Q_\sigma^{(l)}$ betrifft, so war *jeder beliebige* Punkt derselben vom Punkte x_0 mindestens um die Strecke a entfernt, und es gilt somit auch für jeden der zugehörigen $4 \cdot 16$ Werte $x_\sigma^{(l+1)}$:

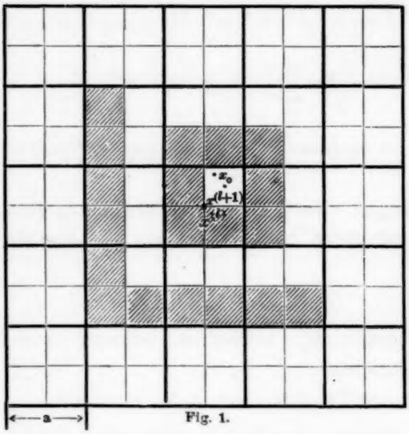

Fig. 1.

$$\log |x_0 - x_\sigma^{(l+1)}| \geqq \log a.$$

Beachtet man dann noch den voranstehenden Faktor, welcher nunmehr $\frac{1}{4^{l+1}}$ lautet, so ist ersichtlich, daß das erste Glied auf der rechten Seite der zu bildenden Ungleichung unverändert aus der vorigen herübergenommen werden kann.

Was nun die übrigen 9 Quadrate $Q_\sigma^{(l)}$ betrifft, so entstehen aus ihnen 36 Quadrate $Q_\sigma^{(l+1)}$. Von denjenigen 4 Quadraten $Q_\sigma^{(l+1)}$, welche aus dem mittelsten jener 9 Quadrate hervorgehen, enthält sicher eines (dessen Mittelpunkt mit $x^{(l+1)}$ zu bezeichnen ist) den Punkt x_0 (in seinem Innern oder auf seiner Begrenzung), an dieses grenzen 8 weitere Quadrate $Q_\sigma^{(l+1)}$, letztere wiederum werden von 16 angrenzenden Quadraten $Q_\sigma^{(l+1)}$ eingerahmt, und um diese legen sich endlich die noch fehlenden 11, die Form eines L bildend. Was zunächst diese letzten 11 Quadrate $Q_\sigma^{(l+1)}$ betrifft, so ist *jeder* Punkt derselben um mindestens die Strecke a von x_0 entfernt, des weiteren *jeder* Punkt der vorher genannten 16 Quadrate mindestens um $\frac{a}{2}$; bei den davor erwähnten 8 Quadraten endlich sind die *Mittelpunkte* mindestens um $\frac{a}{4}$ von x_0 entfernt. Man erhält also schließlich für $\lambda = l + 1$ die Ungleichung:

$$\frac{1}{4^\lambda} \sum_{\sigma'} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{1}{4^l} \Big\{ 16 \log a + \frac{1}{4} \Big[11 \log a + 16 \log \frac{a}{2} + 8 \log \frac{a}{4} + \log |x_0 - x^{(l+1)}| \Big] \Big\}.$$

Geht man nun zur Betrachtung des Wertes $\lambda = l + 2$ über, so können die drei ersten Glieder der rechten Seite aus der vorigen Ungleichung unverändert herübergenommen werden, da von den betreffenden Quadraten festgestellt ist, daß nicht nur ihre Mittelpunkte, sondern jeder beliebige Punkt derselben (speziell also die Mittelpunkte der jedesmaligen vier Teilquadrate) die bezügliche Minimalentfernung vom Punkte x_0 besitzen. Es bleiben also wiederum nur die 9 inneren Quadrate $Q_\sigma^{(l+1)}$ genau in der gleichen Weise wie das vorige Mal zu behandeln, und es ergibt sich mithin für $\lambda = l + 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4^\lambda}\sum_{\sigma'} \log|x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{1}{4^l}\Big\{16\log a &+ \frac{1}{4}\Big[11\log a + 16\log\frac{a}{2}\Big]\\ &+ \frac{1}{4^2}\Big[11\log\frac{a}{2} + 16\log\frac{a}{4}\\ &+ 8\log\frac{a}{8} + \log|x_0 - x^{(l+2)}|\Big]\Big\}\end{aligned}$$

und ebenso für $\lambda = l + p$ $(p = 0, 1, 2, \cdots)$:

$$\begin{aligned}(3)\quad \frac{1}{4^\lambda}\sum_{\sigma'} \log|x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{1}{4^l}\Big\{16\log a &+ \frac{1}{4}\Big[11\log a + 16\log\frac{a}{2}\Big]\\ &+ \frac{1}{4^2}\Big[11\log\frac{a}{2} + 16\log\frac{a}{4}\Big]\\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &+ \frac{1}{4^{p-1}}\Big[11\log\frac{a}{2^{p-2}} + 16\log\frac{a}{2^{p-1}}\Big]\\ &+ \frac{1}{4^p}\Big[11\log\frac{a}{2^{p-1}} + 16\log\frac{a}{2^p}\\ &+ 8\log\frac{a}{2^{p+1}} + \log|x_0 - x^{(l+p)}|\Big]\Big\},\end{aligned}$$

wobei $x^{(l+p)}$ der Mittelpunkt eines Quadrates $Q_\sigma^{(l+p)}$ ist, welches den Punkt x_0 enthält.

Unter den Werten von p können sich speziell solche befinden, für welche

$$|x_0 - x^{(l+p)}| < \frac{1}{5}\cdot\frac{a}{2^p}$$

ist (wo $\frac{a}{2^p}$ die Seitenlänge der Quadrate $Q_\sigma^{(l+p)}$ darstellt). In diesem Falle ist aber offenbar

$$|x_0 - x^{(l+p+1)}| > \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{5}\right)\frac{a}{2^p} > \frac{1}{5}\,\frac{a}{2^{p+1}},$$

d. h. der erwähnte Fall tritt für den nächstgrößeren Wert von p *nicht* ein. Übergeht man also bei der Bildung des Grenzwertes (2) alle diejenigen Werte von $\lambda = l + p$, welche einem jener speziellen Werte p ent-

sprechen, so erhält man, da sicher noch unendlich viele Werte λ übrig bleiben, den oberen Limes einer *Teilfolge*, welcher den ursprünglich betrachteten keinesfalls übertreffen kann. Für diejenigen Werte von p, welche nicht zu jenen Ausnahmswerten gehören, ergibt sich nun, indem man

$$\log |x_0 - x^{(l+p)}| \geqq \log \left(\frac{1}{5} \frac{a}{2^p}\right)$$

in die Ungleichung (3) einsetzt und deren Terme zusammenfaßt,

$$\frac{1}{4^\lambda} \sum_{\sigma'} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{1}{4^l} \left\{25 \log a - \frac{25}{3} \log 2 + \frac{1}{4^p} \left(\frac{1}{3} \log 2 - \log 5\right)\right\}$$
$$(\lambda = l + p),$$

und daher gilt (wenn man andererseits noch berücksichtigt, daß in $\sum\limits_{\sigma'} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|$ stets alle Terme negativ sind)

$$0 \geqq \overline{\lim_{\lambda = \infty}} \frac{1}{4^\lambda} \sum_{\sigma'} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{25}{4^l} \log \frac{a}{\sqrt[3]{2}}.$$

Hieraus folgt aber, da ganz allgemein

$$0 \leqq \frac{m_\sigma^{(\lambda)}}{2^\lambda} \leqq QK$$

gilt, wenn man schließlich noch a durch seinen Wert $\frac{1}{2^l}\sqrt{Q}$ ersetzt, die Beziehung:

$$0 \geqq \overline{\lim_{\lambda = \infty}} \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma'} m_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}| \geqq \frac{25}{4^l} QK \left[\frac{1}{2} \log Q - \left(l + \frac{1}{3}\right) \log 2\right],$$

aus welcher hervorgeht, daß die Größe

$$\overline{\lim_{\lambda = \infty}} \frac{1}{8^\lambda} \sum_{\sigma'} m_\sigma^{(\lambda)} \log |x_0 - x_\sigma^{(\lambda)}|$$

mit wachsendem l*) sich der Grenze Null nähert.

Geht man also in der Gleichung (1) für $l = \infty$ zur Grenze über, so ergibt sich (da das Integral mit wachsendem l, d. h. bei verschwindendem $Q^{(l)}$, sich, wie bekannt, einem Grenzwert nähert, welcher mit $\int\!\!\int_T k_x \log \frac{1}{r}\, du\, dv$ bezeichnet wird):

$$\log \mathsf{P}_{x_0} = h_{x_0} + \int\!\!\int_T k_x \log \frac{1}{r}\, du\, dv = h_{x_0} + V_{x_0} = U_{x_0} \qquad (r = |x_0 - x|),$$

*) Die Abhängigkeit dieser Größe von l ist darin begründet, daß (bei jedem λ) σ' alle Werte zu durchlaufen hat, für welche der Punkt $x_\sigma^{(\lambda)}$ dem Quadrate $Q^{(l)}$ angehört.

und somit gilt

$$\mathsf{P}'_x = e^{U_x}$$

für jeden Punkt x des Bereiches T.

Nach § 5, 4 hat man nun für irgend einen Punkt $x = x_0$ des Bereiches entweder

$$R'_{x_0} = 0 \quad \text{oder} \quad R'_{x_0} = \lim_{x=x_0} \mathsf{P}'_x.$$

Da aber ersteres, wie oben gezeigt wurde, ausgeschlossen ist, und da ferner infolge der Stetigkeit der Funktion U_x:

$$\lim_{x=x_0} \mathsf{P}'_x = \lim_{x=x_0} e^{U_x} = e^{U_{x_0}},$$

so erhält man schließlich:

$$R'_{x_0} = e^{U_{x_0}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

2. Ist der Bereich T nicht einfach zusammenhängend, so braucht es eine in T eindeutige und reguläre Funktion $f(x)$, welche der Bedingung $\log|f(x)| = -h_x$ genügt, nicht zu geben. Läßt sich aber, wie wir jetzt annehmen wollen, der Bereich T durch eine endliche Anzahl von Schnitten in einen einfach zusammenhängenden verwandeln, so kann man eine endliche Anzahl nicht zu T gehöriger Punkte $x_1, x_2, \cdots, x_q$ der x-Ebene angeben, welche die Eigenschaft besitzen, daß jede in T gelegene, geschlossene Kurve, welche irgend einen nicht zu T gehörigen Punkt einschließt, auch mindestens einen der q Punkte $x_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, q)$ einschließt, und daß es speziell je eine in T gelegene, sich selbst nirgends schneidende, geschlossene Kurve gibt, welche *einen*, $x_\varkappa$, dieser q Punkte, jedoch keinen anderen unter ihnen einschließt. Bezeichnet man dann das Integral

$$\int \frac{\partial h_x}{\partial u}\,dv - \frac{\partial h_x}{\partial v}\,du,$$

im positiven Sinne über die letztgenannte Kurve erstreckt, mit $-2\pi\alpha_\varkappa$ und setzt

$$\bar{h}_x = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial h_x}{\partial u}\,dv - \frac{\partial h_x}{\partial v}\,du,$$

wo x_0 einen beliebigen festen Punkt des Bereiches T bedeutet, dem auch der ganze Integrationsweg angehören soll, so ist die analytische Funktion

$$f_0(x) = e^{-h_x - i\bar{h}_x} \prod_{\varkappa=1}^{q} (x - x_\varkappa)^{-\alpha_\varkappa},$$

sobald über ihren Wert im Punkte $x = x_0$ eine Bestimmung getroffen ist,

für alle x des Bereiches T eindeutig und regulär, während jeder Zweig der mehrdeutigen Funktion

$$f(x) = f_0(x) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{q} (x - x_\varkappa)^{\alpha_\varkappa} = e^{-h_x - i\bar{h}_x}$$

für alle x des Bereiches T der Bedingung

$$\log |f(x)| = -h_x$$

genügt.

Es werde nun für $\nu = 8^\lambda$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$ gesetzt:

$$f_\nu(x) = [f_0(x)]^\nu \cdot \prod_{\varkappa=1}^{q} (x - x_\varkappa)^{\alpha_\varkappa^{(\lambda)}} \cdot \prod_{\sigma=1}^{4^\lambda} (x - x_\sigma^{(\lambda)})^{m_\sigma^{(\lambda)}},$$

wo $\alpha_\varkappa^{(\lambda)}$ die größte nicht oberhalb $8^\lambda \alpha_\varkappa$ gelegene (positive oder negative) ganze Zahl bedeute, während die übrigen Größen ihre frühere Bedeutung beibehalten sollen. $f_\nu(x)$ ist alsdann wieder eine in T eindeutige und reguläre analytische Funktion; der Beweis dafür, daß die Reihe

$$S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$$

die verlangte Eigenschaft besitze, weist nur geringfügige Abweichungen gegen den obigen auf.

§ 11.

Die Diagonalenreihen der Potenzreihen zweier Veränderlichen.

1. Um den in § 2 bewiesenen Satz in ähnlicher Weise, wie dies in den §§ 5 und 6 für die Reihen von der Form $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ geschehen ist, auch für die *Diagonalenreihen der Potenzreihen zweier Veränderlichen* nutzbar zu machen, gehen wir von folgenden Betrachtungen aus.

Ist eine Reihe $S(x, y) = \sum_\nu f_\nu(x) y^\nu$ sowie ein beliebiger Bereich T der x-Ebene vorgelegt, und bezeichnet man einerseits mit P' die obere Grenze der absoluten Beträge aller Werte y, für welche $S(x, y)$ im Bereiche T durchweg konvergent ist, andererseits mit r' die obere Grenze der absoluten Beträge derjenigen Werte y, für welche $S(x, y)$ in der Umgebung jedes Punktes x des Bereiches T *gleichmäßig* konvergiert*), so wurde in § 2 der Nachweis geführt, daß r' notwendig einem der beiden

*) Anders ausgedrückt, mit P' die *untere Grenze* aller Größen P'_x, mit r' diejenige aller Größen R'_x des Gebietes T.

Werte 0 oder P' gleichkommen muß. Es läßt sich nun eine ausgedehnte Klasse von Reihen $S(x, y)$ anführen, bei welchen — unabhängig von der Wahl des Bereiches T — stets der *letztere* Fall eintreten muß.

Sind nämlich die $f_\nu(x)$ sämtlich ganze rationale Funktionen vom Grade n_ν und bleibt der Quotient $\frac{n_\nu}{\nu}$ unterhalb einer endlichen Schranke N), so gilt für jeden beliebigen endlichen Bereich T unter allen Umständen $r' = \mathrm{P}'$.*

Dabei lassen sich noch zwei Fälle voneinander unterscheiden. Bezeichnet man nämlich mit $\mathfrak{P}(x, y)$ die Doppelreihe, welche aus $S(x, y)$ hervorgeht, wenn jede der Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von x geordnet wird, so gilt des weiteren:

Entweder ist die Größe $r' = \mathrm{P}'$ für jeden endlichen Bereich T der x-Ebene größer als Null, oder für jeden solchen Bereich gleich Null. Ersteres tritt stets dann und nur dann ein, wenn die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ einen Bereich der absoluten Konvergenz besitzt (d. h. in irgend einem Punkte (x_0, y_0) absolut konvergiert, dessen Koordinaten beide von Null verschieden sind).

Beweis. Für einen gewissen Bereich T der x-Ebene gelte $\mathrm{P}' > 0$. Der Wert $y = y_0$ genüge der Bedingung $0 < |y_0| < \mathrm{P}'$, so daß $S(x, y_0)$ im Bereiche T durchweg konvergiert. Es gibt alsdann**) einen zweidimensionalen Teilbereich B des Bereiches T, in welchem $S(x, y)$ sicher *gleichmäßig* konvergiert, solange $|y| < |y_0|$ ist. Ist $x = x_0$ irgend ein innerer Punkt dieses Bereiches B und gehört das Gebiet $|x - x_0| \leqq \varrho_0$ dem Bereiche B noch vollständig an, so konvergiert also die Doppelreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x - x_0, y)$, welche aus $S(x, y)$ hervorgeht, wenn jede der Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$ geordnet wird, sicher für $|x - x_0| < \varrho_0$, $|y| < |y_0|$ absolut***), und daher offenbar auch für $|x - x_0| < \alpha\varrho_0$, $|y| < \frac{|y_0|}{\alpha^N}$, wenn α eine beliebige positive Zahl oberhalb 1 bedeutet.

Ein völlig beliebiger endlicher Bereich der x-Ebene werde nun mit $\overline{T}$ bezeichnet. Wird alsdann ϱ so groß gewählt, daß das Gebiet $|x - x_0| < \varrho$

*) Daß dieser einschränkende Zusatz nicht einfach fortgelassen werden darf, d. h. daß auch, wenn alle $f_\nu(x)$ ganze rationale Funktionen sind, der Fall $r' = 0$, $\mathrm{P}' > 0$ eintreten kann, zeigt das Beispiel p. 11, Fußn. *). Damit soll aber keineswegs gesagt werden, daß jener Zusatz die *allgemeinste* Bedingung angebe; vielmehr gilt, wenn man z. B. $f_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n_\nu} \frac{x^\nu}{\nu!}$ setzt, wo die n_ν *völlig beliebig* sind, für irgend einen endlichen Bereich T: $|f_\nu(x)| < e^X$, wo X die obere Grenze aller $|x|$ des Bereiches T bedeutet, und folglich $r' \geqq 1$; somit ist auch hier für jeden endlichen Bereich $r' = \mathrm{P}'$.

**) S. p. 27, Fußn. *).

***) S. p. 32, Fußn. ***).

den ganzen Bereich $\overline{T}$ in seinem Inneren enthält (mindestens aber $\varrho = \varrho_0$), und setzt man $\alpha = \frac{\varrho}{\varrho_0}$, so konvergiert die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ für $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \frac{|y_0|}{\alpha^N}$ absolut, und somit*) $S(x, y)$, solange $|y| < \frac{|y_0|}{\alpha^N}$ bleibt, in der Umgebung jedes Punktes x des Gebietes $|x - x_0| < \varrho$, speziell also des Gebietes $\overline{T}$ *gleichmäßig*. Es gilt somit für den Bereich $\overline{T}$ $r' > 0$ und folglich auch $r' = \mathsf{P}'$.

Wählt man endlich als Bereich $\overline{T}$ speziell irgend einen Kreis um den Nullpunkt, etwa denjenigen mit dem Radius 1, so ist die zugehörige Größe r' ebenfalls größer als 0; bezeichnet man ihren Wert mit r_0', so konvergiert also $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiete $|x| < 1$, $|y| < r_0'$ absolut. — Konvergiert umgekehrt $\mathfrak{P}(x, y)$ in irgend einem Punkte (x_0, y_0), dessen Koordinaten von Null verschieden sind, absolut, also auch für jeden Punkt des Gebietes $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, so konvergiert $S(x, y)$, solange $|y| < |y_0|$ bleibt, in der Umgebung jeder Stelle x des Bereiches $|x| < |x_0|$ gleichmäßig, und es gilt für den letzteren mithin $r' > 0$.

Hiermit ist aber die Behauptung in allen ihren Teilen erwiesen.

2. Das Vorige gestattet nun sofort folgende Anwendung auf die Diagonalenreihen der Potenzreihen zweier Veränderlichen.

Konvergiert die Diagonalenreihe

$$D(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\mu}^{(\lambda-\mu)} x^{\mu} y^{\lambda-\mu} \right\}$$

einer Potenzreihe zweier Veränderlichen

$$\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} y^{\nu}$$

für jeden Punkt (x, y) irgend eines Bereiches T der xy-Mannigfaltigkeit, so konvergiert sie in der Umgebung eines jeden dieser Punkte allemal auch ***gleichmäßig*** *und stellt eine im Bereiche T reguläre analytische Funktion von (x, y) dar.*

*Bereiche T von der angegebenen Eigenschaft existieren jedoch nur dann, wenn die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ einen Bereich der absoluten Konvergenz besitzt.***)

*) S. p. 32, Fußn. ***).

**) Selbstverständlich kann aber T über den Bereich der absoluten Konvergenz von $\mathfrak{P}(x, y)$ hinausragen. Besitzt z. B. die Potenzreihe $\sum c_{\mu} x^{\mu}$ den Konvergenzradius 1 und setzt man $a_{\mu}^{(\nu)} = a_{\nu}^{(\mu)} = \binom{\mu + \nu}{\mu} c_{\mu+\nu}$, so wird der Bereich der absoluten Konvergenz von $\mathfrak{P}(x, y)$ dargestellt durch $|x| + |y| < 1$; hingegen konvergiert $D(x, y)$ offenbar für $|x + y| < 1$.

Dem Beweise sei folgende Bemerkung vorausgeschickt. Setzt man $x = yz$ sowie $x' = y'z'$ und ist y' von Null verschieden, so verhält sich eine an der Stelle $x = x'$, $y = y'$ reguläre analytische Funktion von (x, y), wenn man sie als Funktion von z und y auffaßt, an der Stelle $z = z'$, $y = y'$ ebenfalls regulär, und umgekehrt. Es ergibt sich dies daraus, daß man sowohl $x - x'$ nach positiven Potenzen von $y - y'$ und $z - z'$, als auch $z - z'$ nach positiven Potenzen von $x - x'$ und $y - y'$ entwickeln kann, wobei das konstante Glied der Entwicklung jedesmal den Wert 0 erhält; vermöge der ersten Entwicklung z. B. läßt sich nun irgend eine nach Potenzen von $x - x'$ und $y - y'$ fortschreitende absolut konvergente Doppelreihe in eine neue, nach Potenzen von $z - z'$ und $y - y'$ fortschreitende Doppelreihe überführen, welche für hinreichend kleine Werte von $|z - z'|$ und $|y - y'|$ ebenfalls absolut konvergiert.*)

Durch die Substitution $x = yz$ geht die Reihe $D(x, y)$ in eine Reihe

$$S(z, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_\lambda(z) y^\lambda$$

über, wobei

$$f_\lambda(z) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_\mu^{(\lambda-\mu)} z^\mu \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$$

eine ganze rationale Funktion von höchstens dem λ^{ten} Grade darstellt.

Ist nun (x', y') ein beliebiger Punkt des Bereiches T und bestimmt man eine Größe $\varkappa$, deren absoluter Betrag oberhalb 1 liege, so, daß der Punkt

$$x_0 = \varkappa x', \quad y_0 = \varkappa y'$$

dem Bereiche T ebenfalls noch angehöre, so konvergiert die Reihe $D(x, y_0)$ in der ganzen Umgebung des Punktes $x = x_0$, und daher, wenn man den Fall $y' = 0$ zunächst ausschließt, die Reihe $S(z, y_0)$ in einer gewissen Umgebung Z des Punktes $z' = \frac{x_0}{y_0} = \frac{x'}{y'}$ der z-Ebene. Alsdann lehrt aber der in Nr. 1 bewiesene Satz, daß $S(z, y)$, solange $|y| < |y_0|$ bleibt, im Bereiche Z sicher auch *gleichmäßig* konvergiert. Ist daher ϱ' eine beliebige positive Zahl unterhalb $|y_0|$, welche jedoch zugleich größer als $|y'|$ gewählt sei, und beschränkt man einerseits y auf das Gebiet $|y| \leqq \varrho'$, andererseits z auf den Bereich Z, so muß offenbar $S(z, y)$ auch in bezug auf die Gesamtheit dieser Wertsysteme z, y (welche speziell die volle Umgebung des Punktes $z = z'$, $y = y'$ in sich begreift) gleichmäßig konver-

---

*) Ebenso ist ersichtlich, daß eine an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ reguläre analytische Funktion von x und y, als Funktion von z und y aufgefaßt, an *jeder* Stelle $z = z_0$, $y = 0$ regulär ist, wobei z_0 einen beliebigen endlichen Wert bedeutet.

gieren; da sich aber eine gewisse Umgebung $|x-x'|\leqq\sigma$, $|y-y'|\leqq\sigma'$ des Punktes (x', y') so abgrenzen läßt, daß die ihr entsprechenden Wertsysteme y, z vollständig in jener Gesamtheit enthalten sind, so konvergiert $D(x, y)$ im Gebiete $|x-x'|\leqq\sigma$, $|y-y'|\leqq\sigma'$, d. h. in der ganzen Umgebung des Punktes (x', y') gleichmäßig.

Da die Reihe $S(z, y)$ für $|y|<|y_0|$ im Bereiche Z gleichmäßig konvergiert, so stellt sie ferner nach § 5, 1 eine in dem ganzen Gebiete $(Z, |y|<|y_0|)$, speziell also in der Umgebung des Punktes $z=z'$, $y=y'$ reguläre analytische Funktion von z und y dar, und somit verhält sie sich, auch als Funktion $D(x, y)$ von x und y aufgefaßt, an der Stelle $x=x'$, $y=y'$ regulär. Des weiteren folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $S(z, y)$ gemäß Nr. 1, daß die aus ihr hervorgehende Doppelreihe $\mathfrak{P}_1(z, y)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\mu}^{(\lambda-\mu)} z^{\mu} y^{\lambda}$ einen Bereich der absoluten Konvergenz besitzen muß; das nämliche gilt somit auch für die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$, welche vermöge der Substitution $z=\frac{x}{y}$ Glied für Glied aus jener hervorgeht.

Ist endlich $y'=0$ und gehört der Punkt $(x_0, 0)$ $(|x_0|>|x'|)$ dem Bereiche T noch an, so ergibt sich, da $|x_0|>0$ ist, aus dem Obigen zunächst die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $D(x_0, y)$ in bezug auf eine gewisse Umgebung $|y|\leqq\varrho'$ des Punktes $y=0$. Daraus folgt aber sofort*) die absolute Konvergenz der Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ für $|x|<|x_0|$, $|y|<\varrho'$, welche sowohl die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $D(x, y)$ in bezug auf die volle Umgebung des Punktes $(x', 0)$ in sich schließt als auch das reguläre Verhalten derselben für die Umgebung dieser Stelle verbürgt.

3. Ein Überblick über die Gesamtheit der Stellen, in deren voller Umgebung die Diagonalenreihe $D(x, y)$ konvergiert und somit eine reguläre analytische Funktion von (x, y) darstellt, kann nunmehr leicht gewonnen werden.

Die Gesamtheit dieser Stellen nämlich stimmt, wenn man wiederum $x=yz$ setzt und den Wert $y=0$ vorderhand ausschließt, überein mit der Gesamtheit der Wertsysteme z, y, in deren Umgebung die Reihe

$$S(z, y)=\sum_{\lambda} f_{\lambda}(z) y^{\lambda}$$

durchweg konvergiert und somit eine reguläre analytische Funktion von z und y darstellt. Ein Wertepaar z, y gehört aber gemäß § 5, 3 dieser

*) Nach einer Schlußweise, welche der p. 13, Fußn. **) angeführten völlig analog ist (oder auch direkt als Folgerung aus genannter Fußnote).

Gesamtheit dann und nur dann an, wenn die Ungleichung $|y| < R'_z$ erfüllt ist; dabei soll R'_{z_0} in ähnlicher Weise wie bisher den y-Maximalradius derjenigen nach Potenzen von $z - z_0$ und y fortschreitenden Doppelreihe bezeichnen, welche aus $S(z, y)$ hervorgeht, wenn die ganzen Funktionen $f_\lambda(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelt werden.

Ein Punkt $(x', 0)$ jedoch gehört — wie unmittelbar aus dem vorigen Beweise ersichtlich — jener Gesamtheit nur dann an, wenn $\mathfrak{P}(x, y)$ in einem gewissen Gebiete $|x| < |x_0|$ $(|x_0| > |x'|)$, $|y| < \varrho'$ noch absolut konvergiert, m. a. W. wenn x' dem absoluten Betrage nach kleiner als der x-Maximalradius R von $\mathfrak{P}(x, y)$ ist.

Die Gesamtheit der in Rede stehenden Stellen fällt also zusammen mit der Gesamtheit der Wertsysteme (x, y), *welche entweder der Bedingung* $0 < |y| < R'_z$ $\left(z = \frac{x}{y}\right)$ *oder der Bedingung* $y = 0$, $|x| < R$ *genügen.**)

Vorausgesetzt, daß solche Stellen überhaupt vorhanden sind — oder, was dasselbe ist, daß $\mathfrak{P}(x, y)$ einen Bereich der absoluten Konvergenz besitzt — hat nun, wie aus Nr. 1 hervorgeht, die Größe R'_z für jeden beliebigen endlichen Wert von z einen positiven, von Null verschiedenen Wert; jene Gesamtheit bildet daher stets einen einzigen zusammenhängenden, (seiner Bedeutung nach) nur aus inneren Punkten bestehenden Bereich, in welchem $D(x, y)$ somit einen eindeutig definierten, überall regulären Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion darstellt.**) Es ist nun ein Leichtes, diesen Bereich auch durch die singulären Stellen der Funktion $f(x, y)$ zu charakterisieren.

Es existiert nämlich zu jedem beliebigen endlichen Werte $z = z_0$ *eine singuläre Stelle* (x_0, y_0) *von* $f(x, y)$, *für welche* $\frac{x_0}{y_0} = z_0$ *und* $|y_0| = R'_{z_0}$ *ist, dagegen keine, für welche* $|y_0| < R'_{z_0}$ *ist (und ferner eine singuläre Stelle* $(x_0, 0)$, *für welche* $|x_0| = R$, *dagegen keine, für welche* $|x_0| < R$ *ist).****)

---

*) Es mag jedoch nochmals hervorgehoben werden, daß nur von solchen Stellen die Rede ist, *in deren voller Umgebung* $D(x, y)$ noch konvergiert. Stellen (x, y), für welche $D(x, y)$ konvergiert, ohne auch durchweg in der Umgebung derselben noch zu konvergieren, können natürlich als *Begrenzungsstellen* jener Gesamtheit auftreten; es kann aber derartige Stellen auch *ganz außerhalb* jener Gesamtheit geben. Z. B. konvergiert $D(x, y) = \frac{1 - x}{1 - y} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (y^\lambda - y^{\lambda-1}x)$ für $|y| < 1$ bei allen x, außerdem aber noch stets für $y = x$.

**) Zum Unterschied von den Reihen $S(x, y)$ (speziell von den *Zeilenreihen* der Potenzreihen zweier Veränderlichen), bei welchen jener Bereich nicht zusammenhängend zu sein braucht, und welche infolgedessen in verschiedenen Teilen desselben verschiedene analytische Funktionen darstellen können. Vgl. p. 31, Fußn. *).

***) Bei dem p. 72, Fußn. **) angeführten Beispiele ist $R'_z = \frac{1}{|1 + z|}$. Es besitzt

Denn der die Funktion $f(x, y)$ darstellende Ausdruck $D(x, y) = S(z, y)$ muß, als Funktion von z und y betrachtet, gemäß § 6 (Satz 1) singuläre Stellen der angegebenen Art besitzen; dieselben können aber (da ja bei endlichem z_0 stets R'_{z_0} von Null verschieden ist) auch bei Auffassung von x und y als der unabhängigen Veränderlichen keine regulären Stellen sein. Hingegen kann es nach Nr. 2 keine singuläre Stelle geben, für welche $|y_0| < R'_{z_0}$ ist, da $D(x, y)$ noch in der vollen Umgebung jeder solchen Stelle konvergiert. Der Zusatz in Parenthese endlich folgt unmittelbar aus dem Falle $z_0 = 0$, indem man x mit y vertauscht.*)

4. Endlich kann man noch den folgenden Satz aussprechen:

Damit eine von x und y abhängige Größe $f(x, y)$ in einem vorgelegten Bereiche T, *in welchem sie eindeutig definiert ist, durch die Diagonalenreihe $D(x, y)$ einer nach Potenzen von x und y fortschreitenden Doppelreihe dargestellt werden könne, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x, y)$ eine an jeder Stelle (x', y') des Bereiches* T *reguläre analytische Funktion von (x, y) sei, deren Fortsetzung sich auch noch für jede Stelle (kx', ky') eindeutig und regulär verhalte. Dabei soll k alle komplexen Zahlen durchlaufen, deren absoluter Betrag unterhalb eins liegt.***)

Daß diese Bedingung eine *notwendige* ist, ergibt sich ohne weiteres aus dem Umstande, daß, wenn die volle Umgebung eines Punktes (x, y) dem Konvergenzbereiche einer Reihe $D(x, y)$ angehört, das nämliche (gemäß Nr. 3) auch von der Umgebung jeder Stelle (kx, ky) $(|k| \leq 1)$ gelten muß. An jeder Stelle aber, deren Umgebung dem Konvergenzbereiche der Reihe $D(x, y)$ vollständig angehört, verhält sich dieselbe regulär.

Ist andererseits die Bedingung erfüllt, so gibt es, da $f(x, y)$ sich der Voraussetzung gemäß speziell an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ regulär verhält, eine nach Potenzen von x und y fortschreitende Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$, welche in einer gewissen Umgebung $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ dieser Stelle absolut konvergiert und daselbst mit $f(x, y)$ übereinstimmt. Man überzeugt sich nun leicht, daß die Diagonalenreihe $D(x, y)$ derselben auch noch im

---

nun die durch $\sum c_\mu x^\mu$ dargestellte Funktion $\varphi(x)$ mindestens eine singuläre Stelle $x = \alpha$ mit dem absoluten Betrage 1 und folglich die durch $D(x, y)$ dargestellte Funktion $\varphi(x + y)$ zu jedem Werte $z = z_0$ die singuläre Stelle $y_0 = \frac{\alpha}{1 + z_0}$.

*) Oder auch aus der Theorie der Potenzreihen zweier Veränderlichen; vgl. p. 29, Fußn. **).

**) Vgl. wiederum das Beispiel p. 72, Fußn. **). Bei der daselbst durch $D(x, y)$ dargestellten analytischen Funktion $\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda (x + y)^\lambda$ ist für irgend einen Bereich T die obige Bedingung dann und nur dann erfüllt, wenn für jeden Punkt (x', y') desselben die Ungleichung $|x' + y'| < 1$ besteht.

Bereiche T durchweg konvergieren und daselbst die Funktion $f(x, y)$ darstellen muß. $D(x, y)$ möge nämlich durch die Substitution $x = yz$ in die Reihe $S(z, y) = \sum_\lambda f_\lambda(z) y^\lambda$ übergehen. Ist nun (x', y') irgend eine Stelle des Bereiches T — und zwar zunächst $y' \neq 0$ — und bestimmt man eine Größe $\varkappa$, deren absoluter Betrag oberhalb 1 liegt, so, daß der Punkt $x_0 = \varkappa x'$, $y_0 = \varkappa y'$ dem Bereiche T ebenfalls noch angehöre, so verhält sich, wenn man noch $\frac{x_0}{y_0} = \frac{x'}{y'} = z'$ setzt und die kleinere der beiden Größen ϱ' und $\frac{\varrho}{|z'|}$ mit ϱ_0' bezeichnet, $f(x, y)$ nach Voraussetzung für alle Punkte (kx_0, ky_0) $(|k| < 1)$, und somit (vgl. die Bemerkung in Nr. 2), als Funktion von z und y aufgefaßt, für alle Punkte $z = z'$, $|y| < |y_0|$ regulär, und daher muß die die Funktion zunächst für $z = z'$, $|y| < \varrho_0'$ darstellende*) Potenzreihe $S(z', y)$ auch noch für $|y| < |y_0|$ (speziell also für $y = y'$) konvergieren und mit den bezüglichen Werten der Funktion übereinstimmen.

Das gleiche gilt natürlich auch für jede Stelle (x', y') des Bereiches, für welche x' von Null verschieden ist. Der Fall aber, daß *beide* Koordinaten gleich Null sind, bedarf keiner weiteren Betrachtung.

§ 12.

Der Bereich der absoluten Konvergenz einer Potenzreihe zweier Veränderlichen.

Als Folgerung aus der Grundeigenschaft der Größe R'_x ergab sich in § 8, 2 eine allgemeine Eigenschaft der Funktion $r' = \varphi(r)$, welche den zu r assoziierten Konvergenzradius r' einer Potenzreihe zweier Veränderlichen darstellt. Es soll nun diese Eigenschaft auf direktem Wege hergeleitet und sodann gezeigt werden, daß dieselbe (in Gemeinschaft mit der Monotonie der Funktion $\varphi(r)$) für die Funktion $\varphi(r)$ *charakteristisch* ist.

1. (Hilfssatz.) *Ist* $p(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu x^\mu$ *eine Potenzreihe mit reellen, nicht negativen und nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten* α_μ, X *ihr Konvergenzradius, und durchläuft* r *positive Werte, welche der Bedingung* $0 < r < X$ *genügen, so nimmt der Ausdruck*

$$r\,\frac{p'(r)}{p(r)}$$

bei wachsendem r *niemals ab.*

---

*) Denn alle Punkte (x, y), für welche $\frac{x}{y} = z'$, $|y| < \varrho_0'$ ist, gehören dem Gebiete $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ an.

Hierzu genügt der Nachweis, daß der Ausdruck

$$p(r)p'(r) + rp(r)p''(r) - rp'^2(r) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu \alpha_\nu \{\nu + \nu(\nu-1) - \mu\nu\} r^{\mu+\nu-1}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\nu}\alpha_\nu \nu(2\nu - \lambda) \right\} r^{\lambda-1}$$

niemals negativ ist. In der Tat hat man, gleichgültig ob λ gerade ($= 2\sigma$) oder ungerade ($= 2\sigma - 1$) ist,

$$\sum_{\nu=\sigma}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\nu}\alpha_\nu \nu(2\nu - \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\sigma-1} \alpha_\nu \alpha_{\lambda-\nu}(\lambda-\nu)(\lambda - 2\nu)$$

und folglich

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} \alpha_{\lambda-\nu}\alpha_\nu \nu(2\nu - \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\sigma-1} \alpha_{\lambda-\nu}\alpha_\nu (\lambda - 2\nu)^2 \geqq 0.$$

Folgerung. Führt man die Bezeichnung

$$\log r = \xi \quad \text{und} \quad \log p(r) = \pi(\xi)$$

ein, so wird

$$r\,\frac{p'(r)}{p(r)} = \pi'(\xi)$$

und somit nimmt, wenn ξ reelle Werte unterhalb $\log X$ durchläuft, $\pi'(\xi)$ bei wachsendem ξ niemals ab. Bezeichnet man daher mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 drei beliebige reelle Werte, welche der Bedingung

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \log X$$

genügen, so liefert der Mittelwertssatz sofort die Beziehung

$$\frac{\pi(\xi_2) - \pi(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \leqq \pi'(\xi_2) \leqq \frac{\pi(\xi_3) - \pi(\xi_2)}{\xi_3 - \xi_2}$$

oder

$$(\xi_3 - \xi_1)\pi(\xi_2) \leqq (\xi_3 - \xi_2)\pi(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_1)\pi(\xi_3),$$

welche in der letzteren Form auch für den bisher ausgeschlossenen Fall, daß $p(x)$ identisch verschwindet, insofern bestehen bleibt, als dann jedes einzelne Glied den Wert $-\infty$ annimmt.

2. Es bedeute nun

$$\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$$

eine beliebige, nach positiven Potenzen von x und y fortschreitende

Doppelreihe. Für die absolute Konvergenz derselben, d. i. für die Konvergenz der (nur positive Terme enthaltenden) Doppelreihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu^{(\nu)} |x|^\mu |y|^\nu \qquad (\alpha_\mu^{(\nu)} = |a_\mu^{(\nu)}|)$$

ist notwendig und hinreichend: erstens, daß jede der Reihen

$$p_\nu(r) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu^{(\nu)} r^\mu \qquad (r = |x|)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

und zweitens, daß die aus deren Summen zusammengesetzte Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(r) |y|^\nu$$

konvergent sei. Setzt man daher zu jedem beliebigen positiven (von Null verschiedenen) Werte von r:

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{r'} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{p_\nu(r)},$$

falls eine jede der Reihen $p_\nu(r)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ konvergiert, andernfalls $r' = 0$, so ist $\mathfrak{P}(x, y)$ für $|x| = r$, $|y| < r'$ absolut konvergent, dagegen für $|x| = r$, $|y| > r'$ nicht mehr absolut konvergent. r' heiße der *zu r assoziierte Konvergenzradius**) und die Beziehung zwischen r und r' werde angedeutet durch die Gleichung:

$$r' = \varphi(r),$$

wo $\varphi(r)$ für $0 < r < \infty$ völlig eindeutig definiert ist und bei wachsendem r niemals zunimmt. Es bezeichne R die obere Grenze aller derjenigen Werte von r, für welche $\varphi(r) > 0$ ist ($R = 0$, falls kein solcher Wert existiert), so daß also

$$\varphi(r) > 0 \text{ für } 0 < r < R, \quad \varphi(r) = 0 \text{ für } r > R.\text{**})$$

---

*) Diese Festsetzung weicht, da gemäß derselben r' die größte positive Zahl ist, welche die Eigenschaft besitzt, daß $\mathfrak{P}(x, y)$ im Gebiete $|x| \leq (!)\, r$, $|y| < r'$ durchweg absolut konvergiert, von der in § 7, 1 getroffenen zunächst ab. Aus der sich weiterhin (Nr. 3) ergebenden Stetigkeit der Funktion $\varphi(r)$ folgt jedoch, daß die beiden bezüglichen Werte außer etwa in dem einzigen Falle $r = R$ miteinander zusammenfallen müssen. Vgl. a. p. 82, Fußn. **).

**) Ist $R = 0$, so konvergiert $\mathfrak{P}(x, y)$ in keinem Punkte (x, y) absolut, dessen Koordinaten beide von 0 verschieden sind. Bedeutet X die untere Grenze der Konvergenzradien X_ν sämtlicher Reihen $p_\nu(r)$, so gilt natürlich stets $R \leqq X$; daß tatsächlich $R < X$ sein kann, zeigt das Beispiel $p_\nu(r) = (r + r^2 + r^3 + \cdots)^{\nu^2}$, bei welchem $X = 1$, $R = \frac{1}{2}$ ist. Andererseits kann R auch unendlich groß sein, vorausgesetzt,

Führt man die Bezeichnungen $\xi = \log r$, $\xi' = \log r' = \Phi(\xi)$ und $\log p_\nu(r) = \pi_\nu(\xi)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ ein, so folgt aus (1) für jeden reellen Wert von ξ unterhalb $\log R$:

$$-\xi' = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\pi_\nu(\xi)}{\nu}.$$

Es seien nun r_1, r_2, r_3 drei positive Werte, welche der Bedingung

$$0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$$

genügen, und es werde

$$\varphi(r_i) = r_i' \text{ sowie } \log r_i = \xi_i, \quad \log r_i' = \xi_i' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gesetzt. Aus der nach Nr. 1 gültigen Beziehung

$$(\xi_3 - \xi_1)\pi_\nu(\xi_2) \leqq (\xi_3 - \xi_2)\pi_\nu(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_1)\pi_\nu(\xi_3) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

folgt alsdann sofort:

$$\begin{aligned}(\xi_3 - \xi_1)\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\pi_\nu(\xi_2)}{\nu} &\leqq \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{1}{\nu}\{(\xi_3 - \xi_2)\pi_\nu(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_1)\pi_\nu(\xi_3)\} \\ &\leqq (\xi_3 - \xi_2)\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\pi_\nu(\xi_1)}{\nu} + (\xi_2 - \xi_1)\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\pi_\nu(\xi_3)}{\nu},\end{aligned}$$

d. h.

$$(\xi_3 - \xi_1)\xi_2' \geqq (\xi_3 - \xi_2)\xi_1' + (\xi_2 - \xi_1)\xi_3',$$

was auch auf irgend eine der folgenden Arten ausgedrückt werden kann:

$$\frac{\xi_2' - \xi_1'}{\xi_2 - \xi_1} \geqq \frac{\xi_3' - \xi_2'}{\xi_3 - \xi_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1' \\ 1 & \xi_2 & \xi_2' \\ 1 & \xi_3 & \xi_3' \end{vmatrix} \leqq 0, \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} 1 & \log r_1 & \log r_1' \\ 1 & \log r_2 & \log r_2' \\ 1 & \log r_3 & \log r_3' \end{vmatrix} \leqq 0,$$

$$\varphi(r_2)^{\log \frac{r_3}{r_1}} \geqq \varphi(r_1)^{\log \frac{r_3}{r_2}} \varphi(r_3)^{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

oder in Worten: *Stellt man die Beziehung $\xi' = \Phi(\xi)$ für $\xi < \log R$ in der üblichen Weise graphisch dar und sind P_1, P_2, P_3 drei aufeinander folgende Punkte der sich ergebenden Kurve, so liegt P_2 niemals unterhalb der Sehne P_1P_3* (oder — was damit gleichbedeutend ist — P_3 niemals oberhalb der Sehne P_1P_2 oder endlich P_1 niemals oberhalb der Sehne P_2P_3).*)

---

daß X es ebenfalls ist. — R ist offenbar mit der bisher schon (vgl. p. 24) als *x-Maximalradius* bezeichneten Größe identisch, während der *y-Maximalradius* mit dem Grenzwerte $\varphi(+0)$ zusammenfällt.

*) Jede Gerade hat demnach höchstens zwei Punkte oder eine einzige geradlinige Strecke mit der Kurve gemein. Hat nämlich eine Gerade 3 Punkte Q_1, Q_2, Q_3 (in dieser Reihenfolge) mit der Kurve gemein, so müssen auch die sämtlichen

Die hierdurch ausgedrückte Eigenschaft der Funktion $\varphi(r)$ wollen wir im folgenden der Kürze halber ihre *Grundeigenschaft* nennen.*)

3. Zieht man nun noch die Monotonie der Funktion $\varphi(r)$ hinzu, so ergeben sich als unmittelbare Folgerungen zunächst die nachstehenden speziellen Eigenschaften der Kurve $r' = \varphi(r)$**):

$\varphi(r)$ kann im Intervalle $0 < r < R$ höchstens längs einer einzigen, und zwar mit $r = 0$ beginnenden Teilstrecke konstant sein.

Ist nämlich etwa $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$ $(0 < r_1 < r_2 < R)$ und setzt man $\xi_1 = \log r_1$, $\xi_2 = \log r_2$, so daß $\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2)$ wird, so gilt für jeden beliebigen reellen, unterhalb ξ_1 gelegenen Wert ξ_0 einerseits $\Phi(\xi_0) \geqq \Phi(\xi_1)$ (infolge der Monotonie), andererseits $\Phi(\xi_0) \leqq \Phi(\xi_1)$ (infolge der Grundeigenschaft), und somit $\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi_1)$.

*Ist speziell $\varphi(r)$ für irgend einen dem Intervall $0 < r < R$ angehörenden Wert $r = r_0$ unendlich groß, so gilt das nämliche für jeden Wert r dieses Intervalls.****)

Dies ergibt sich für $r < r_0$ aus der Monotonie, für $r > r_0$ aus der Grundeigenschaft.

Für jeden dem Intervalle $0 < r < R$ angehörenden Wert r ist die Funktion $\varphi(r)$ stetig.

Es genügt, das Entsprechende für die Funktion $\Phi(\xi)$ nachzuweisen; dabei kann von dem Falle, daß irgend ein Wert der Funktion $\Phi(\xi)$ positiv unendlich ist, nach dem Vorigen abgesehen werden. Ist nun ξ_0 irgend ein reeller Wert unterhalb $\log R$, so möge ξ_1 der Bedingung $\xi_0 < \xi_1 < \log R$ entsprechend gewählt werden. Für jeden beliebigen Wert von ξ unterhalb ξ_1 (einerlei ob $\xi < \xi_0$ oder $\xi > \xi_0$) ist alsdann — einerseits infolge der Monotonie, andererseits infolge der Grundeigenschaft —

---

zwischen Q_1 und Q_3 gelegenen Kurvenpunkte der Geraden angehören; würde etwa der zwischen Q_1 und Q_3 gelegene Kurvenpunkt Q' der Geraden nicht angehören, also *oberhalb* derselben liegen, so würde Q_2 *unterhalb* der Sehne $Q'Q_3$ liegen, was gegen den Satz verstößt.

*) Herr O. Blumenthal hatte die Freundlichkeit, mich noch während der Drucklegung darauf aufmerksam zu machen, daß dieser Satz sowie der größere Teil der daran geknüpften Folgerungen bereits von E. Fabry (Sur les rayons de convergence d'une série double, Comptes Rendus, t. 134 (1902), p. 1190) mitgeteilt worden sind, so daß nur die Betrachtungen von Nr. 5 als wesentlich neu gelten können.

**) Der erste und der (im wesentlichen damit gleichbedeutende) dritte der nachfolgenden Sätze sind bereits von den Herren A. Meyer und Phragmén bewiesen worden: A. Meyer, Om konvergensområdet hos potensserier af flere variabler (Upsala 1887); Om kontinuitet hos konvergensområden (Öfv. af k. Vetenskaps-Akad. Förh., Stockholm 1883). Phragmén, Om konvergensområdet hos potensserier af två variabler. (Ebenda.)

***) Dies gilt jedoch keineswegs, wenn bloß bekannt ist, daß der *Grenzwert* $\varphi(+0)$ unendlich groß sei. $\left(\text{Beispiel: Reihe für } \frac{1}{1-xy}.\right)$

$\Phi\xi()$ zwischen den beiden Werten $\Phi(\xi_0)$ und $\Phi(\xi_0) + \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0}(\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_0))$ gelegen*), was offenbar die Stetigkeit der Funktion im Punkte $\xi = \xi_0$ nach sich zieht.**)

4. Während die Eigenschaften der Funktion $\varphi(r)$, wie sie sich im vorigen als Folgerungen aus der Grundeigenschaft und der Monotonie ergaben, nur spezieller Natur sind, so können die bezüglichen Betrachtungen derart vervollständigt werden, daß man ein System von Eigenschaften der Funktion erhält, welches die Grundeigenschaft und die Monotonie vollständig zu ersetzen vermag. Ein derartiges System von Eigenschaften ist zunächst das folgende:

Sieht man von dem Falle ab, wo die Funktion $\Phi(\xi)$ für alle $\xi < \log R$ positiv unendlich ist, so besitzt dieselbe für jeden Wert ξ unterhalb $\log R$ *je eine endliche vorwärts genommene und eine endliche rückwärts genommene Ableitung, und zwar ist die erstere niemals größer als die letztere, und beide niemals positiv.****) *Sind ξ_1, ξ_2 zwei beliebige der Bedingung*

---

*) M. a. W.: Besitzt der betrachtete Kurvenpunkt P_0 die Abszisse ξ_0 und genügt die Abszisse ξ_1 des Kurvenpunktes P_1 der Bedingung $\xi_0 < \xi_1 < \log R$, so liegt jeder beliebige Kurvenpunkt, dessen Abszisse kleiner als ξ_1 ist, zwischen der durch P_0 gehenden Parallelen zur ξ-Achse und der Sehne $P_0 P_1$ (bezw. ihrer Verlängerung über P_0 hinaus).

**) Im Punkte $r = R$ hingegen können die drei Werte $\varphi(R-0)$, $\varphi(R)$ und $\varphi(R+0) = 0$ tatsächlich voneinander verschieden sein, und zwar kann $\varphi(R)$ mit jedem beliebigen, zwischen $\varphi(R-0)$ und 0 gelegenen Werte zusammenfallen (s. Nr. 5). Will man zwischen x und y eine volle Symmetrie herstellen, so empfiehlt es sich, *eine jede* der Bedingung $0 \leqq r' \leqq \varphi(R-0)$ genügende Zahl r' als den Wert eines zu $r = R$ assoziierten Radius anzusehen. (Der *größte* $\varphi(R-0)$ derselben ist derjenige, welcher der in § 7, 1 benutzten Definition der assoziierten Radien entspricht; der Wert $\varphi(R)$ ist in jener Gesamtheit sicher ebenfalls enthalten.) Bezeichnet man alsdann noch mit R' den Grenzwert $\varphi(+0)$, so wird durch die Gesamtheit der Wertpaare r, r' ein stetiger Linienzug dargestellt, welcher die beiden Punkte $r = 0$, $r' = R'$ und $r = R$, $r' = 0$ miteinander verbindet, zu Beginn des Verlaufes der r-Achse, zum Schluß der r'-Achse parallel laufen kann, während im ganzen übrigen Verlaufe r' beständig abnimmt, wenn r zunimmt, und umgekehrt. Die Bedeutung dieser Kurve kann alsdann auch folgendermaßen ausgesprochen werden: *Sind r, r' die Koordinaten eines beliebigen Kurvenpunktes (d. h. ein Paar assoziierter Radien im erweiterten Sinne), so konvergiert die Potenzreihe in jedem Punkte des Gebietes $|x| < r$, $|y| < r'$ absolut, dagegen in keinem Punkte des Gebietes $|x| > r$, $|y| > r'$.* Auch für diese erweiterte Definition der assoziierten Radien behält die Grundeigenschaft ihre Gültigkeit bei.

***) Die bis hierher in diesem Satze ausgesprochenen Eigenschaften der Funktion $\Phi(\xi)$ gelten auch unverändert für die Funktion $\varphi(r)$ selbst. Das folgende hingegen bleibt für die Funktion $\varphi(r)$ selbst nicht gültig; ist z. B. $\mathfrak{P}(x,y) = \sum_0^\infty (xy)^\lambda$, so ist $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ und somit nimmt $\varphi'(r)$ mit wachsendem r beständig *zu*.

$$-\infty < \xi_1 < \xi_2 < \log R$$

genügende Werte, so ist keine der beiden Ableitungen im Punkte $\xi = \xi_2$ *größer als irgend eine der beiden Ableitungen im Punkte* $\xi = \xi_1$.*)

Beweis. Ist ξ_0 ein beliebiger Wert unterhalb $\log R$ und wählt man ξ_1 und ξ_2 der Bedingung $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \log R$ entsprechend, so ergibt die Grundeigenschaft die Beziehung:

$$\frac{\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_0)}{\xi_1 - \xi_0} \geqq \frac{\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_0)}{\xi_2 - \xi_0}$$

d. h. der Quotient $\frac{\Phi(\xi_0 + h) - \Phi(\xi_0)}{h}$ nimmt bei abnehmenden positiven Werten von h niemals ab; da derselbe infolge der Monotonie der Funktion $\Phi(\xi)$ überdies niemals den Wert Null übersteigen kann, so existiert

$$\lim_{\substack{h=0 \\ (h>0)}} \frac{\Phi(\xi_0 + h) - \Phi(\xi_0)}{h} \tag{1}$$

und besitzt einen endlichen, jedoch niemals positiven Wert.

Andererseits nimmt der betrachtete Quotient bei negativen, dem absoluten Betrage nach abnehmenden Werten von h niemals zu; da derselbe aber, wenn ξ_1 der Bedingung $\xi_0 < \xi_1 < \log R$ entsprechend beliebig gewählt wird, wie ebenfalls die Grundeigenschaft lehrt, niemals unter den Wert $\frac{\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_0)}{\xi_1 - \xi_0}$ und somit auch nicht unter den Grenzwert (1) herabsinken kann, so existiert

$$\lim_{\substack{h=0 \\ (h<0)}} \frac{\Phi(\xi_0 + h) - \Phi(\xi_0)}{h} \tag{2}$$

und besitzt einen endlichen Wert, welcher von dem Werte (1) niemals übertroffen wird, jedoch infolge der Monotonie von $\Phi(\xi)$ ebenfalls niemals positiv sein kann.

Genügen endlich ξ_1 und ξ_2 der Bedingung $\xi_1 < \xi_2 < \log R$, so befinden sich die Werte der beiden im Punkte ξ_1 gebildeten Ableitungen nicht unterhalb $\frac{\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}$, hingegen die Werte der im Punkte ξ_2 gebildeten Ableitungen nicht oberhalb dieser Größe.

---

*) Daraus folgt zugleich, daß es nicht mehr als *abzählbar unendlich viele* Punkte der Kurve geben kann, für welche die beiden Ableitungen voneinander verschieden sind. Ordnet man nämlich jedem derartigen Kurvenpunkte dasjenige reelle Intervall zu, welches von den Werten der zugehörigen beiden Ableitungen begrenzt wird, so schließen je zwei beliebige dieser Intervalle einander vollständig aus. Solcher Intervalle kann es aber nach einem bekannten, von Herrn G. Cantor herrührenden Satze höchstens abzählbar unendlich viele geben.

Kürzer noch lassen sich jedoch die in Rede stehenden Eigenschaften der Funktion $\varphi(r)$ in folgendem Satze zusammenfassen:

Sieht man von dem Falle ab, wo die Funktion $\Phi(\xi)$ für alle $\xi < \log R$ positiv unendlich ist, und bedeutet P_0 einen beliebigen Punkt der Kurve $\xi' = \Phi(\xi)$, dessen Abszisse ξ_0 kleiner als $\log R$ ist, so gibt es mindestens eine durch P_0 gehende Gerade mit endlichem, jedoch nicht positivem Richtungskoeffizienten), welche die Eigenschaft besitzt, daß kein Punkt der Kurve oberhalb derselben gelegen ist.***) Jede derartige Gerade soll im folgenden kurzweg eine „Tangente im Punkte P_0“ genannt werden.

Es besitzt nämlich jede durch den Punkt P_0 gehende Gerade, deren Richtungskoeffizient mit einer der beiden Ableitungen der Funktion $\Phi(\xi)$ im Punkte ξ_0 übereinstimmt oder aber beliebig zwischen diesen beiden Werten gelegen ist, die verlangte Eigenschaft, wie unmittelbar daraus folgt, daß die vorwärts genommene Ableitung mit der *oberen Grenze* aller Werte des Quotienten $\frac{\Phi(\xi)-\Phi(\xi_0)}{\xi-\xi_0}$ für $\xi_0 < \xi < \log R$, die rückwärts genommene aber mit der *unteren Grenze* aller Werte des nämlichen Quotienten für $-\infty < \xi < \xi_0$ identisch war.

Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft erstens offenbar die Monotonie der Funktion $\Phi(\xi)$, dann aber auch die Grundeigenschaft. Sind nämlich P_1, P_2, P_3 drei aufeinanderfolgende Kurvenpunkte und würde P_2 *unterhalb* der Sehne P_1P_3 liegen, so könnte die Kurve im Punkte P_2 keine „Tangente“ besitzen, da ja oberhalb jeder beliebigen durch P_2 gehenden Geraden stets mindestens einer der beiden Punkte P_1 und P_3 zu liegen käme.

5. Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß die Monotonie und die Grundeigenschaft der Funktion $\varphi(r)$ (oder die mit ihnen gleichwertigen soeben hergeleiteten Eigenschaften) die einzigen Beschränkungen darstellen, welchen die Funktion $\varphi(r)$ überhaupt unterworfen ist, so daß durch die genannten Eigenschaften der Funktion $\varphi(r)$ die allgemeinste Gestalt des Bereiches der absoluten Konvergenz einer Potenzreihe zweier Veränderlichen festgelegt ist.

Zu diesem Zwecke denken wir uns eine willkürliche Funktion $\varphi(r)$ vorgelegt, welche die erwähnten Eigenschaften besitzt, und weisen die

---

*) Unter dem Richtungskoeffizienten einer Geraden der $\xi\xi'$-Ebene sei in Übereinstimmung mit dem üblichen Sprachgebrauche der Quotient $\frac{\xi'}{\xi}$ der beiden Koordinaten eines beliebigen Punktes der durch den Nullpunkt gezogenen Parallelen verstanden.

**) Diese Eigenschaft kann natürlich auf die Kurve $r' = \varphi(r)$ unmittelbar übertragen werden. An Stelle der Geraden mit endlichem, nicht positivem Richtungskoeffizienten treten dabei die Kurven $Cr^{\alpha}r'^{\beta} = 1$ ($\alpha \geqq 0$, $\beta > 0$, $C > 0$).

Existenz einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y) = \sum\limits_{\mu, \nu} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y^\nu$ nach, deren Konvergenzbereich genau durch die Beziehung $r' = \varphi(r)$ dargestellt wird. Mit R bezeichnen wir wiederum die obere Grenze aller Werte von r, für welche die vorgelegte Funktion $\varphi(r) > 0$ ist.

Um unter allen sich darbietenden Möglichkeiten zunächst den Fall $R = 0$ zu erledigen, so verlangt dieser eine Reihe $\mathfrak{P}(x, y)$, welche in keinem Punkte (x, y) absolut konvergiert, dessen Koordinaten beide von Null verschieden sind. Um eine derartige Reihe zu bilden, genügt es z. B. die Koeffizienten $a_\mu^{(\mu)}$ so zu wählen, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{\mu} a_\mu^{(\mu)} \varrho^\mu$ gleich Null wird, während den sämtlichen übrigen Koeffizienteu $a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu \gtrless \nu)$ beliebige Werte beigelegt werden können.*)

Ist nun $R > 0$ (ev. auch unendlich groß), so möge zunächst derjenige Fall herausgegriffen werden, in welchem $\varphi(r)$ für irgend einen Wert r des Intervalls $0 < r < R$ und somit (Nr. 3) auch für *jeden* Wert dieses Intervalls *unendlich groß* ist. Ist zunächst auch R unendlich groß, d. h. soll $\mathfrak{P}(x, y)$ für jeden endlichen Wert der beiden Veränderlichen x und y absolut konvergieren, so kann man z. B., um eine derartige Reihe zu erhalten, $a_\mu^{(\nu)} = b_\mu c_\nu$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ setzen, wobei b_μ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ und c_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ die Koeffizienten je einer beständig konvergenten Potenzreihe einer Veränderlichen bedeuten. Ist jedoch R endlich und ist noch $\varphi(R) = S$ vorgeschrieben, so stellt, falls S einen endlichen von Null verschiedenen Wert besitzt,

$$\mathfrak{P}_0(x, y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^{\lambda^2} \left(\frac{y}{S}\right)^{\lambda}$$

eine Reihe der verlangten Art dar; ist S gleich Null oder unendlich groß, so gilt noch das gleiche, wenn man in dem angegebenen Ausdrucke S durch $\frac{1}{\lambda}$ bezw. durch λ ersetzt.**)

Es bleibt nun noch übrig, den Fall zu behandeln, in welchem $R > 0$ (und zwar endlich oder unendlich groß) ist und $\varphi(r)$ für jedes $r > 0$ einen *endlichen* Wert besitzt.

---

*) Eine derartige Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ konvergiert demnach ausschließlich für die Wertsysteme $y = 0$, $|x| < X_0$, sowie $x = 0$, $|y| < Y_0$, wo X_0 und Y_0 zwei jeweils bestimmte positive Zahlen bedeuten, welche jeden Wertes (inkl. 0 und ∞) fähig sind.

**) Jedoch genügt es in diesen letzteren beiden Fällen auch schon, $\mathfrak{P}_0(x, y) = y^n \mathfrak{P}_0(x)$ zu setzen, wo n eine beliebige positive ganze Zahl, $\mathfrak{P}_0(x)$ eine ausschließlich für $|x| < R$ bezw. ausschließlich für $|x| \leqq R$ absolut konvergierende Potenzreihe bedeutet.

Es bedeute in diesem Falle $\xi_1, \xi_2, \cdots$ eine Reihe reeller Größen, welche sämtlich kleiner als $\log R$ seien und das von $-\infty$ bis $\log R$ sich erstreckende Gebiet reeller Größen überall dicht erfüllen mögen. Die aus der Funktion $\varphi(r)$ vermöge der Substitution $\log r = \xi$, $\log \varphi(r) = \xi'$ hervorgehende Kurve $\xi' = \Phi(\xi)$ besitzt alsdann in jedem der Punkte $\xi = \xi_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ nach Voraussetzung mindestens eine „Tangente" T_i (gibt es *mehr als eine* solche, so sei eine *beliebige* unter ihnen ausgewählt und mit T_i bezeichnet); die Gleichung derselben sei:

$$\alpha_i \xi + \beta_i \xi' + \gamma_i = 0 \qquad (\alpha_i \geqq 0,\ \beta_i > 0).$$

Bezeichnet man nun mit $\alpha_i^{(\lambda)}$ die kleinste nicht unterhalb $\lambda\alpha_i$ gelegene, mit $\beta_i^{(\lambda)}$ die kleinste nicht unterhalb $\lambda\beta_i$ gelegene ganze Zahl und setzt $e^{\gamma_i} = C_i$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} C_i^{\lambda} x^{\alpha_i^{(\lambda)}} y^{\beta_i^{(\lambda)}},$$

welche als Potenzreihe in C_i aufgefaßt werden kann, sicher absolut, solange $C_i|x|^{\alpha_i}|y|^{\beta_i} < 1$, divergiert hingegen, sobald $C_i|x|^{\alpha_i}|y|^{\beta_i} > 1$ ist. Dies ändert sich auch dann nicht, wenn man alle diejenigen (nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Glieder der Reihe tilgt, für welche

$$\alpha_i^{(\lambda)} + \beta_i^{(\lambda)} < i$$

ist; die so modifizierte Reihe möge alsdann mit $\mathfrak{P}_i(x, y)$ bezeichnet werden. Ferner sei eine Reihe $\mathfrak{P}_0(x, y)$ auf folgende Weise definiert: Ist R unendlich groß, so sei $\mathfrak{P}_0(x, y) = 0$. Besitzt jedoch R einen endlichen Wert und ist S der vorgeschriebene Wert von $\varphi(R)$*), so werde $\mathfrak{P}_0(x, y)$ mit derjenigen bereits oben aufgestellen und ebenso bezeichneten Reihe identifiziert, welche zu den nämlichen Werten von R und S gehört. Endlich bedeute $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ eine konvergente Reihe positiver Größen, deren Summe c sein möge. Der Ausdruck

$$\mathfrak{P}_0(x, y) + c_1 \mathfrak{P}_1(x, y) + c_2 \mathfrak{P}_2(x, y) + \cdots$$

kann alsdann zu einer wohlbestimmten, nach Potenzen von x und y fortschreitenden Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} y^{\nu}$ zusammengezogen werden, wobei zu einem bestimmten Koeffizienten $a_{\mu}^{(\nu)}$ außer $\mathfrak{P}_0(x, y)$ nur die $\mu + \nu$ Reihen $\mathfrak{P}_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots, \mu + \nu)$ einen Beitrag liefern können.

Von der so erhaltenen Reihe $\mathfrak{P}(x, y)$ kann man nun leicht zeigen, daß sie alle verlangten Eigenschaften besitzt. Ist nämlich zunächst r_0

*) Derselbe unterliegt ausschließlich der aus der Monotonie von $\varphi(r)$ entspringenden Bedingung $\varphi(R - 0) \geqq \varphi(R) \geqq 0$.

irgend ein der Bedingung $0 < r_0 < R$ genügender Wert, so konvergiert $\mathfrak{P}(r_0, y)$ für $|y| < \varphi(r_0)$ absolut, hingegen nicht mehr für $|y| > \varphi(r_0)$. Um dies nachzuweisen, möge $\log r_0 = \xi_0$, $\log \varphi(r_0) = \Phi(\xi_0) = \xi_0'$ und $\log |y| = \eta$ gesetzt werden. Ist nun $|y| > \varphi(r_0)$, also $\eta > \xi_0'$, so kann man infolge der Stetigkeit der Funktion $\Phi(\xi)$ eine positive Größe h so bestimmen, daß

$$\Phi(\xi) < \eta$$

bleibt, solange ξ dem Intervall $\xi_0 - h \leqq \xi \leqq \xi_0$ angehört. In diesem letzteren Intervall befindet sich nun sicher eine der Größen ξ_i $(i = 1, 2, \cdots)$; aus $\Phi(\xi_i) < \eta$ folgt aber, da eine „Tangente" der Kurve niemals einen positiven Richtungskoeffizienten besitzt, daß der Punkt (ξ_0, η) *oberhalb* der Tangente T_i liegt, d. h. daß für den betreffenden Wert von i:

$$\alpha_i \xi_0 + \beta_i \eta + \gamma_i > 0$$

oder

$$C_i r_0^{\alpha_i} |y|^{\beta_i} > 1$$

gilt. Demnach divergiert also die zugehörige Reihe $\mathfrak{P}_i(r_0, |y|)$, infolgedessen aber auch $\mathfrak{P}(r_0, |y|)$, da ja in sämtlichen Reihen $\mathfrak{P}_i(x, y)$ nur positive Koeffizienten vorkommen.

Ist aber $|y| < \varphi(r_0)$, also $\eta < \xi_0'$ (wobei — vorausgesetzt, daß R endlich ist — der Fall $r_0 = R$, $|y| < \varphi(R - 0)$ gleich in die Betrachtung mit eingeschlossen werden möge, indem hier $\xi_0' = \log \varphi(R - 0)$ definiert sei), so liegt der Punkt (ξ_0, η) *unterhalb* jeder der „Tangenten" T_i, da ja andernfalls der Kurvenpunkt (ξ_0, ξ_0') *oberhalb* einer solchen zu liegen käme. Es gilt also:

$$\alpha_i \xi_0 + \beta_i \eta + \gamma_i < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

oder

$$C_i r_0^{\alpha_i} |y|^{\beta_i} < 1,$$

so daß jede der Reihen $\mathfrak{P}_i(r_0, y)$ absolut konvergiert. Nun ist

$$\mathfrak{P}_i(r_0, |y|) \leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} C_i^\lambda r_0^{\alpha_i^{(\lambda)}} |y|^{\beta_i^{(\lambda)}} \leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\varrho\sigma}{\lambda^2} C_i^\lambda r_0^{\lambda\alpha_i} |y|^{\lambda\beta_i} \leqq \varrho\sigma \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \leqq \frac{\pi^2}{6} \varrho\sigma$$

$$(i = 1, 2, \cdots)$$

wo ϱ die größere der beiden Zahlen 1 und r_0, σ die größere der beiden Zahlen 1 und $|y|$ bedeutet, und folglich

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathfrak{P}_i(r_0, |y|) \leqq \frac{\pi^2}{6} c \varrho \sigma.$$

Da nun überdies (wenn man sich jetzt wieder auf den Fall $r_0 < R$ beschränkt) $\mathfrak{P}_0(r_0, |y|)$ für jeden endlichen Wert von y konvergiert, so ist damit die Konvergenz der Reihe $\mathfrak{P}(r_0, |y|)$, d. h. die absolute Konvergenz der Reihe $\mathfrak{P}(r_0, y)$, für $|y| < \varphi(r_0)$ erwiesen.

Besitzt speziell R einen endlichen Wert, so bleiben noch die beiden Fälle $r_0 > R$ und $r_0 = R$ zu betrachten.

Ist $r_0 > R$, so divergiert die Reihe $\mathfrak{P}_0(r_0, |y|)$ und somit auch $\mathfrak{P}(r_0, |y|)$, sobald nur y von Null verschieden ist.

Ist endlich $r_0 = R$, so divergiert für $|y| > S$ die Reihe $\mathfrak{P}_0(R, |y|)$ und somit auch $\mathfrak{P}(R, |y|)$. Für $|y| < S$ hingegen konvergiert $\mathfrak{P}_0(R, |y|)$, sowie nach obigem (da $S \leqq \varphi(R-0)$ ist) auch die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathfrak{P}_i(R, |y|)$ und daher auch die Reihe $\mathfrak{P}(R, |y|)$.*)

München, im Januar 1905.

---

*) Die Übereinstimmung für $r = R$ ist in Wahrheit von geringerer Bedeutung, da der Wert von $\varphi(R)$ für sich allein in keiner Weise mehr auf die Gestalt des Bereiches der absoluten Konvergenz, vielmehr nur auf das Verhalten der Potenzreihe längs der Begrenzung desselben einen Einfluß ausübt. Ist der Wert von $\varphi(R)$ nicht besonders vorgeschrieben, so kann man die Reihe $\mathfrak{P}_0(x, y)$ des Textes auch durch $y_0^n \mathfrak{P}_0(x)$ ersetzen, wo n eine beliebige ganze Zahl, $\mathfrak{P}_0(x)$ eine beliebige Potenzreihe in x (mit positiven Koeffizienten) bedeutet, deren Konvergenzradius die Größe R ist. — Offenbar kann man es durch geeignete Wahl der Koeffizienten $a_\mu^{(0)}$ und $a_0^{(\nu)}$ ferner noch erreichen, daß $\mathfrak{P}(x, 0)$ einen gegebenen Konvergenzradius X_0, und $\mathfrak{P}(0, y)$ einen gegebenen Konvergenzradius Y_0 besitze (wobei natürlich $X_0 \geqq R$, $Y_0 \geqq R'$ sein muß); nötigenfalls ersetze man zu diesem Zwecke die Reihe $\mathfrak{P}(x, y)$ des Textes zunächst durch $x\,\mathfrak{P}(x, y)$.

Nachtrag: Den in § 12 der vorstehenden Arbeit behandelten Gegenstand hat Herr G. Faber in seiner inzwischen erschienenen Abhandlung: *„Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher“* (Math. Ann. Bd. 61, S. 289) auf einem etwas anderen Wege zur Erledigung gebracht und dabei die Betrachtung auch auf den Fall beliebig vieler Veränderlicher ausgedehnt. Der Umstand, daß in meiner Arbeit jeglicher Hinweis auf die Abhandlung des Herrn Faber fehlt, findet seine Erklärung darin, daß (aus anderweitigen Gründen) die Drucklegung der ersteren schon zu einer Zeit erfolgte, als Herrn Fabers Arbeit noch nicht veröffentlicht war. In bezug auf ihre Entstehungszeit fallen die beiden Arbeiten vollständig zusammen.

München, im Februar 1906.

Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

In dem vorliegenden Aufsatze habe ich einen neuen Begriff, nämlich den der vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung, eingeführt. Er ist insofern für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen von Bedeutung, als zu jeder linearen homogenen Differentialgleichung eine eindeutig bestimmte, größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung gehört, und diese letztere über alle irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Integrale der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung genügen, Auskunft erteilt. Von den erzielten Resultaten hebe ich an dieser Stelle nur hervor: Jede vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist entweder nur auf eine einzige Art oder auf unendlich viele Arten kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung durch die Integrale von unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen erfüllt wird, ist, daß die zu der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung zugehörige, größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung auf unendlich viele Arten kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen ist.

Bei der Abfassung der Arbeit habe ich mich nur der einfachsten Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen bedient und diese im § 2 zusammengestellt. Nicht benützt wurde die Picard-Vessiotsche Theorie der Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung. Die Kenntnis meines früher veröffentlichten Aufsatzes „Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen“*), mit dem die vorliegende

*) Math. Annalen, Bd. 56, S. 549.

Veröffentlichung in innigstem Zusammenhange steht, ist für die Lektüre dieses Aufsatzes nicht erforderlich; ein Teil der früher gewonnenen Resultate ergibt sich, wie ich zeige, aus den hier erhaltenen.

§ 1.

Der Rationalitätsbereich.

Für die folgenden Untersuchungen denken wir uns einen Rationalitätsbereich Σ zugrunde gelegt. Ein Rationalitätsbereich Σ wird von irgend einem derartig vollständigen oder in sich abgeschlossenen Systeme von Funktionen einer unabhängigen Variablen x gebildet, daß man die Funktionen des Systems unbeschränkt untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null), sowie eine jede differentiieren kann, ohne hierdurch das vorgelegte Funktionensystem zu verlassen. Von den Funktionen von Σ wird auch vorausgesetzt, daß jede einzelne dieser Funktionen ausnahmslos in demselben Bereiche S der Ebene eine eindeutige, bis auf isolierte Punkte überall in S reguläre analytische Funktion sein soll. Vielleicht ist es noch gut, zu bemerken, daß die Gesamtheit aller Punkte von S, die als Singularitäten für die Funktionen von Σ in Frage kommen, nicht etwa ein System isolierter Punkte zu bilden braucht, sondern nur gefordert wird, daß *jede einzelne* Funktion von Σ innerhalb des Bereiches S ausnahmslos isolierte Singularitäten hat.

Sei (Q):

$$q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)y = 0$$

irgend eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche Σ angehören sollen.*) Da infolge der über Σ gemachten Voraussetzungen jede einzelne Funktion aus Σ und daher auch die m Funktionen:

$$\frac{q_1(x)}{q_0(x)}, \frac{q_2(x)}{q_0(x)}, \ldots, \frac{q_m(x)}{q_0(x)}$$

nur an isolierten Punkten innerhalb des Bereiches S aufhören regulär zu sein, so gibt es ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen von (Q), das bis auf isolierte Punkte innerhalb S regulär ist und durch seine Anfangswerte und die seiner $m-1$ ersten Abgeleiteten für eine beliebige Stelle $x = x_0$ im Innern von S, an der die Funktionen

$$\frac{q_1(x)}{q_0(x)}, \frac{q_2(x)}{q_0(x)}, \ldots, \frac{q_m(x)}{q_0(x)}$$

*) Alle im folgenden auftretenden Differentialgleichungen und Differentialausdrücke haben ausnahmslos Koeffizienten aus Σ.

sämtlich regulär sind, festgelegt werden kann. Bei unserer Wahl von Σ ist mithin für jede lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ die Integralexistenz gesichert. Auf die Frage, ob und wie man die Voraussetzungen für den Rationalitätsbereich Σ noch beschränken kann, ohne daß eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ Integrale zu besitzen aufhört, gehen wir nicht ein. Wir wollen nur einige Beispiele für einen Rationalitätsbereich Σ anführen, wie er durch die obigen Voraussetzungen festgelegt wurde. Einen Rationalitätsbereich Σ bildet offenbar die Gesamtheit der Konstanten irgend eines unendlichen Zahlkörpers (z. B. alle rationalen Zahlen oder alle reellen Zahlen) oder die Gesamtheit aller rationalen Funktionen einer Variablen x mit Koeffizienten aus einem beliebigen unendlichen Zahlkörper. Ein Rationalitätsbereich Σ im obigen Sinne braucht also nicht alle Konstanten zu enthalten. Als Beispiel für einen Rationalitätsbereich Σ können auch alle eindeutigen analytischen Funktionen, die innerhalb eines Bereiches S ausnahmslos überall den Charakter rationaler Funktionen haben, angeführt werden.

Hat man eine endliche Anzahl von Funktionen $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$, die in der Ebene einen gemeinsamen Stetigkeitsbereich S besitzen, in dem jede dieser Funktionen ausnahmslos eindeutig und regulär analytisch ist, und bildet das kleinste Funktionensystem P, das durch $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ entsteht und in sich derartig abgeschlossen ist, daß man je zwei Funktionen des Systems untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null), sowie eine jede differentiieren kann, ohne hierdurch das Funktionensystem P zu verlassen, so enthält P wegen der Voraussetzung, daß die Funktionen $p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ in S regulär sind, nur Funktionen mit polaren Unstetigkeiten in S; die singulären Punkte jeder Funktion von P sind also in S isoliert, und P ist mithin ein Rationalitätsbereich Σ in dem oben verlangten Sinn. Hat man eine lineare homogene Differentialgleichung:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x)\,y = 0$$

und geht nicht, wie wir es im folgenden tun werden, von einem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ als dem Primären, sondern von der Differentialgleichung selbst als dem ursprünglichen Elemente aus, so ist der Rationalitätsbereich P der kleinste Rationalitätsbereich, für den man die Differentialgleichung untersuchen wird.

§ 2.

Zusammenstellung von Hilfssätzen.

Wir stellen die im folgenden verwandten Hilfssätze zusammen. Von irgend einer rationalen Funktion eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung (Q) und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ sagt man, sie ist eine *symmetrische* Funktion des Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und dessen Abgeleiteten, wenn sie als Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten formal invariant bleibt, falls man $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleitete den Substitutionen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe unterwirft, d. h. y_i $(i=1,2,\cdots,m)$ durch

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

ersetzt, wobei die Größen a^i_k ein System von m^2 beliebigen Konstanten bedeuten. Hat man irgend eine rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ, so kann man mit Hilfe der linearen homogenen Differentialgleichung m^{te} und höhere Abgeleitete beseitigen und erhält durch diese Reduktion eine rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$, die deren Abgeleitete höchstens bis zur $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung enthält und, da die vorgelegte Differentialgleichung (Q) nur Koeffizienten aus Σ hat, ebenfalls nur Koeffizienten aus Σ besitzt. Man beweist, daß jede rationale symmetrische Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ, die keine höheren als $m-1^{\text{te}}$ Abgeleitete enthält, frei von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten, also eine bloße Funktion aus Σ, ist. Mithin hat man den bekannten, auf Herrn Appell zurückgehenden Satz:

*Jede rationale symmetrische Funktion eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung und deren Abgeleiteten mit Koeffizienten aus Σ ist als bloße Funktion des Rationalitätsbereiches Σ ausdrückbar.**)

Ist R irgend ein linearer homogener Differentialausdruck, so ist unter dem symbolischen Produkt QR bekanntlich der lineare homogene Differentialausdruck:

$$q_0(x)\frac{d^m R}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}R}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)R$$

---

*) Appell, Sur les équations différentielles linéaires. Annales de l'École Normale (2), 10 (1881). Beweise des Satzes findet man u. a. in Picards Traité d'Analyse, t. 3 (1896), 509 und in Ludwig Schlesingers Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 1 (1895), 41.

zu verstehen, falls Q den linearen homogenen Differentialausdruck

$$q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)y$$

vorstellt. Haben Q und R nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, so trifft dies auch für QR zu. Für diese symbolische Zerlegung gilt folgender bekannter Satz:

Wird eine lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ durch alle Integrale einer ebenfalls linearen homogenen Differentialgleichung $E = 0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ erfüllt, so gibt es einen linearen homogenen Differentialausdruck E_1 mit Koeffizienten aus Σ, so daß symbolisch $D = E_1 E$ wird. $E_1 = 0$ ist eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Ordnung gleich der Differenz der Ordnungen von $D = 0$ und $E = 0$ ist.

Eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ heißt in bezug auf den Rationalitätsbereich Σ *irreduzibel*, wenn sie mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, die ebenfalls nur Koeffizienten aus Σ besitzt, ein Integral gemeinsam hat; anderenfalls heißt sie für den Rationalitätsbereich Σ *reduzibel*. Dann gilt der Satz des Herrn Frobenius: Eine lineare homogene Differentialgleichung $D = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, die mit einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $J = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ein Integral gemeinsam hat, wird durch jedes Integral von $J = 0$ erfüllt.*)

Für die folgenden Betrachtungen sehr wichtig ist auch der Begriff des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* zweier linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ. Haben die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ kein Integral gemeinsam, so gibt es eine lineare homogene Differentialgleichung $U = 0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$ ist und die durch alle Integrale von $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$ erfüllt wird.**) Der lineare homogene Differentialausdruck U, das kleinste gemeinsame Vielfache von D_1 und D_2, ist bis auf einen nur von x abhängigen, willkürlichen, allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor völlig bestimmt und nach einem der angegebenen Sätze sowohl durch D_1 als auch durch D_2 teilbar. Mithin wird:

$$U = AD_1; \quad U = BD_2.$$

*) Für die angeführten Sätze kann man neben der fundamentalen Abhandlung von Frobenius, Über den Begriff der Irreduzibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76 (1873), 236 etwa die Darstellung in Ludw. Schlesingers Handbuch, Bd. 1, S. 43—46 und S. 81—85 vergleichen.

**) Der Fall, daß $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$ einige Integrale gemeinsam haben, wird im folgenden nicht verwandt werden.

A und B bedeuten hierbei lineare homogene Differentialausdrücke mit Koeffizienten aus Σ.*)

Schließlich verwenden wir im folgenden noch den Begriff, daß zwei lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ:

$$Q \equiv q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)y = 0,$$

$$R \equiv r_0(x)\frac{d^n z}{dx^n} + r_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \cdots + r_n(x)z = 0$$

*von derselben Art***) sind. Man sagt: die Gleichung $R = 0$ ist mit der Gleichung $Q = 0$ von derselben Art, falls man von den Integralen der Differentialgleichung $Q = 0$ zu denen der Differentialgleichung $R = 0$ durch die Beziehung:

$$z = a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

übergehen kann; hierbei sollen $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{m-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches Σ sein. Nach unserer Definition sind alle linearen homogenen Differentialgleichungen, die mit einer vorgegebenen von derselben Art sind, mit ihr von gleicher oder niedrigerer Ordnung. Ist die lineare homogene Differentialgleichung $Q = 0$ mit einer linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$ von m^{ter} oder höherer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ von derselben Art, so ist offenbar auch $R = 0$ mit $P = 0$ von derselben Art. Im Falle $n < m$ ist, wenn $R = 0$ mit $Q = 0$ von derselben Art ist, nicht umgekehrt $Q = 0$ mit $R = 0$ von derselben Art, also die eingeführte Beziehung nicht wechselseitig. Für $n = m$ gilt der leicht herleitbare Satz von L. Fuchs: Gehören von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen derselben Ordnung die eine mit der anderen zu derselben Art, so sind die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art.

Wir brauchen noch folgenden Satz von Fuchs: Ist eine lineare homogene Differentialgleichung irreduzibel, so sind alle linearen homogenen Differentialgleichungen, die mit ihr von derselben Art sind, ebenfalls ausnahmslos irreduzibel und von der gleichen Ordnung.***)

---

*) Brassinne, Note 3 in Ch. Sturms Cours d'Analyse, t. 2. L. Heffter, Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 116, S. 157. E. Beke, Symmetrische Funktionen bei linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. Bd. 45, S. 297.

**) Die Bezeichnung stammt für $n = m$ von Herrn Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta mathematica, Bd. 5 (1884), S. 212.

***) L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1888, S. 1274 ff. Vgl. auch die Darstellung in Ludw. Schlesingers Handbuch, Bd. 2_1, S. 120.

Ist im besonderen in der angeführten Relation

$$a_1(x) = a_2(x) = \cdots = a_{m-1}(x) = 0,$$

so sagen wir, die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $Q = 0$ und $R = 0$ sind *ähnlich*. Irgend zwei lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ sollen also als *ähnlich* bezeichnet werden, wenn man aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen der einen durch bloße Multiplikation mit einer dem Rationalitätsbereiche Σ angehörigen Funktion von x die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen der anderen Differentialgleichung finden kann. Der Begriff der Ähnlichkeit, der nur im Paragraphen 5 verwandt wird, ist stets ein gegenseitiger. Ähnliche Differentialgleichungen sind eine ganz spezielle Gattung von Differentialgleichungen derselben Art.

§ 3.

Vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen.

Die linke Seite einer jeden algebraischen Gleichung kann bei Zugrundelegung eines unendlichen Zahlkörpers als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler Polynome aufgefaßt werden. Dementsprechend betrachten wir diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen, bei denen sich die linke Seite als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialausdrücke auffassen läßt. Wir definieren:

Eine lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ mit Koeffizienten aus Σ heißt vollständig reduzibel, wenn man voneinander verschiedene) irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ mit Koeffizienten aus Σ finden kann, so daß die Ordnung der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$ gleich der Summe der Ordnungen von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ ist und $V = 0$ unter allen linearen homogenen Differentialgleichungen diejenige niedrigster Ordnung ist, die durch die Integrale aller Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ gleichzeitig erfüllt wird.*

Von der vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$ sagen wir auch: *sie ist das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen*

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0,\ \cdots,\ J_g = 0.$$

*) Als nicht verschieden gelten zwei lineare homogene Differentialgleichungen, die in sämtlichen Integralen übereinstimmen. Anders ausgedrückt: Alle diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen gelten als nicht verschieden, bei denen die linearen homogenen Differentialausdrücke, durch deren Nullsetzen die Differentialgleichungen entstehen, sich nur um einen Faktor, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches Σ ist, unterscheiden.

Eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung kann auch auf folgende Weise, die mit der obigen gleichwertig ist, charakterisiert werden: für sie existiert wenigstens ein Fundamentalsystem von Integralen, so daß jedes Element dieses Fundamentalsystems auch Integral einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ wird.

Ein *spezieller Fall der vollständig reduziblen* linearen homogenen Differentialgleichung ist die *irreduzible* lineare homogene Differentialgleichung.

Für vollständig reduzible Differentialgleichungen gilt folgender Satz:

I. *Ist $V=0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, die das kleinste gemeinsame Vielfache der in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1=0,\ J_2=0, \cdots, J_g=0$ mit Koeffizienten aus Σ ist, und gibt es irgend eine von $J_1=0,\ J_2=0, \cdots, J_g=0$ verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1'=0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ genügen, so muß diese mit einer der irreduziblen Differentialgleichungen $J_1=0,\ J_2=0, \cdots, J_g=0$ notwendig von derselben Art sein.*

Die nach Voraussetzung voneinander verschiedenen Differentialgleichungen $J_1=0,\ J_2=0, \cdots, J_g=0$ mögen die Ordnungen $i_1, i_2, \cdots, i_g$ haben. Wir bilden das kleinste gemeinsame Vielfache von $J_1=0$ und $J_2=0$. Da $J_1=0$ und $J_2=0$ zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen sind, deren linke Seiten sich nicht nur um einen bloß von x abhängigen Faktor unterscheiden, so haben sie kein Integral gemeinsam. Mithin wird ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches, das mit $M_2=0$ bezeichnet sei, eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung i_1+i_2. Der lineare homogene Differentialausdruck M_2 ist sowohl durch J_1 als auch durch J_2 teilbar; daher existiert ein linearer homogener Differentialausdruck A_2 mit Koeffizienten aus Σ von der Ordnung i_2, so daß:

$$M_2 = A_2 J_1$$

wird.

Da $V=0$ das kleinste gemeinsame Vielfache von

$$J_1=0,\ J_2=0, \cdots, J_g=0$$

ist und die Ordnung $i_1+i_2+\cdots+i_g$ hat, so wird das kleinste gemeinsame Vielfache $M_2=0$ von $J_1=0$ und $J_2=0$ durch kein Integral von $J_3=0$ erfüllt. Wir suchen das kleinste gemeinsame Vielfache der zwei linearen homogenen Differentialausdrücke M_2 und J_3 und bezeichnen es mit M_3; dann wird $M_3=A_3M_2$.

Hierbei sind $M_3=0$ und $A_3=0$ lineare homogene Differentialgleichungen der Ordnungen $i_1+i_2+i_3$ bez. i_3 mit Koeffizienten aus Σ.

Wir fahren auf diesem Wege fort und bilden schließlich das kleinste gemeinsame Vielfache von $M_{g-1}=0$ und $J_g=0$; wir werden dann V selbst erhalten. Es wird

$$V=A_g M_{g-1};$$

hierbei ist $A_g=0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung i_g mit Koeffizienten aus Σ.

Ersetzt man M_{g-1}, M_{g-2}, $\cdots$, M_2 durch ihre Werte, so gewinnt man für V die Darstellung:

$$V=A_g A_{g-1}\cdots A_2 J_1.$$

Nach Voraussetzung ist $J_1'=0$ eine von $J_1=0$, $J_2=0$, $\cdots$, $J_g=0$ verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ erfüllen. Da $J_1=0$ und $J_1'=0$ in ihren linken Seiten sich nicht um eine bloße Funktion von x unterscheiden, so wird wegen der Irreduzibilität der zwei Gleichungen kein Integral von $J_1'=0$ der Differentialgleichung $J_1=0$ genügen.

Da $J_1'=0$ eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung ist, so wird entweder kein Integral von $J_1'=0$ oder es werden sämtliche Integrale von $J_1'=0$ der linearen homogenen Differentialgleichung

$$M_2\equiv A_2 J_1=0$$

genügen. Sollte kein Integral von $J_1'=0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $M_2=0$ genügen, so betrachten wir die lineare homogene Differentialgleichung $M_3\equiv A_3 M_2=0$; entweder wird sie durch kein oder alle Integrale von $J_1'=0$ befriedigt. Fährt man auf diese Weise fort, so muß man sicher einmal zu einer linearen homogenen Differentialgleichung $M_{f-1}=0$ gelangen, die durch kein Integral von $J_1'=0$ befriedigt wird, wohingegen sämtliche Integrale von $J_1'=0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $M_f\equiv A_f M_{f-1}=0$ genügen. Dies folgt aus dem Umstande, daß die lineare homogene Differentialgleichung $M_g=0$, deren linke Seite wir mit V bezeichnen können, nach Voraussetzung durch alle Integrale von $J_1'=0$ erfüllt wird.

Sei $y_1, y_2, \cdots, y_{i_f}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_f=0$. Da sämtliche Integrale von $J_f=0$ die Differentialgleichung $M_f=0$ befriedigen, schließen wir aus der Zerlegung $M_f=A_f M_{f-1}$, daß die lineare homogene Differentialgleichung $A_f=0$ die Funktionen

$$M_{f-1}(y_1),\ M_{f-1}(y_2),\ \cdots\ M_{f-1}(y_{i_f})$$

zu Integralen hat. Diese i_f Funktionen sind linear unabhängig. Aus einer Relation:

$$\lambda_1 M_{f-1}(y_1)+\lambda_2 M_{f-1}(y_2)+\cdots+\lambda_{i_f} M_{f-1}(y_{i_f})=0,$$

wobei die λ nicht ausnahmslos verschwindende Konstanten sind, würde nämlich:

$$M_{f-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{i_f} y_{i_f}) = 0$$

folgen, d. h. $J_f = 0$ und $M_{f-1} = 0$ hätten gegen die Voraussetzung ein Integral gemeinsam. Da $A_f = 0$ und $J_f = 0$ von der gleichen Ordnung sind, bilden die Funktionen $M_{f-1}(y_1)$, $M_{f-1}(y_2)$, $\cdots$, $M_{f-1}(y_{i_f})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $A_f = 0$, d. h. $A_f = 0$ ist mit $J_f = 0$ von derselben Art. Aus der Irreduzibilität von $J_f = 0$ folgt nach dem im § 2 angeführten Fuchsschen Satze, daß $A_f = 0$ auch eine in bezug auf den Rationalititätsbereich Σ irreduzible lineare homogene Differentialgleichung ist.

Sei $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_1' = 0$. Da sämtliche Integrale von $J_1' = 0$ die lineare homogene Differentialgleichung $M_f = 0$ erfüllen, kann aus der Zerlegung $M_f = A_f M_{f-1}$ der Schluß gezogen werden, daß die lineare homogene Differentialgleichung $A_f = 0$ die Funktionen $M_{f-1}(z_1)$, $M_{f-1}(z_2)$, $\cdots$, $M_{f-1}(z_{i_1'})$ zu Integralen hat. Diese Funktionen sind linear unabhängig; denn sonst hätte $J_1' = 0$ mit $M_{f-1} = 0$ entgegen unserer obigen Festsetzung ein Integral gemein. Da wir von $A_f = 0$ i_1' linear unabhängige Integrale kennen, ist $A_f = 0$ mindestens von derselben Ordnung wie $J_1' = 0$.

Um den Nachweis zu führen, daß $A_f = 0$ keine lineare homogene Differentialgleichung höherer Ordnung als $J_1' = 0$ ist, bilden wir die lineare homogene Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} u & M_{f-1}(z_1) & M_{f-1}(z_2) & \cdots & M_{f-1}(z_{i_1'}) \\ \frac{du}{dx} & \frac{d M_{f-1}(z_1)}{dx} & \frac{d M_{f-1}(z_2)}{dx} & \cdots & \frac{d M_{f-1}(z_{i_1'})}{dx} \\ \vdots & & & & \\ \frac{d^{i_1'-1} u}{dx^{i_1'-1}} & \frac{d^{i_1'-1} M_{f-1}(z_1)}{dx^{i_1'-1}} & \frac{d^{i_1'-1} M_{f-1}(z_2)}{dx^{i_1'-1}} & \cdots & \frac{d^{i_1'-1} M_{f-1}(z_{i_1'})}{dx^{i_1'-1}} \\ \frac{d^{i_1'} u}{dx^{i_1'}} & \frac{d^{i_1'} M_{f-1}(z_1)}{dx^{i_1'}} & \frac{d^{i_1'} M_{f-1}(z_2)}{dx^{i_1'}} & \cdots & \frac{d^{i_1'} M_{f-1}(z_{i_1'})}{dx^{i_1'}} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir dividieren durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung in u. Die Division durch den Koeffizienten von $\frac{d^{i_1'} u}{dx^{i_1'}}$ ist gestattet; denn dieser Koeffizient ist die Wronskische Determinante der i_1' linear unabhängigen Funktionen $M_{f-1}(z_1)$, $M_{f-1}(z_2)$, $\cdots$, $M_{f-1}(z_{i_1'})$ und hat daher einen von Null verschiedenen Wert. Nach der Division durch den Faktor von $\frac{d^{i_1'} u}{dx^{i_1'}}$ werden die Faktoren von u, $\frac{du}{dx}$, $\cdots$, $\frac{d^{i_1'-1} u}{dx^{i_1'-1}}$ Determinantenquotien-

ten. Da M_{f-1} nur Koeffizienten aus Σ hat, so sind die Determinantenquotienten erstens rationale Funktionen von $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ und deren Ableitungen mit Koeffizienten aus Σ. Zweitens sind sie auch symmetrische Funktionen von $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$. Ersichtlich ist nämlich, falls $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i_1'}$ Konstante bedeuten, für den linearen homogenen Differentialausdruck M_{f-1}:

$$\lambda_1 \frac{d^k M_{f-1}(z_1)}{d x^k} + \lambda_2 \frac{d^k M_{f-1}(z_2)}{d x^k} + \cdots + \lambda_{i_1'} \frac{d^k M_{f-1}(z_{i_1'})}{d x^k}$$
$$= \frac{d^k}{d x^k} M_{f-1}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_{i_1'} z_{i_1'}).$$

Bei jeder linearen homogenen Transformation der $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ mit konstanten Koeffizienten transformieren sich mithin die linearen homogenen Differentialausdrücke $M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$ und deren Ableitungen kogredient mit $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$. Folglich multipliziert sich bei jeder linearen Substitution der Funktionen $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ Zähler und Nenner der fraglichen Determinantenquotienten mit der Substitutionsdeterminante der Funktionen $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$; jeder Determinantenquotient selbst bleibt also ungeändert. Er gehört mithin als rationale symmetrische Funktion eines Fundamentalsystems von Integralen $z_1, z_2, \cdots, z_{i_1'}$ der linearen homogenen Differentialgleichung $J_1' = 0$ mit Koeffizienten aus Σ nach dem Appellschen Satze dem Rationalitätsbereiche Σ an.

Wir haben daher eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ gewonnen, für welche die Integrale

$$M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$$

der linearen homogenen Differentialgleichung $A_f = 0$ ein Fundamentalsystem bilden. Infolge der oben nachgewiesenen Irreduzibilität der linearen homogenen Differentialgleichung $A_f = 0$ kann sich der Differentialausdruck A_f nur um einen Faktor, der bloße Funktion von x ist, von der linken Seite der soeben gewonnenen Differentialgleichung unterscheiden. Folglich bilden $M_{f-1}(z_1), M_{f-1}(z_2), \cdots, M_{f-1}(z_{i_1'})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $A_f = 0$. Mithin ist $A_f = 0$ mit $J_1' = 0$ von derselben Art, und zwar sind infolge der gleichen Ordnungen beide Gleichungen gegenseitig von derselben Art. Auch $A_f = 0$ und $J_f = 0$ waren gegenseitig von derselben Art; folglich sind auch $J_f = 0$ und $J_1' = 0$ gegenseitig von derselben Art. Hiermit ist der aufgestellte Satz I erwiesen.

Wir beweisen jetzt Satz II:

Ist $V = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, die das kleinste gemeinsame Vielfache der in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen

Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *ist, und soll auch nur eine einzige von* $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung* $J_1' = 0$ *mit Koeffizienten aus* Σ *existieren, deren Integrale* $V = 0$ *genügen, so müssen wenigstens zwei der Differentialgleichungen* $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *gegenseitig von derselben Art sein.*

Nach dem voraufgehenden Satze ist infolge der Existenz von $J_1' = 0$ unter den linearen homogenen Differentialgleichungen

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0,\ \cdots,\ J_g = 0$$

wenigstens eine, die mit $J_1' = 0$ von derselben Art ist. Wir denken uns die linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ derartig bezeichnet, daß $J_1 = 0$ mit $J_1' = 0$ von derselben Art ist. In genau der gleichen Weise wie auf S. 96 bilden wir das kleinste gemeinsame Vielfache von $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ und gewinnen auf diese Weise $M_2 = 0$; dann bilden wir als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $M_2 = 0$ und $J_3 = 0$ die Differentialgleichung $M_3 = 0$, usw., bis wir schließlich $V = 0$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $M_{g-1} = 0$ und $J_g = 0$ erhalten. $J_1 = 0$ und $J_1' = 0$ haben als zwei nach Voraussetzung verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen kein Integral gemeinsam, hingegen genügt jedes Integral von $J_1' = 0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $V = 0$. In genau derselben Weise wie auf S. 97 schließen wir, daß unter den linearen homogenen Differentialgleichungen $M_2 = 0, M_3 = 0, \cdots, M_{g-1} = 0, M_g \equiv V = 0$ eine vorhanden sein muß, wir bezeichnen sie mit $M_f = 0 (2 \leqq f \leqq g)$, so daß $M_f = 0$ durch sämtliche Integrale von $J_1' = 0$ erfüllt wird, während kein Integral von $J_1' = 0$ der linearen homogenen Differentialgleichung $M_{f-1} = 0$, die $M_f = 0$ unmittelbar voraufgeht, genügt. Offenbar ist $M_1 \equiv J_1$. Bei Verwendung der gleichen Bezeichnung wie auf S. 97 haben wir die Zerlegung

$$M_f = A_f M_{f-1}.$$

Aus ihr schließen wir genau wörtlich wie auf S. 97—99, daß die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_f = 0$ und $J_1' = 0$ gegenseitig von derselben Art sind. Die zwei irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$ und $J_1' = 0$ waren nach dem Anfang des Beweises gegenseitig von derselben Art. Folglich müssen $J_1 = 0$ und $J_f = 0$ gegenseitig von derselben Art sein; denn jede dieser Gleichungen ist mit der irreduziblen Gleichung $J_1' = 0$ von derselben Art. Hiermit ist Satz II bewiesen.

Satz III. *Ist die vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung* $V = 0$ *mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche* Σ *kleinstes gemeinsames Vielfaches der in bezug auf* Σ *irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen* $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *mit Koeffizienten aus* Σ

und sind irgend $f \geqq 2$ *unter den linearen homogenen Differentialgleichungen* $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ *gegenseitig von derselben Art, so können diese auf unendlich viele Weisen durch* f *andere irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus* Σ *ersetzt werden. Die neuen Differentialgleichungen sind sowohl untereinander als auch mit den Differentialgleichungen, die sie ersetzen, von derselben Art. Die Differentialgleichung* $V = 0$ *ist dann auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus* Σ.

Da der Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen $V = 0$ unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ numeriert sind, so seien diese zum Zwecke des Beweises derartig bezeichnet, daß die f Gleichungen, die nach Voraussetzung untereinander von derselben Art sind, die ersten f Gleichungen: $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ werden ($f \leqq g$). Infolge der Irreduzibilität der Gleichungen genügt die Voraussetzung, daß $J_1 = 0$ mit jeder der Differentialgleichungen $J_2 = 0$, $J_3 = 0, \cdots, J_f = 0$ von derselben Art ist; dann sind zwei beliebige der f Gleichungen stets gegenseitig von derselben Art. $t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}$ sei ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung $J_1 = 0$. Da $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ von derselben Art sind, so gibt es einen linearen homogenen Differentialausdruck B_2 mit Koeffizienten aus Σ von $i_1 - 1^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung, daß $B_2(t_1)$, $B_2(t_2), \cdots, B_2(t_{i_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_2 = 0$ bilden. Da $J_1 = 0$ mit $J_3 = 0$, $J_4 = 0, \cdots, J_f = 0$ von derselben Art ist, existieren in gleicher Weise lineare homogene Differentialausdrücke $B_3, B_4, \cdots, B_f$ mit Koeffizienten aus Σ höchstens $i_1 - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, daß die Funktionen $B_3(t_1)$, $B_3(t_2), \cdots, B_3(t_{i_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_3 = 0$, die Funktionen

$$B_4(t_1),\ B_4(t_2),\ \cdots,\ B_4(t_{i_1})$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_4 = 0$, usw., schließlich die Funktionen $B_f(t_1)$, $B_f(t_2), \cdots, B_f(t_{i_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_f = 0$ bilden.

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ seien f willkürliche Konstante, die dem Rationalitätsbereiche Σ angehören sollen. Wir definieren durch sie die i_1 neuen Funktionen:

$$C(t_k) = \lambda_1 t_k + \lambda_2 B_2(t_k) + \lambda_3 B_3(t_k) + \cdots + \lambda_f B_f(t_k),$$
$$k = 1, 2, \cdots, i_1.$$

Da die Koeffizienten von $B_2, B_3, \cdots, B_f$ ebenso wie die Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ dem Rationalitätsbereiche Σ angehören, hat der lineare homogene Differentialausdruck C nur Koeffizienten aus Σ. Der lineare

homogene Differentialausdruck C von $i_1 - 1^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung kann für keine Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$, die nicht ausnahmslos Null sind, verschwinden. Denn würde C identisch Null werden, so würde

$$\lambda_1 t_k + \lambda_2 B_2(t_k) + \lambda_3 B_3(t_k) + \cdots + \lambda_f B_f(t_k) = 0$$

sein, d. h. die Funktionen $t_k, B_2(t_k), \cdots, B_f(t_k)$ würden in Dependenz stehen. Die genannten Funktionen sind aber linear unabhängig; denn sie gehören zu den Elementen von Fundamentalsystemen von Integralen von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ und können daher auch als zu den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen von $V = 0$, das kleinstes gemeinsames Vielfaches von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ $(g \geqq f)$ ist, zugehörig angesehen werden. Folglich kann C für konstante Werte

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$$

nur verschwinden, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0$ ist.

Wir bilden die Wronskische Determinante der i_1 Funktionen

$$C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$$

und behaupten, sie kann auch für kein konstantes Wertsystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ des Rationalitätsbereiches Σ, ausgenommen $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0$, verschwinden. Angenommen die Wronskische Determinante von

$$C(t_1), C(t_2), \cdots, C(t_{i_1})$$

sei für konstante Werte $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ des Rationalitätsbereiches Σ Null; dann müssen Konstante $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{i_1}$ existieren, die nicht ausnahmslos verschwinden, so daß:

$$\sigma_1 C(t_1) + \sigma_2 C(t_2) + \cdots + \sigma_{i_1} C(t_{i_1}) = 0$$

oder

$$C(\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2 + \cdots + \sigma_{i_1} t_{i_1}) = 0$$

wird, d. h. $J_1 = 0$ würde mit einer linearen homogenen Differentialgleichung $C = 0$ von $i_1 - 1^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus Σ das Integral $\sigma_1 t_1 + \sigma_2 t_2 + \cdots + \sigma_{i_1} t_{i_1}$ gemein haben; dieses kann auch nicht etwa Null sein, denn es ist aus dem Fundamentalsystem $t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}$ von Integralen von $J_1 = 0$ komponiert. Der lineare homogene Differentialausdruck C existiert, ausgenommen für

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0,$$

wirklich; denn wir zeigten ja, daß zu seinem Verschwinden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0$$

erforderlich ist. Die irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1 = 0$ von der Ordnung i_1 kann mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung $C = 0$ niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus dem

Rationalitätsbereiche Σ ein Integral gemeinsam haben. Hieraus folgt, daß die Wronskische Determinante von $C(t_1)$, $C(t_2)$, $\cdots$, $C(t_{i_1})$ für jedes konstante Wertsystem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ aus Σ (ausgenommen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_f = 0)$$

von Null verschieden ist.

Wir bilden die lineare homogene Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} t & C(t_1) & C(t_2) & \cdots & C(t_{i_1}) \\ \frac{dt}{dx} & \frac{dC(t_1)}{dx} & \frac{dC(t_2)}{dx} & \cdots & \frac{dC(t_{i_1})}{dx} \\ \frac{d^2t}{dx^2} & \frac{d^2C(t_1)}{dx^2} & \frac{d^2C(t_2)}{dx^2} & \cdots & \frac{d^2C(t_{i_1})}{dx^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{i_1}t}{dx^{i_1}} & \frac{d^{i_1}C(t_1)}{dx^{i_1}} & \frac{d^{i_1}C(t_2)}{dx^{i_1}} & \cdots & \frac{d^{i_1}C(t_{i_1})}{dx^{i_1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir können durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung von t, der als Wronskische Determinante der Funktionen $C(t_1)$, $C(t_2)$, $\cdots$, $C(t_{i_1})$ von Null verschieden ist, dividieren. Nach der Division durch den Faktor von $\frac{d^{i_1}t}{dx^{i_1}}$ werden die Koeffizienten von t, $\frac{dt}{dx}$, $\cdots$, $\frac{d^{i_1-1}t}{dx^{i_1-1}}$ Determinantenquotienten, die als rationale symmetrische Funktionen des Fundamentalsystems $t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}$ von $J_1 = 0$ mit Koeffizienten aus Σ dem Rationalitätsbereiche Σ angehören müssen. Der Nachweis ist genau analog wie auf S. 99 zu führen. Je nach der Wahl von $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ kann man aus $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $\cdots$, $J_f = 0$ unendlich viele lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ herleiten, die $C(t_1)$, $C(t_2)$, $\cdots$, $C(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen haben. Eine Differentialgleichung, die wir auf die angegebene Weise aus $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $\cdots$, $J_f = 0$ herleiten, sei mit $\bar{J} = 0$ bezeichnet. Die lineare homogene Differentialgleichung $\bar{J} = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ist, da sie $C(t_1)$, $C(t_2)$, $\cdots$, $C(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen besitzt, mit $J_1 = 0$ von derselben Art. Infolge der Irreduzibilität von $J_1 = 0$ ist auch $\bar{J} = 0$ eine in bezug auf den Rationalitätsbereich Σ irreduzible Gleichung. Da die Integrale einer jeden dieser unendlich vielen irreduziblen Differentialgleichungen $\bar{J} = 0$ lineare homogene Kombinationen der Integrale von

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0,\ \cdots,\ J_f = 0$$

mit konstanten Koeffizienten sind, so hat jede der unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J} = 0$ ihre Integrale mit $V = 0$ gemeinsam. Sind also zwei oder mehr der linearen homogenen irreduziblen Differentialgleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $\cdots$, $J_g = 0$, deren

kleinstes gemeinsames Vielfaches $V=0$ ist, von derselben Art, so gibt es unendlich viele verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ befriedigen.

Wir behalten unsere Voraussetzung bei, daß die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_f=0$ von derselben Art sind. Den Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_f$ legen wir jetzt f verschiedene Wertsysteme

$$\begin{matrix} \lambda_{11}, \lambda_{21}, \cdots, \lambda_{f1}, \\ \lambda_{12}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{f2}, \\ \vdots \\ \lambda_{1f}, \lambda_{2f}, \cdots, \lambda_{ff} \end{matrix}$$

aus dem Rationalitätsbereiche Σ bei. Wir bilden mit diesen f Wertsystemen die $\bar{J}=0$ entsprechenden f irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die man für

$$\lambda_1=\lambda_{1l},\ \lambda_2=\lambda_{2l}, \cdots, \lambda_f=\lambda_{fl} \quad (l=1,2,\cdots,f)$$

erhält und die mit $\bar{J}_1=0, \bar{J}_2=0, \cdots, \bar{J}_f=0$ bezeichnet seien. Es hat $\bar{J}_1=0$ das Fundamentalsystem von Integralen:

$$\begin{matrix} \lambda_{11}t_1+\lambda_{21}B_2(t_1)+\lambda_{31}B_3(t_1)+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_1), \\ \lambda_{11}t_2+\lambda_{21}B_2(t_2)+\lambda_{31}B_3(t_2)+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_2), \\ \vdots \\ \lambda_{11}t_{i_1}+\lambda_{21}B_2(t_{i_1})+\lambda_{31}B_3(t_{i_1})+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_{i_1}). \end{matrix}$$

Wir bezeichnen diese Funktionen mit

$$C_1(t_1),\ C_1(t_2), \cdots, C_1(t_{i_1}).$$

Verstehen wir unter $C_l(t_k)$ die Funktion:

$$C_l(t_k)=\lambda_{1l}t_k+\lambda_{2l}B_2(t_k)+\lambda_{3l}B_3(t_k)+\cdots+\lambda_{fl}B_f(t_k),$$
$$l=1,2,\cdots,f;\quad k=1,2,\cdots,i_1,$$

so hat die lineare homogene irreduzible Differentialgleichung $\bar{J}_l=0$ die i_1 Funktionen $C_l(t_1), C_l(t_2), \cdots, C_l(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen.

Die f^2 Konstanten λ_{jl} $(j=1,2,\cdots,f;\ l=1,2,\cdots,f)$ seien derartig aus dem Rationalitätsbereiche Σ gewählt, daß die Determinante $|\lambda_{jl}|$ von Null verschieden ist. Dann lassen sich die Gleichungen, die ich im folgenden noch mit (C) zitiere,

$$\begin{aligned} C_1(t_k)&=\lambda_{11}t_k+\lambda_{21}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{f1}B_f(t_k), \\ C_2(t_k)&=\lambda_{12}t_k+\lambda_{22}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{f2}B_f(t_k), \\ C_3(t_k)&=\lambda_{13}t_k+\lambda_{23}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{f3}B_f(t_k), \\ &\vdots \\ C_f(t_k)&=\lambda_{1f}t_k+\lambda_{2f}B_2(t_k)+\cdots+\lambda_{ff}B_f(t_k) \end{aligned}$$

nach t_k, $B_2(t_k), \cdots, B_f(t_k)$ auflösen, und t_k, $B_2(t_k), \cdots, B_f(t_k)$ ergeben sich als lineare homogene Funktionen von $C_1(t_k)$, $C_2(t_k), \cdots, C_f(t_k)$. Hierbei kann k die Werte $1, 2, \cdots, i_1$ annehmen. Da die lineare homogene irreduzible Differentialgleichung $\bar{J}_l = 0$ $(l = 1, 2, \cdots, f)$ mit Koeffizienten aus Σ die i_1 Funktionen $C_l(t_1)$, $C_l(t_2), \cdots, C_l(t_{i_1})$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen hat, folgt, daß sich für $|\lambda_{jl}| \neq 0$ sämtliche Integrale von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ durch die von $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten darstellen lassen.

Wir bilden das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$, die alle von der gleichen Ordnung i_1 sind, und bezeichnen diese lineare homogene Differentialgleichung mit $M_f = 0$. Dann muß $M_f = 0$ von der Ordnung $i_1 f$ sein; denn das kleinste gemeinsame Vielfache von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$, die Differentialgleichung $V = 0$, hat die Summe der Ordnungen von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ als Ordnungszahl. $M_f = 0$ wird auch durch alle Integrale von $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ befriedigt; denn infolge der Art und Weise, wie wir die eben genannten Differentialgleichungen konstruierten, drücken sich alle ihre Integrale linear und homogen mit konstanten Koeffizienten durch diejenigen von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ aus.

Wir bilden ferner noch die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch alle Integrale der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots,$ $\bar{J}_f = 0$, die sämtlich die gleiche Ordnung i_1 haben, erfüllt wird. Diese lineare homogene Differentialgleichung, die wir mit $\bar{M}_f = 0$ bezeichnen, muß von der Ordnung $i_1(f - f_1)$ sein, wobei f_1 einen der Werte $0, 1, 2, \cdots, f - 1$ bezeichnet.*) Ist $|\lambda_{jl}| \neq 0$, so drücken sich, wie wir zeigten,

*) Um $\bar{M}_f = 0$ zu finden, sucht man zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache von $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$; diese lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ sei mit $\bar{M}_2 = 0$ bezeichnet. Haben $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$ kein Integral gemeinsam, so hat $\bar{M}_2 = 0$ als Ordnungszahl $2 i_1$, nämlich die Summe der Ordnungen von $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$. Haben $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$ ein Integral gemeinsam, so haben sie infolge ihrer Irreduzibilität alle Integrale gemeinsam, die linken Seiten von $\bar{J}_1 = 0$ und $\bar{J}_2 = 0$ unterscheiden sich dann nur um einen Faktor, der bloße Funktion von x aus dem Rationalitätsbereiche Σ ist, und für $\bar{M}_2 = 0$ kann entweder $\bar{J}_1 = 0$ oder $\bar{J}_2 = 0$ gewählt werden. In diesem Falle hat $\bar{M}_2 = 0$ die Ordnung i_1. Dann sucht man das kleinste gemeinsame Vielfache der linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{M}_2 = 0$ und $\bar{J}_3 = 0$. Diese lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ sei mit $\bar{M}_3 = 0$ bezeichnet. Entweder hat $\bar{M}_3 = 0$ die Summe der Ordnungszahlen von $\bar{M}_2 = 0$ und $\bar{J}_3 = 0$ zur Ordnungszahl, oder man kann $\bar{M}_3 = 0$ mit $\bar{M}_2 = 0$ zusammenfallen lassen, indem $\bar{J}_3 = 0$ mit $\bar{M}_2 = 0$ ein Integral und folglich wegen der Irreduzibilität alle Integrale gemeinsam hat. Die lineare homogene Differentialgleichung $\bar{M}_3 = 0$ hat entweder $3 i_1$ oder $2 i_1$ oder i_1 als Ordnungszahl. Auf diese Art ist fortzufahren, bis man zu der linearen homogenen Differentialgleichung $\bar{M}_f = 0$

alle Integrale von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ linear und homogen mit konstanten Koeffizienten durch die von $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ aus. Folglich genügen, wenn $|\lambda_{jl}| \neq 0$ ist, alle Integrale von $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ auch der linearen homogenen Differentialgleichung $\bar{M}_f = 0$, und mithin hat für $|\lambda_{jl}| \neq 0$ die Differentialgleichung $\bar{M}_f = 0$ die Ordnung $i_1 f$ und wird durch alle Integrale von $M_f = 0$ befriedigt. $M_f = 0$ und $\bar{M}_f = 0$ können sich daher in ihren linken Seiten nur um einen unwesentlichen Faktor, der eine bloße Funktion von x aus dem Rationalitätsbereiche ist, unterscheiden, und $M_f = 0$ kann, falls $|\lambda_{jl}| \neq 0$ ist, sowohl als kleinstes gemeinsames Vielfaches der f irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ als auch der ursprünglichen Gleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ angesehen werden. Im Falle $|\lambda_{jl}| \neq 0$ können daher die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ die Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ vertreten. Die Konstanten λ_{jl} $(j = 1, 2, \cdots, f;\ l = 1, 2, \cdots, f)$ lassen sich aus Σ auf unendlich viele Weisen so wählen, daß $|\lambda_{jl}| \neq 0$ ist. Mithin kann man $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ auf unendlich viele Weisen durch $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ ersetzen und $V = 0$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0, J_{f+1} = 0, J_{f+2} = 0, \cdots, J_g = 0$ ansehen. Da jede der irreduziblen Gleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ mit Koeffizienten aus Σ mit $J_1 = 0$ von derselben Art ist, wie aus der Form der Integrale hervorgeht, sind diese f Gleichungen auch untereinander von derselben Art. Hiermit ist der Satz III bewiesen.

Verschwindet die Determinante $|\lambda_{jl}|$, so folgt aus den Gleichungen (C) auf Seite 104, daß die Funktionen $C_1(t_k), C_2(t_k), \cdots, C_f(t_k)$ in Dependenz stehen. Dann werden die f Gleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ durch weniger als $i_1 f$ linear unabhängige Funktionen befriedigt. Mithin wird die Gleichung $\bar{M}_f = 0$ von niedrigerer als $i_1 f^{\text{ter}}$ Ordnung, und die Gleichungen $\bar{J}_1 = 0, \bar{J}_2 = 0, \cdots, \bar{J}_f = 0$ können die Gleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_f = 0$ nicht mehr vertreten.

Als Schlußsatz geben wir an:

Satz IV. *Eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist entweder nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differential-*

---

mit Koeffizienten aus Σ gelangt, die durch alle Integrale von $\bar{M}_{f-1} = 0$ und $J_f = 0$ erfüllt wird. Hat $J_f = 0$ mit $\bar{M}_{f-1} = 0$ ein Integral gemeinsam, so wird $\bar{M}_{f-1} = 0$ durch alle Integrale von $J_f = 0$ erfüllt, und man kann $\bar{M}_f = 0$ mit $\bar{M}_{f-1} = 0$ zusammenfallen lassen; sonst hat $\bar{M}_f = 0$ als Ordnungszahl die Summe der Ordnungszahlen von $\bar{M}_{f-1} = 0$ und $J_f = 0$. Die Ordnung von $\bar{M}_f = 0$ ergibt sich daher auf jeden Fall, wie im Texte angegeben wurde.

gleichungen. Ist die vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung $V=0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ kleinstes gemeinsames Vielfaches von g in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, so ist notwendig und hinreichend, damit $V=0$ auf unendlich viele Weisen als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ aufgefaßt werden kann, daß wenigstens zwei der g Gleichungen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches $V=0$ ist, gegenseitig von derselben Art sind.

Der Beweis des Satzes IV ergibt sich leicht auf folgende Weise: Ist $V=0$ kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_g=0$ und gibt es keine von diesen verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1'=0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ genügen, so ist offenbar $V=0$ nur auf eine einzige Weise kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Soll $V=0$ auf mehr als eine Weise kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ sein, so gibt es wenigstens eine von $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_g=0$ verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1'=0$ mit Koeffizienten aus Σ, deren Integrale $V=0$ genügen. Nach Satz II existieren dann unter den Differentialgleichungen $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_g=0$ wenigstens zwei, die gegenseitig von derselben Art sind. Diese können nach Satz III auf unendlich viele Arten durch zwei lineare homogene irreduzible Differentialgleichungen, die mit diesen zwei von derselben Art sind, ersetzt werden, und $V=0$ kann als kleinstes gemeinsames Vielfaches der zwei neuen Differentialgleichungen und der übrigen $g-2$ angesehen werden. $V=0$ ist also nur auf eine einzige oder auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Hiermit ist Satz IV erwiesen.

§ 4.

Die zu einer linearen homogenen Differentalgleichung zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Nicht jede lineare homogene Differentialgleichung

$$Q \equiv q_0(x)\frac{d^m y}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m(x)y = 0$$

mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ ist vollständig reduzibel. Z. B. ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat,

falls man als Rationalitätsbereich den aller reellen und imaginären Konstanten wählt, nie vollständig reduzibel. Dies ist eine unmittelbare Folge der in meiner Arbeit*) „Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen“ auf Seite 441 angegebenen Betrachtungen von Herrn Stickelberger. Infolgedessen empfiehlt es sich, den Begriff der *größten vollständig reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung, die zu einer vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung* $Q=0$ *mit Koeffizienten aus* Σ *gehört*, einzuführen.

Ist $V=0$ *eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus* Σ, *deren sämtliche Integrale der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung* $Q=0$ *mit Koeffizienten aus* Σ *genügen, und existiert keine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus* Σ, *deren Integrale der Differentialgleichung* $Q=0$, *aber nicht* $V=0$ *genügen*, so sagen wir: $V=0$ *ist eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu* $Q=0$ *gehört.*

Ist $V=0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $Q=0$ gehört, und $f(x)$ eine beliebige, dem Rationalitätsbereiche Σ angehörige Funktion, so ist auch die durch Nullsetzen des linearen homogenen Differentialausdruckes $W=f(x)V$ entstehende Gleichung eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $Q=0$ gehört.

Es gilt nun der Satz I:

Irgend zwei zu einer linearen homogenen Differentialgleichung gehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus dem der Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ *unterscheiden sich in ihren linken Seiten nur um einen allen Koeffizienten gemeinsamen Faktor, der eine dem Rationalitätsbereiche* Σ *angehörige Funktion ist.*

Seien $V=0$ und $W=0$ zwei größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die zu der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung $Q=0$ gehören. Da $W=0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung sein soll, so muß sich $W=0$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches gewisser irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen $J_1=0, J_2=0, \cdots, J_\mu=0$ mit Koeffizienten aus Σ auffassen lassen. Angenommen, eine der zuletzt angegebenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, etwa $J_i=0$, besitze ein Integral, das nicht $V=0$ genügt, dann befriedigt infolge der Irreduzibilität von $J_i=0$ nach dem Frobeniusschen Satz kein Integral von $J_i=0$ die Differentialgleichung $V=0$. Da alle Integrale

*) Math. Annalen, Bd. 59.

von $J_i = 0$ die zu $Q = 0$ gehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung $W = 0$ befriedigen, so genügen alle Integrale von $J_i = 0$ der Differentialgleichung $Q = 0$. Die Existenz einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $J_i = 0$ mit den nachgewiesenen Eigenschaften widerspricht aber der Tatsache, daß $V = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung sein soll, die zu $Q = 0$ gehört. Mithin genügen alle Integrale von $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots, J_\mu = 0$ und daher alle Integrale von $W = 0$ auch der Differentialgleichung $V = 0$. Aus der Gleichberechtigung von $V = 0$ und $W = 0$ schließen wir, daß auch umgekehrt jedes Integral von $V = 0$ der Differentialgleichung $W = 0$ genügt. Hieraus folgt der angegebene Satz I.

Betrachtet man, wie wir dies auch bisher taten, alle linearen homogenen Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus Σ, die in ihren Integralen völlig übereinstimmen oder, anders ausgedrückt, deren linke Seiten sich nur um einen bloß von x abhängigen Faktor unterscheiden, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches ist, als *nicht verschieden*, so gelangt man zum Satz II:

Zu jeder linearen homogenen Differentialgleichung $Q = 0$ mit Koeffizienten aus Σ gibt es eine einzige wohlbestimmte zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ. Sie ist die lineare homogene Differentialgleichung niedrigster Ordnung mit Koeffizienten aus Σ, die durch jedes Integral von $Q = 0$ erfüllt wird, das einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ genügt.

Aus dem Satze II folgt unmittelbar der Satz III:

Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß dies für die zu ihr zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung zutrifft.

Wird eine lineare homogene Differentialgleichung $Q = 0$ mit Koeffizienten aus Σ durch die Integrale einer Anzahl verschiedener irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen befriedigt, bei denen die Summe der Ordnungen größer als die Ordnung von $Q = 0$ ist, so ist offenbar die zu $Q = 0$ zugehörige größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, deren Ordnung gleich oder kleiner als die von $Q = 0$ ist, auf mehr als eine Weise und daher nach Satz IV des § 3 auf unendlich viele Weisen kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen. Aus dieser Bemerkung und Satz III dieses Paragraphen folgt:

Satz IV. *Gibt es für eine reduzible lineare homogene Differentialgleichung eine einzige oder eine endliche Anzahl verschiedener irreduzibler*

linearer homogener Differentialgleichungen, durch deren Integrale die vorgelegte reduzible lineare homogene Differentialgleichung befriedigt wird, so ist die Summe der Ordnungen dieser irreduziblen Differentialgleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung der reduziblen Differentialgleichung.

Ferner ergeben sich aus Satz III und den Resultaten des vorigen Paragraphen:

Satz V. *Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß es wenigstens zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen gibt, deren Integrale der vorgelegten Differentialgleichung genügen und die gegenseitig von derselben Art sind.*

Satz VI. *Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so gibt es unter einer jeden beliebigen Anzahl derartiger irreduzibler Gleichungen, bei denen die Summe der Ordnungen gleich oder größer als die Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung ist, wenigstens zwei Differentialgleichungen, die von derselben Art sind.*

Die Sätze IV, V und VI habe ich auch in meiner Arbeit „Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen" (Math. Ann., Bd. 56, S. 570 u. 575) bewiesen. Hingegen gilt *bei Zugrundelegung des in dem vorliegenden Aufsatze beschriebenen Rationalitätsbereiches Σ nicht* mehr der am angeführten Orte auf Seite 577 hergeleitete Satz:

Damit eine lineare homogene Differentalgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist notwendig und hinreichend, daß die vorgelegte Differentialgleichung außer einem Integral y_1, das auch einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung genügen muß, noch ein zweites Integral der Form:

$$b_0(x)y_1 + b_1(x)\frac{dy_1}{dx} + \cdots + b_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}y_1}{dx^{s-1}}$$

besitzt; dabei sollen $b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{s-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches und s die Ordnung der irreduziblen Differentialgleichung, der y_1 genügt, bedeuten. $b_0(x) = \text{Const}$, gleichzeitig

$$b_1(x) = b_2(x) = \cdots = b_{s-1}(x) = 0$$

ist natürlich ausgeschlossen; einige der Funktionen $b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{s-1}(x)$, jedoch nicht alle, können selbstverständlich verschwinden.

Der angegebene Satz gilt sicher, falls ein Rationalitätsbereich Σ, der alle reellen und imaginären Konstanten enthält, zugrunde gelegt wird.

In meinem früheren oben zitierten Aufsatz ist die Zugehörigkeit *aller* reellen wie imaginären Konstanten zum Rationalitätsbereiche vorausgesetzt. (Vgl. S. 574, Zeile 10 „wobei λ und μ willkürliche Konstante sind", Benützung der Rationalitätsgruppe, vgl. meinen Aufsatz „Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen", Math. Annalen, Bd. 59, Anmerkung auf S. 437, wo ich diesen Gegenstand schon zur Sprache brachte. In meiner zitierten Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 56 ist also der Rationalitätsbereich wie in dieser zu wählen, außerdem soll er noch alle Konstanten enthalten.) Daß der zuletzt angegebene Satz für einen Rationalitätsbereich, der nicht alle Konstanten enthält, nicht mehr zu gelten braucht, lehrt das mir von Herrn Landau in einem Briefe vom 4. Februar 1903 mitgeteilte Beispiel der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$. Sie hat $y_1 = \sin x$, $\frac{dy_1}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ zu Integralen. Diese Differentialgleichung ist aber, wie man leicht zeigt, im Zahlenkörper aller reellen Zahlen irreduzibel; im Körper aller reellen wie imaginären Zahlen wird sie reduzibel. Der Grund, warum der fragliche Satz für einen Rationalitätsbereich Σ, der nicht alle reellen wie imaginären Konstanten enthält, versagen kann, liegt darin, daß zu seinem Beweise ein Satz von Herrn Frobenius*) benützt wurde, dem man folgende Fassung geben kann: Wird von dem unserer Betrachtung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche Σ vorausgesetzt, daß alle reellen wie imaginären Konstanten zum Rationalitätsbereiche gehören, so ist jede lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ reduzibel, wenn von zwei verschiedenen ihrer Integrale das eine ein linearer homogener Differentialausdruck des anderen mit Koeffizienten aus Σ ist.

Wie mir Herr Landau in einem Briefe vom 21. Februar 1903 mit Beweis mitgeteilt hat, gilt übrigens der eben angeführte Satz von Herrn Frobenius schon dann, wenn jede Wurzel jeder algebraischen Gleichung mit Zahlenkoeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche dem Rationalitätsbereiche angehört, also z. B. für den Rationalitätsbereich aller rationalen Funktionen von x, deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind. Daß aber der Frobeniussche Satz nicht auf den im § 1 definierten Rationalitätsbereich ausgedehnt werden kann, lehrt das Landausche Beispiel $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$.**)

*) G. Frobenius, Journal f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76, S. 268.

**) Vgl. die Note von Herrn E. Landau in Archiv der Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 10, S. 45—50.

§ 5.

Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in größte vollständig reduzible Faktoren.

Wir sagen: der lineare homogene Differentialausdruck

$$(1) \qquad Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2 V_1$$

mit Koeffizienten aus Σ ist in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt, wenn die Summe der Ordnungen der linearen homogenen Differentialgleichungen $V_\lambda = 0$, $V_{\lambda-1} = 0, \cdots, V_3 = 0$, $V_2 = 0$, $V_1 = 0$ mit Koeffizienten aus Σ gleich der Ordnung von $Q = 0$ ist, und wenn ferner $V_1 = 0$ eine größte vollständige reduzible zu $Q = 0$ gehörige lineare homogene Differentialgleichung ist, $V_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 = 0$ gehört, drittens $V_3 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 = 0$ gehört, usw., schließlich $V_\lambda = 0$ selbst eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist. $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_\lambda$ nennen wir *größte vollständig reduzibleFaktoren von* Q. Die geschilderte Zerlegung von Q ist nicht eindeutig, denn man kann offenbar einen beliebigen der Faktoren V_ϱ mit einer willkürlichen, dem Rationalitätsbereiche Σ angehörigen Funktion von x multiplizieren und dann die Kette (1) entsprechend nach links fortsetzen.

Unter Benutzung der im § 2 am Schluß eingeführten Bezeichnung „ähnliche Differentialgleichungen" gilt folgender Satz:

Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt wird, so enthält jede Zerlegung gleich viele größte vollständig reduzible Faktoren, und diese sind bei irgend zwei Zerlegungen der Reihe nach einander so zugeordnet, daß immer zwei durch Nullsetzen zugeordneter größter vollständig reduzibler Faktoren sich ergebende lineare homogene Differentialgleichungen ähnlich sind.

Sei neben

$$(1) \qquad Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 V_1$$

noch

$$(2) \qquad Q = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2 W_1$$

eine zweite Zerlegung von Q in größte vollständig reduzible Faktoren. Unser Satz behauptet, daß $\lambda = \lambda'$ sein muß, und $V_1 = 0$ und $W_1 = 0$, $V_2 = 0$ und $W_2 = 0, \cdots, V_\lambda = 0$ und $W_\lambda = 0$ ähnliche Differentialgleichungen sind. Beim Beweise des Satzes bedenken wir zunächst, daß

$W_1 = 0$ und $V_1 = 0$ größte vollständig reduzible zu $Q = 0$ gehörige Differentialgleichungen sind. Nach Satz I des § 4 wird mithin:

$$W_1 = f(x) V_1, \tag{3}$$

wobei $f(x)$ eine Funktion aus dem Rationalitätsbereiche Σ ist. $W_1 = 0$ und $V_1 = 0$ haben infolge der Gleichung (3) genau dieselben Integrale, sind also sicher ähnliche Differentialgleichungen. Infolge der Gleichung (3) geht die Gleichung (2) über in:

$$Q = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2 (f(x) V_1). \tag{4}$$

Man führe die durch das Symbol W_2 ausgedrückte Differentiationsoperation aus und ordne nach Ableitungen von V_1; auf diese Weise erhält man

$$W_2(f(x) V_1) = X_2 V_1. \tag{5}$$

X_2 bedeutet einen linearen homogenen Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ.

Aus den Relationen (4) und (5) folgt:

$$Q = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 V_1. \tag{6}$$

Wir setzen

$$U = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2, \tag{7}$$

also:

$$Q = U V_1. \tag{8}$$

Wir betrachten $X_2 = 0$ näher. Aus der Gleichung (5) folgt: Man findet durch Multiplikation mit $\frac{1}{f(x)}$ aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen von $W_2 = 0$ die entsprechenden eines Fundamentalsystems von $X_2 = 0$. Es sind also $W_2 = 0$ und $X_2 = 0$ ähnliche Differentialgleichungen. Bedenkt man, daß nach dem im § 2 angegebenen Fuchsschen Satze zwei ähnliche lineare homogene Differentialgleichungen gleichzeitig reduzibel oder irreduzibel sind, so folgt, da $W_2 = 0$ als vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen ist, daß dies auch für $X_2 = 0$ zutreffen muß. $X_2 = 0$ ist also auch eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Wir führen jetzt den Nachweis, daß $X_2 = 0$ eine *größte* vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung ist, die zu $U = 0$ gehört. Angenommen $X_2 = 0$ sei keine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $U = 0$ gehört. Es möge $\overline{X}_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ sein, die zu $U = 0$ gehört. $X_2 = 0$ ist infolge seiner vollständigen Reduzibilität als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen auffaßbar, ferner ist nach (7)

jedes Integral von $X_2 = 0$ auch Integral von $U = 0$. Hieraus folgt nach Satz II des § 4, daß die lineare homogene Differentialgleichung $\overline{X}_2 = 0$, die nach Voraussetzung die größte vollständig reduzible lineare homogene zu $U = 0$ gehörige Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ ist, durch alle Integrale von $X_2 = 0$ befriedigt werden muß. Mithin läßt sich ein linearer homogener Differentialausdruck Z mit Koeffizienten aus Σ finden, so daß

$$\overline{X}_2 = Z X_2 \tag{9}$$

wird. Ist $X_2 = 0$ nicht größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung, die zu $U = 0$ gehört, so wird $\overline{X}_2 = 0$ von höherer Ordnung als $X_2 = 0$.

Da $\overline{X}_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible zu $U = 0$ gehörige lineare homogene Differentialgleichung ist, kann man U so in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegen, daß die Zerlegung mit $\overline{X}_2$ schließt. Es sei also

$$U = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 \overline{X}_2 \tag{10}$$

eine Zerlegung in größte vollständig reduzible Faktoren.

Aus den Gleichungen (8), (9) und (10) folgt:

$$Q = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 Z X_2 V_1. \tag{11}$$

Infolge der Gleichungen (5) und (3) geht (11) über in

$$Q = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 Z W_2 W_1. \tag{12}$$

Wir führen den linearen homogenen Differentialausdruck $\overline{W}_2$ mit Koeffizienten aus Σ ein und verstehen hierunter:

$$\overline{W}_2 = Z W_2. \tag{13}$$

Die Gleichung (12) kann jetzt auch in der Form:

$$Q = X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 \overline{W}_2 W_1 \tag{14}$$

geschrieben werden.

Nach (5) ist

$$Z W_2(f(x) V_1) = Z X_2 V_1,$$

und mit Hilfe von (13) und (9) erhält man:

$$\overline{W}_2(f(x) V_1) = \overline{X}_2 V_1.$$

Die soeben gewonnene Gleichung lehrt, daß man aus einem Fundamentalsystem von Integralen von $\overline{X}_2 = 0$ eines von $\overline{W}_2 = 0$ durch Multiplikation mit $f(x)$ erhält. Folglich ist $\overline{W}_2 = 0$ ebenso wie $\overline{X}_2 = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Aus den Relationen (14) und (2) folgt:

$$X_\tau X_{\tau-1} \cdots X_3 \overline{W}_2 = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2.$$

Da $\overline{W}_2 = 0$ und $W_2 = 0$ vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen sind und $W_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus Σ ist, die zu $W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 W_2$ gehört, so kann $\overline{W}_2 = 0$ nicht von höherer Ordnung als $W_2 = 0$ sein. Nach (13) sind $\overline{W}_2$ und W_2 durch $\overline{W}_2 = Z W_2$ verbunden; mithin kann der lineare homogene Differentialausdruck Z nur eine bloße dem Rationalitätsbereich Σ angehörige Funktion von x sein, sonst wäre ja $\overline{W}_2$ höherer Ordnung als W_2. Aus (9) folgt, daß sich auch $\overline{X}_2$ und X_2 nur um einen Faktor, der bloße Funktion von x allein ist, unterscheiden. $X_2 = 0$ ist also eine größte zu $U = 0$ gehörige vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung.

Aus (6) und (1) kann man schließen:

$$W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2. \tag{15}$$

Da $X_2 = 0$ eine größte vollständig reduzible lineare homogene zu

$$U \equiv W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 = 0$$

gehörige Differentialgleichung ist, haben wir in der Relation (15) eine Zerlegung eines Differentialausdruckes niedrigerer Ordnung, als die von Q ist, in größte vollständig reduzible Faktoren. Hierfür können wir unseren Satz als bewiesen annehmen. Unser Satz gilt ja sicher für eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung. Folglich sind $V_2 = 0$ und $X_2 = 0$ ähnliche lineare homogene Differentialgleichungen, und das gleiche gilt für $V_3 = 0$ und $W_3 = 0$, für $V_4 = 0$ und $W_4 = 0$, usw., schließlich ist $\lambda' = \lambda$, und $V_\lambda = 0$ und $W_\lambda = 0$ sind ähnliche Differentialgleichungen. $X_2 = 0$ und $V_2 = 0$ haben als größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, die zu derselben Differentialgleichung $U = W_{\lambda'} W_{\lambda'-1} \cdots W_3 X_2 = 0$ gehören, sogar alle Integrale gemeinsam. $X_2 = 0$ und $W_2 = 0$ waren, wie auf S. 113 gezeigt wurde, ähnliche Differentialgleichungen. Hieraus folgt, daß $V_2 = 0$ und $W_2 = 0$ ähnliche Differentialgleichungen sind. $V_1 = 0$ und $W_1 = 0$ haben als größte vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, die zu derselben Gleichung $Q = 0$ gehören, sogar alle Integrale gemeinsam. Hiermit ist unser Satz völlig bewiesen.

Die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes Q in größte vollständig reduzible Faktoren $Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_3 V_2 V_1$ kann nach Satz I und II des § 4 zu einer *völlig eindeutig bestimmten* gemacht werden, wenn man verlangt, daß als Koeffizient der höchsten Ableitung bei $V_1, V_2, \cdots, V_{\lambda-1}$ die Einheit und bei V_λ der Koeffizient der höchsten Ableitung von Q steht.

§ 6.

Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren.

Für die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes Q mit Koeffizienten aus dem im § 1 beschriebenen Rationalitätsbereiche Σ in irreduzible Faktoren gilt der

Satz I. *Auf welche Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung den Faktoren einer jeden anderen Zerlegung eineindeutig zuordnen, so daß immer die zwei durch Nullsetzen der zugeordneten Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art sind.*

Zum Beweise dieses Satzes wurden in meiner früheren Arbeit (Math. Ann. Bd. 56, S. 565) auch nur Sätze aus dem § 2 des vorliegenden Aufsatzes verwandt.

Oben wurde im § 3 auf S. 97 der vollständig reduzible lineare homogene Differentialausdruck V mit Koeffizienten aus Σ in irreduzible Faktoren zerlegt:

$$V = A_g A_{g-1} \cdots A_2 J_1.$$

Die lineare homogene Differentialgleichung $V = 0$ war hierbei als kleinstes gemeinsames Vielfaches der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ angenommen, und es ergab sich, daß $A_f = 0$ und $J_f = 0$ $(f = 2, \cdots, g)$ zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen derselben Art waren. Unter Beachtung des Satzes I folgt:

Satz II. *Ist $V = 0$ eine vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche Σ, die das kleinste gemeinsame Vielfache der in bezug auf Σ irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ mit Koeffizienten aus Σ ist, so sind bei jeder Zerlegung des Differentialausdruckes V in irreduzible Faktoren die durch Nullsetzen der g Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit den irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, \cdots, J_g = 0$ in gewisser Reihenfolge von derselben Art.*

Hat man einen linearen homogenen Differentialausdruck Q mit Koeffizienten aus Σ in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt:

$$(1) \qquad Q = V_\lambda V_{\lambda-1} \cdots V_2 V_1 \qquad \text{(vgl. S. 112)},$$

so kann man durch weitere Zerlegung jedes Differentialausdruckes V in irreduzible Faktoren:

$$V = A_g A_{g-1} \cdots J_1$$

eine Zerlegung in irreduzible Faktoren herleiten. Durch Beachtung von Satz I und II ergibt sich:

Satz III. *Auf welche Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus Σ in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so sind die durch Nullsetzen der Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen mit denjenigen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen von derselben Art, die sich ergeben, wenn man den vorgelegten Differentialausdruck in größte vollständig reduzible Faktoren zerlegt und jeden vollständig reduziblen Faktor als kleinstes gemeinsames Vielfaches irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen auffaßt.*

März 1905.

Über das identische Verschwinden der Hauptgleichungen der Variation vielfacher Integrale.

Von

LEO KOENIGSBERGER in Heidelberg.

Bedeutet H eine Funktion von t, einer von t abhängigen Variabeln p und deren Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung hin, so hat die zur Variation des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

gehörige Hauptgleichung die Form

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p''} - \cdots + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu)}} = 0,$$

und es ist bekanntlich für das identische, von der Funktionalbeziehung zwischen p und t unabhängige Verschwinden derselben die notwendige und hinreichende Bedingung die, daß sich H als ein nach t genommener vollständiger Differentialquotient einer Funktion von t, p und der Ableitungen der abhängigen Variabeln p bis zur $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung hin darstellen läßt.

Dieser für die Mechanik, in welcher t die Zeit, p einen Parameter und H das kinetische Potential ν^{ter} Ordnung bedeutet, wichtige Satz soll im folgenden auf Funktionen beliebig vieler abhängigen und unabhängigen Variabeln mit den nötigen Modifikationen erweitert, und zum Zwecke der Anwendung auf die Mechanik mehrerer unabhängiger Variabeln in einfacher Form ausgesprochen und bewiesen werden.

Um vor allem die Beweisart selbst zu kennzeichen, gehen wir von einer Funktion H *einer* unabhängigen Variabeln t, μ abhängigen $p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ und deren Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung aus, für welche die Beziehung

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = 0,$$

unter der Voraussetzung, daß die Variationen der $p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ und ihrer $\nu - 1$ ersten Ableitungen an den Grenzen verschwinden, den μ Gleichungen äquivalent ist:

$$(1)\quad \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_s'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, \mu).$$

Zunächst ist ersichtlich, daß, wenn H in der Form darstellbar ist

$$H = \frac{d\omega}{dt},$$

worin ω eine von denselben Variabeln abhängige Funktion bedeutet, welche die Ableitungen der p_s nur bis zur $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung hin enthält, die μ Hauptgleichungen (1) identisch erfüllt sein werden, da

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \delta[\omega]_{t_0}^{t_1}$$

wegen der für die Variationen an den Grenzen angenommenen Beschränkung unabhängig von den Funktionalbeziehungen zwischen den p_s und t verschwindet. Dasselbe würde sich auch unmittelbar aus den bekannten Beziehungen*)

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(\nu-1)}},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_s^{(\lambda)}}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(\lambda)}} + \frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(\lambda-1)}} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu - 1)$$

ergeben, da hiernach die Hauptgleichungen in

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial p_s'} + \frac{\partial \omega}{\partial p_s}\right] + \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \omega}{\partial p_s''} + \frac{\partial \omega}{\partial p_s'}\right] - \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(\nu-1)}} = 0$$

übergehen, und somit, wie der Anblick lehrt, identisch befriedigt werden.

Aber es ist auch ebenso leicht, die Umkehrung dieses Satzes einzusehen, wonach, wenn H die Hauptgleichungen identisch erfüllt, es sich als vollständiger Differentialquotient einer solchen Funktion ω darstellen lassen soll. Zunächst ist nämlich aus jener Annahme unmittelbar ersichtlich, daß, weil die Koeffizienten der höchsten, also der $2\nu^{\text{ten}}$ Ableitungen der p_s in den identisch zu befriedigenden Gleichungen (1) durch

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_1^{(\nu)}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_2^{(\nu)}}, \cdots, \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(\nu)}\partial p_\mu^{(\nu)}}$$

dargestellt werden, und diese somit verschwinden müssen, H eine in den ν^{ten} Ableitungen lineare Funktion von der Form

*) Vergl. meine „Principien der Mechanik" S. 5.

$$H = H_1(t, p_1, \cdots, p_\mu, \cdots, p_1^{(\nu-1)}, \cdots, p_\mu^{(\nu-1)}) p_1^{(\nu)} \tag{2}$$
$$+ \cdots + H_\mu(t, p_1, \cdots, p_\mu, \cdots, p_1^{(\nu-1)}, \cdots, p_\mu^{(\nu-1)}) p_\mu^{(\nu)}$$
$$+ \overline{H}\,(t, p_1, \cdots, p_\mu, \cdots, p_1^{(\nu-1)}, \cdots, p_\mu^{(\nu-1)})$$

sein wird; nun folgt aber sogleich, daß die Gleichungen (1), welche alsdann nur von der $2\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung sind, in den $2\nu - 1^{\text{ten}}$ Ableitungen linear sein werden, und der Koeffizient von $p_\varrho^{(2\nu-1)}$ wegen des identischen Verschwindens der Hauptgleichungen die Beziehung liefern wird

$$\frac{\partial H_\varrho}{\partial p_s^{(\nu-1)}} = \frac{\partial H_s}{\partial p_\varrho^{(\nu-1)}} \qquad (\varrho, s = 1, 2, \cdots, \mu). \tag{3}$$

Bildet man nun, was nach den eben gefundenen Bedingungen möglich ist, eine Funktion ω_1 von $t, p_1, \cdots, p_\mu, \cdots, p_1^{(\nu-1)}, \cdots, p_\mu^{(\nu-1)}$, welche den Gleichungen genügt

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_1^{(\nu-1)}} = H_1, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2^{(\nu-1)}} = H_2, \cdots, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial p_\mu^{(\nu-1)}} = H_\mu, \tag{4}$$

so wird, weil H den Hauptgleichungen (1) identisch genügen soll, und $\frac{d\omega_1}{dt}$, wie vorher gezeigt worden, dieselben ebenfalls identisch befriedigt, die vermöge (2) und (4) die Ableitungen nur bis zur $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung hin enthaltende Funktion

$$H - \frac{d\omega_1}{dt} = K(t, p_1, \cdots, p_\mu, \cdots, p_1^{(\nu-1)}, \cdots, p_\mu^{(\nu-1)})$$

den Hauptgleichungen (1), die nunmehr in

$$\frac{\partial K}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p_s'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial K}{\partial p_s''} - \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\frac{\partial K}{\partial p_s^{(\nu-1)}} = 0 \tag{5}$$

übergehen, wiederum identisch genügen. Wendet man auf die Gleichungen (5) und die Funktion K von der $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung dieselben Schlüsse an, so wird sich für H sukzessive die Form ergeben

$$H = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} + \cdots + \frac{d\omega_\nu}{dt} = \frac{d\Omega}{dt},$$

indem die zuletzt übrig bleibende Funktion, die nur von $t, p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ abhängt und der Hauptgleichung identisch genügen soll, die Parameter gar nicht enthalten darf, und wir finden somit

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für eine Funktion H der ν^{ten} Ordnung, von einer unabhängigen und μ abhängigen Variabeln $t, p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ die Hauptgleichungen der Variation (1) *identisch befriedigt werden, die, daß H der nach t genommene vollständige Differentialquotient einer Funktion $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung derselben unabhängigen und abhängigen Variabeln ist.*

Sei z. B. die Funktion

$$H = p_2^2 p_1'^3 + 2p_1p_2p_1'^2p_2' + 2p_1p_2^2p_1'p_1'' + p_1'p_2'^3 + p_2p_2'^2p_1''$$
$$+ 2p_2p_1'p_2'p_2'' + p_1 + tp_1'$$

gegeben, welche den beiden Hauptgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_1'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_1''} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_2'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p_2''} = 0$$

identisch genügt, so sind in den angewandten Bezeichnungen

$$H_1 = 2p_1p_2^2p_1' + p_2p_2'^2, \quad H_2 = 2p_2p_1'p_2',$$

und somit die Gleichungen (3) identisch befriedigt. Den Gleichungen (4) gemäß ergibt sich

$$\omega_1 = p_1p_2^2p_1'^2 + p_2p_1'p_2'^2,$$

und daraus

$$H - \frac{d\omega_1}{dt} = p_1 + tp_1' = K,$$

worin K den beiden Hauptgleichungen

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p_1'} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial p_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial p_2'} = 0$$

identisch genügt. Setzt man weiter

$$\omega_2 = tp_1,$$

so folgt

$$H = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d(p_1p_2^2p_1'^2 + p_2p_1'p_2'^2 + tp_1)}{dt}.$$

Um nun einen analogen Satz für die Hauptgleichungen der Variation eines vielfachen Integrales

$$\int_{t_1^0}^{t_1^1}\int_{t_2^0}^{t_2^1}\cdots\int_{t_\varrho^0}^{t_\varrho^1} H\, dt_\varrho\, dt_{\varrho-1}\cdots dt_1$$

aufzustellen, in welchem H eine Funktion der ϱ unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \cdots, t_\varrho$, der μ abhängigen Variabeln $p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ und deren partieller Differentialquotienten bis zur ν^{ten} Ordnung hin sein soll, Gleichungen, die sich bekanntlich, wenn

$$\frac{\partial^k p_s}{\partial t_{i_1}\partial t_{i_2}\cdots\partial t_{i_k}} = p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_k)}$$

gesetzt wird, in der Form darstellen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_{i_1}\frac{d}{dt_{i_1}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(i_1)}} + \sum_{i_1 i_2}\frac{d^2}{dt_{i_1}dt_{i_2}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(i_1 i_2)}} - \cdots \tag{6}$$
$$+ (-1)^\nu \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}\frac{d^\nu}{dt_{i_1}dt_{i_2}\cdots dt_{i_\nu}}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}} = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, \mu),$$

worin die nach den $i_1, i_2, \cdots$ genommenen Summen auf alle Zusammenstellungen der i aus den Zahlen $1, 2, \cdots, \varrho$ auszudehnen sind, in welchen $i_1 \leqq i_2 \leqq i_3 \cdots$, — werde zunächst bemerkt, daß, wie aus der Variation des vielfachen Integrales unter der der früheren analogen Festsetzung für die Variationen in dem Grenzgebiete hervorgeht*), der Ausdruck

$$\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho},$$

in welchem $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ beliebige Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung der μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln darstellen, den Hauptgleichungen (6) identisch genügt, und daß somit die Möglichkeit der Darstellung der Funktion H in dieser Summenform von Differentialquotienten hinreichend für die identische Erfüllung der Hauptgleichungen ist.

Um aber die wichtigere Frage nach den notwendigen Bedingungen zu beantworten, mögen zunächst Funktionen H der *ersten* Ordnung von *einer* abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln untersucht werden, für welche sich, wenn sie der für $s = 1$, $\nu = 1$ aus (6) entspringenden Hauptgleichung

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(2)}} - \cdots - \frac{d}{dt_\varrho}\frac{\partial H}{\partial p^{(\varrho)}} = 0$$

identisch genügen sollen, genau wie oben die Form ergibt:

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} H = {} & H_1(t_1, \cdots, t_\varrho, p)p^{(1)} + H_2(t_1, \cdots, t_\varrho, p)p^{(2)} + \cdots \\ & + H_\varrho(t_1, \cdots, t_\varrho, p)p^{(\varrho)} + \overline{H}(t_1, \cdots, t_\varrho, p). \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\text{(9)} \qquad \omega_\varrho(t_1, \cdots, t_\varrho, p) = \int H_\varrho dp,$$

so wird die Funktion erster Ordnung $\frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho}$, wie oben gezeigt, ebenfalls die Hauptgleichung (7) identisch befriedigen, und somit auch nach (8) und (9) die Funktion

$$K = H - \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho} = H_1 p^{(1)} + H_2 p^{(2)} + \cdots + H_{\varrho-1}p^{(\varrho-1)} + \overline{K}.$$

*) Benutzt man die, den in meinen „Principien der Mechanik" S. 5 aufgestellten Beziehungen analogen, Relationen für mehrere unabhängige Variable

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\frac{d\omega}{dt_\lambda}\right) = \frac{d}{dt_\lambda}\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_s}\right), \quad \frac{\partial}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_{\nu-1}\lambda)}}\left(\frac{d\omega}{dt_\lambda}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_{\nu-1})}},$$

$$\frac{\partial}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_\varkappa)}}\left(\frac{d\omega}{dt_\lambda}\right) = \frac{d}{dt_\lambda}\left(\frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_\varkappa)}}\right) + (i_s, \lambda)\frac{\partial \omega}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_\varkappa)}},$$

worin $(i_s, \lambda) = 0$ ist, wenn λ von i_s verschieden, und den Wert 1 hat, wenn $\lambda = i_s$ ist, so erkennt man auch durch unmittelbare Substitution, daß die Hauptgleichungen (6) identisch befriedigt werden.

Setzt man ähnlich

$$\omega_{\varrho-1}(t_1, \cdots, t_\varrho, p) = \int H_{\varrho-1} dp,$$

bildet

$$K - \frac{d\omega_{\varrho-1}}{dt_{\varrho-1}},$$

usw., so gelangt man zu einer von $p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(\varrho)}$ unabhängigen, also nur von $t_1, t_2, \cdots, t_\varrho, p$ abhängigen Funktion, welche der Gleichung (7) identisch genügen, also von p frei sein muß, und sich daher als Differentialquotient nach irgend einer der unabhängigen Variabeln darstellen läßt, und es ergibt sich somit

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H der ersten Ordnung von einer abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln der Hauptgleichung (7) *identisch genügt, die, daß jene Funktion in der Form darstellbar ist*

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho},$$

worin $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ nur von $t_1, t_2, \cdots, t_\varrho$ und p abhängen.

Um also zu prüfen, ob eine solche Funktion H in der angegebenen Weise als Summe von totalen, nach den unabhängigen Variabeln genommenen Differentialquotienten darstellbar ist, hat man nur nachzusehen, ob H der Hauptgleichung (7) identisch Genüge leistet.

So wird z. B.

$$H = t_2 p^2 + (2t_1 t_2 p - 2t_2 p^2) p^{(1)} + t_1^2 p^{(2)}$$

in der Form darstellbar sein

$$\frac{d}{dt_1}\left(t_1 t_2 p^2 - \frac{2}{3} t_2 p^3\right) + \frac{d}{dt_2}(t_1^2 p).$$

Wesentlich anders gestaltet sich das Resultat der Untersuchung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die identische Erfüllung der Hauptgleichungen der Variation, wenn die Funktion H von einer höheren Ordnung als der ersten ist oder, wenn von der ersten, mehr als eine abhängige Variable enthält.

Zunächst ist unmittelbar einzusehen, *daß, wenn eine Funktion H der ν^{ten} Ordnung von μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln in der Form darstellbar ist:*

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho},$$

worin $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ ebenfalls Funktionen ν^{ter} Ordnung eben dieser Variabeln sind, H den zugehörigen Hauptgleichungen $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung identisch ge-

nügen wird, da $\frac{d\omega_1}{dt_1}, \frac{d\omega_2}{dt_2}, \cdots, \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho}$ nach dem Früheren als Funktionen $\nu+1^{\text{ter}}$ Ordnung die entsprechenden Hauptgleichungen $2\nu+2^{\text{ter}}$ Ordnung identisch befriedigen, und aus diesen Hauptgleichungen, da die Summe der nach $t_1, t_2, \cdots, t_\varrho$ genommenen Differentialquotienten von $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ nur eine Funktion ν^{ter} Ordnung sein sollte, die den partiellen Differentialquotienten $\nu+1^{\text{ter}}$ Ordnung zugehörigen Glieder herausfallen.*)

---

*) Man kann dies aber auch, ähnlich wie oben, unmittelbar an den Hauptgleichungen (6) verifizieren. Denn da H eine Funktion ν^{ter} Ordnung sein soll, so muß

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial p_s^{\left(i_1^{(1)} i_2^{(1)} \cdots i_\nu^{(1)}\right)}} + \frac{\partial\omega_2}{\partial p_s^{\left(i_1^{(2)} i_2^{(2)} \cdots i_\nu^{(2)}\right)}} + \cdots + \frac{\partial\omega_\varrho}{\partial p_s^{\left(i_1^{(\varrho)} i_2^{(\varrho)} \cdots i_\nu^{(\varrho)}\right)}} = 0$$

sein, wenn die Zusammenstellung der Indizes

$$\left(i_1^{(1)} i_2^{(1)} \cdots i_\nu^{(1)}\, 1\right) = \left(i_1^{(2)} i_2^{(2)} \cdots i_\nu^{(2)}\, 2\right) = \cdots = \left(i_1^{(\varrho)} i_2^{(\varrho)} \cdots i_\nu^{(\varrho)}\, \varrho\right)$$

ist, und da nach dem Früheren

$$\frac{d\omega_\lambda}{dt_\lambda} = \Omega_\lambda$$

den zugehörigen Hauptgleichungen

$$\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial p_s} - \sum_{i_1} \frac{d}{dt_{i_1}} \frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial p_s^{(i_1)}} + \sum_{i_1 i_2} \frac{d^2}{dt_{i_1} dt_{i_2}} \frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial p_s^{(i_1 i_2)}} - \cdots$$

$$+(-1)^{\nu+1} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \frac{d^{\nu+1}}{dt_{i_1} dt_{i_2} \cdots dt_{i_\nu} dt_\lambda} \frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu \lambda)}} = 0$$

identisch genügt und

$$\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu \lambda)}} = \frac{\partial\omega_\lambda}{\partial p_s^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}$$

ist, so werden die Hauptgleichungen für

$$H = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots + \Omega_\varrho$$

in die Gleichungen (6) übergehen.

So werden z. B. für zwei Funktionen zweiter Ordnung einer abhängigen und zweier unabhängigen Variabeln

$$\omega_1 = pp^{(2)^2} p^{(12)} + pp^{(1)} p^{(2)} p^{(22)}, \quad \omega_2 = -pp^{(2)^2} p^{(11)} - pp^{(1)} p^{(2)} p^{(12)}$$

vermöge der Zusammenstellungen der Indizes (111), (121) = (112), (221) = (212) die Beziehungen erfüllt sein

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial p^{(11)}} = 0, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial p^{(12)}} + \frac{\partial\omega_2}{\partial p^{(11)}} = 0, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial p^{(22)}} + \frac{\partial\omega_2}{\partial p^{(21)}} = 0,$$

und in der Tat

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} = -p^{(2)^3} p^{(11)} + p^{(1)^2} p^{(2)} p^{(22)} - pp^{(2)}\left(p^{(11)} p^{(22)} - p^{(12)^2}\right)$$

nur von der zweiten Ordnung sein. Den obigen Beziehungen zwischen Ω_λ und ω_λ entsprechend ist

Um aber die Existenz der Umkehrung dieses Satzes zu untersuchen und die Form derselben zu finden, müssen wir die Funktionen H nach ihrer Ordnung und der Zahl ihrer abhängigen und unabhängigen Variabeln unterscheiden.

Sei zunächst H von der ν^{ten} Ordnung, enthalte aber nur eine abhängige und zwei unabhängige Variable p, t_1, t_2, so soll im folgenden, der kürzeren Schreibweise wegen,

$$\frac{\partial^{\varkappa+\lambda} p}{\partial t_1^{\varkappa} \partial t_2^{\lambda}} = p^{(\varkappa,\lambda)}$$

gesetzt werden, so daß die Hauptgleichung der Variation die Form annimmt

$$(9) \quad \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p^{(1,0)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(0,1)}} + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(2,0)}} + \frac{d^2}{dt_1 dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(1,1)}} + \frac{d^2}{dt_2^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(0,2)}}$$

$$- \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt_1^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu-1,0)}} + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt_1^{\nu-2}dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu-2,1)}}$$

$$+ \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt_2^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(0,\nu-1)}} + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt_1^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu,0)}} + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt_1^{\nu-1}dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(\nu-1,1)}}$$

$$+ \cdots + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt_1 dt_2^{\nu-1}}\frac{\partial H}{\partial p^{(1,\nu-1)}} + (-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt_2^{\nu}}\frac{\partial H}{\partial p^{(0,\nu)}} = 0.$$

Soll nun dieser Gleichung durch H identisch genügt werden, so werden die Koeffizienten der $2\nu^{ten}$ partiellen Ableitungen von p nach t_1 und t_2 genommen, welche lediglich aus den letzten $\nu + 1$ Gliedern dieser

---

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(111)}} = \frac{\partial \omega_1}{\partial p^{(11)}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(121)}} = \frac{\partial \omega_1}{\partial p^{(12)}} = p p^{(2)^2}, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(221)}} = \frac{\partial \omega_1}{\partial p^{(22)}} = p p^{(1)} p^{(2)},$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(112)}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial p^{(11)}} = - p p^{(2)^2}, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(122)}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial p^{(12)}} = - p p^{(1)} p^{(2)}, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(222)}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial p^{(22)}} = 0,$$

woraus

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(111)}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(121)}} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(112)}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(221)}} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(212)}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(222)}} = 0,$$

und hiernach

$$\sum_{i_1 i_2} \left\{ \frac{d^3}{dt_{i_1} dt_{i_2} dt_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial p^{(i_1 i_2 1)}} + \frac{d^3}{dt_{i_1} dt_{i_2} dt_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial p^{(i_1 i_2 2)}} \right\} = 0$$

folgt, und es wird somit

$$H = \Omega_1 + \Omega_2$$

der Hauptgleichung 4^{ter} Ordnung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(2)}} + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(11)}} + \frac{d^2}{dt_1 dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(12)}} + \frac{d^2}{dt_2^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(22)}} = 0$$

identisch Genüge leisten.

Gleichung hervorgehen, verschwinden müssen, und daher, wie unmittelbar zu sehen, der Koeffizient von $p^{(\varkappa,\lambda)}$, worin $\varkappa + \lambda = 2\nu$ ist,

$$
(10)\quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(\nu,0)}\partial p^{(\varkappa-\nu,\lambda)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(\nu-1,1)}\partial p^{(\varkappa+1-\nu,\lambda-1)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(\nu-2,2)}\partial p^{(\varkappa+2-\nu,\lambda-2)}} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(0,\nu)}\partial p^{(\varkappa,\lambda-\nu)}} = 0
$$

sein, wenn die nach p mit negativen Indizes genommenen Differentialquotienten gleich Null gesetzt werden.

Für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ folgt unmittelbar aus der Gleichung (10), daß sämtliche dritten Differentialquotienten von H, nach den 2^{ten} resp. 3^{ten} partiellen Differentialquotienten von p genommen, identisch verschwinden, und H somit nach (10) die Form annimmt

$$
H = H_1 p^{(2,0)} + H_2 p^{(1,1)} + H_3 p^{(0,2)} + H_4 (p^{(2,0)} p^{(0,2)} - p^{(1,1)^2}) + \overline{H}
$$

und

$$
\begin{aligned}
H = H_1 p^{(3,0)} &+ H_2 p^{(2,1)} + H_3 p^{(1,2)} + H_4 p^{(0,3)} + H_5 (p^{(3,0)} p^{(1,2)} - p^{(2,1)^2}) \\
&+ H_6 (p^{(3,0)} p^{(0,3)} - p^{(2,1)} p^{(1,2)}) + H_7 (p^{(2,1)} p^{(0,3)} - p^{(1,2)^2}) + \overline{H},
\end{aligned}
$$

worin $H_1, H_2, \cdots, \overline{H}$ Funktionen von

$$
t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)} \quad \text{resp.} \quad t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, p^{(2,0)}, p^{(1,1)}, p^{(0,2)}
$$

sind.

Für $\nu = 4$ folgt jedoch aus der Gleichung (10) nur das identische Verschwinden aller dritten Ableitungen von H, nach den 4^{ten} partiellen Differentialquotienten von p genommen, mit Ausnahme der folgenden, für welche sich nur die Beziehungen ergeben

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 H}{\partial p^{(4,0)}\partial p^{(1,3)}\partial p^{(1,3)}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial p^{(3,1)}\partial p^{(3,1)}\partial p^{(0,4)}} = - \frac{\partial^3 H}{\partial p^{(3,1)}\partial p^{(2,2)}\partial p^{(1,3)}} \\
&= \frac{1}{3} \frac{\partial^3 H}{\partial p^{(2,2)}\partial p^{(2,2)}\partial p^{(2,2)}} = -2 \frac{\partial^3 H}{\partial p^{(4,0)}\partial p^{(2,2)}\partial p^{(0,4)}},
\end{aligned}
$$

und erst der Umstand, daß auch sämtliche Glieder der Gleichung (9), welche die 6^{ten} partiellen Differentialquotienten von p quadratisch enthalten, verschwinden müssen, liefert auch für alle dritten Differentialquotienten von H identisch verschwindende Werte, so daß diese Funktion vermöge (10) für $\nu = 4$ die Form annimmt:

$$
\begin{aligned}
H = H_1 p^{(4,0)} &+ H_2 p^{(3,1)} + H_3 p^{(2,2)} + H_4 p^{(1,3)} + H_5 p^{(0,4)} + H_6 (p^{(4,0)} p^{(2,2)} - p^{(3,1)^2}) \\
&+ H_7 (p^{(4,0)} p^{(1,3)} - p^{(3,1)} p^{(2,2)}) + H_8 (p^{(3,1)} p^{(0,4)} - p^{(2,2)} p^{(1,3)}) \\
+ H_9 (p^{(2,2)} p^{(0,4)} - p^{(1,3)^2}) &+ H_{10} (p^{(4,0)} p^{(0,4)} - p^{(2,2)^2}) + H_{11} (p^{(3,1)} p^{(1,3)} - p^{(2,2)^2}) + \overline{H},
\end{aligned}
$$

worin $H_1, H_2, \cdots, \overline{H}$ Funktionen von

$$
t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, p^{(2,0)}, p^{(1,1)}, p^{(0,2)}, p^{(3,0)}, p^{(2,1)}, p^{(1,2)}, p^{(0,3)}
$$

bedeuten.

So erhalten wir allgemein für Funktionen H der ν^{ten} Ordnung von einer abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln als notwendige Form dafür, daß dieselben der Hauptgleichung von der $2\nu^{ten}$ Ordnung identisch genügen

$$(11)\quad \begin{aligned} H = {} & H_0 p^{(\nu,0)} + H_1 p^{(\nu-1,1)} + H_2 p^{(\nu-2,2)} + \cdots + H_\nu p^{(0,\nu)} \\ & + H_{02}(p^{(\nu-1,1)^2} - p^{(\nu,0)}p^{(\nu-2,2)}) + H_{03}(p^{(\nu-1,1)}p^{(\nu-2,2)} - p^{(\nu,0)}p^{(\nu-3,3)}) + \cdots \\ & + H_{0\nu}(p^{(\nu-1,1)}p^{(1,\nu-1)} - p^{(\nu,0)}p^{(0,\nu)}) + H_{13}(p^{(\nu-2,2)^2} - p^{(\nu-1,1)}p^{(\nu-3,3)}) \\ & + \cdots + H_{1\nu}(p^{(\nu-2,2)}p^{(1,\nu-1)} - p^{(\nu-1,1)}p^{(0,\nu)}) \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + H_{\nu-2\,\nu}(p^{(1,\nu-1)^2} - p^{(2,\nu-2)}p^{(0,\nu)}) + \overline{\overline{H}}, \end{aligned}$$

worin die Funktionen H_0, H_1, $\cdots$, H_{02}, $\cdots$ $\overline{\overline{H}}$ nur von t_1, t_2, p und den partiellen Ableitungen von p bis zur $\nu - 1^{ten}$ Ordnung hin abhängen.

Um nun auf den Beweis des Satzes von der Ausdrückbarkeit einer solchen Funktion H als Summe von nach t_1 und t_2 genommenen totalen Differentialquotienten zweier Funktionen ω_1 und ω_2 der ν^{ten} Ordnung überzugehen, werde zunächst bemerkt, daß, wenn

$$\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2}$$

wieder nur eine Funktion ν^{ter} Ordnung darstellt, einerseits diese Summe aus früher angegebenen Gründen die Hauptgleichung $2\nu^{ter}$ Ordnung identisch befriedigt, andererseits, weil die Differentialquotienten $\nu + 1^{ter}$ Ordnung aus jener Summe herausfallen müssen, den Beziehungen

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(\nu,0)}} = 0, \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(\nu-1,1)}} + \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(\nu,0)}} = 0, \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(\nu-2,2)}} + \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(\nu-1,1)}} = 0, \cdots \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(1,\nu-1)}} + \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(2,\nu-2)}} = 0, \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(0,\nu)}} + \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(1,\nu-1)}} = 0, \quad \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(0,\nu)}} = 0 \end{cases}$$

identisch genügt werden muß.

Aus (12) folgt nun zunächst, daß

$$\omega_1 = M_1 p^{(0,\nu)} + N_1, \qquad \omega_2 = M_2 p^{(\nu,0)} + N_2$$

ist, worin die nur von $p^{(\nu-1,1)}$, $p^{(\nu-2,2)}$, $\cdots$, $p^{(1,\nu-1)}$ und niedrigeren Ableitungen abhängigen Funktionen M_1, N_1, M_2, N_2 die Beziehungen

$$\frac{\partial M_1}{\partial p^{(\nu-\varrho,\varrho)}} p^{(0,\nu)} + \frac{\partial N_1}{\partial p^{(\nu-\varrho,\varrho)}} + \frac{\partial M_2}{\partial p^{(\nu-\varrho+1,\varrho-1)}} p^{(\nu,0)} + \frac{\partial N_2}{\partial p^{(\nu-\varrho+1,\varrho-1)}} = 0$$
$$(\varrho = 1, 2, \cdots, \nu)$$

identisch befriedigen müssen, woraus sich

$$\frac{\partial M_1}{\partial p^{(\nu-\varrho,\varrho)}} = 0, \qquad \frac{\partial M_2}{\partial p^{(\nu-\varrho+1,\varrho-1)}} = 0$$

und daher M_1 und M_2 von den Ableitungen ν^{ter} Ordnung unabhängig ergeben, während N_1 und N_2 den Gleichungen

$$\frac{\partial N_1}{\partial p^{(\nu-\varrho,\,\varrho)}} + \frac{\partial N_2}{\partial p^{(\nu-\varrho+1,\,\varrho-1)}} = 0$$

unterliegen, welche den Gleichungen (12) analog sind, und es folgt daher aus (12) unmittelbar:

daß, wenn die Funktion

$$\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

worin ω_1 und ω_2 Funktionen ν^{ter} Ordnung in den nach t_1 und t_2 genommenen partiellen Differentialquotienten von p sind, wiederum eine Funktion ν^{ter} Ordnung sein soll, also der Hauptgleichung $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung identisch genügt, ω_1 und ω_2 die Form haben werden

$$(13)\quad \begin{cases} \omega_1 = f_1 p^{(\nu-1,\,1)} + f_2 p^{(\nu-2,\,2)} + \cdots + f_{\nu-1} p^{(1,\,\nu-1)} + f_\nu p^{(0,\,\nu)} + F_1, \\ \omega_2 = -f_1 p^{(\nu,\,0)} - f_2 p^{(\nu-1,\,1)} - \cdots - f_{\nu-1} p^{(2,\,\nu-2)} - f_\nu p^{(1,\,\nu-1)} + F_2, \end{cases}$$

worin $f_1, f_2, \cdots, f_\nu, F_1, F_2$ nur von t_1, t_2, p und den partiellen Differentialquotienten von p bis zur $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung hin abhängen, jedoch sonst keiner weiteren Bedingung unterliegen.

Genüge nun die Funktion H ν^{ter} Ordnung von *einer* abhängigen und *zwei* unabhängigen Variabeln der Hauptgleichung (9) identisch, habe also, wie oben gezeigt worden, die Form (11), so kann man zunächst zwei Funktionen ω_1 und ω_2 von der Form

$$(14)\quad \begin{cases} \omega_1 = f_1 p^{(\nu-1,\,1)} + f_2 p^{(\nu-2,\,2)} + \cdots + f_\nu p^{(0,\,\nu)}, \\ \omega_2 = -f_1 p^{(\nu,\,0)} - f_2 p^{(\nu-1,\,1)} - \cdots - f_\nu p^{(1,\,\nu-1)} \end{cases}$$

bestimmen, deren ν von den $\nu - 1$ ersten partiellen Differentialquotienten von p abhängige Koeffizienten den ν Bedingungen unterliegen

$$(15)\quad \frac{\partial f_1}{\partial p^{(\nu-2,\,1)}} - \frac{\partial f_2}{\partial p^{(\nu-1,\,0)}} = H_{02},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p^{(\nu-3,\,2)}} - \frac{\partial f_3}{\partial p^{(\nu-1,\,0)}} = H_{03}, \cdots, \frac{\partial f_1}{\partial p^{(0,\,\nu-1)}} - \frac{\partial f_\nu}{\partial p^{(\nu-1,\,0)}} = H_{0\nu},$$

und man sieht unmittelbar aus (14) und (15), daß sich für die Funktion

$$H - \frac{d\omega_1}{dt_1} - \frac{d\omega_2}{dt_2} = K$$

der Ausdruck ergibt

$$(16)\quad \begin{aligned} K = {} & K_0 p^{(\nu,\,0)} + K_1 p^{(\nu-1,\,1)} + \cdots + K_\nu p^{(0,\,\nu)} \\ & + K_{13}\left(p^{(\nu-2,\,2)2} - p^{(\nu-1,\,1)} p^{(\nu-3,\,3)}\right) + \cdots \\ & + K_{1\nu}\left(p^{(\nu-2,\,2)} p^{(1,\,\nu-1)} - p^{(\nu-1,\,1)} p^{(0,\,\nu)}\right) + \cdots \\ & + K_{\nu-2,\nu}\left(p^{(1,\,\nu-1)2} - p^{(2,\,\nu-2)} p^{(0,\,\nu)}\right) + \overline{K}, \end{aligned}$$

in welchem $p^{(\nu,0)}$ *nur als Koeffizient von* K_0 *vorkommt,* $K_0, \cdots, K_{\nu-2,\nu}, \overline{K}$ *sämtlich Funktionen* $\nu-1^{ter}$ *Ordnung sind, und welcher nach der vorausgegangenen Bemerkung wiederum der Hauptgleichung* (9) *identisch genügen wird.*

So wird z. B. für eine der Hauptgleichung 6. Ordnung identisch genügende Funktion 3. Ordnung H die Funktion K, in welcher

$$\omega_1 = f_1 p^{(2,1)} + f_2 p^{(1,2)} + f_3 p^{(0,3)}, \qquad \omega_2 = -f_1 p^{(3,0)} - f_2 p^{(2,1)} - f_3 p^{(1,2)},$$

worin f_1, f_2, f_3 den Bedingungen unterliegen

$$\frac{\partial f_1}{\partial p^{(1,1)}} - \frac{\partial f_2}{\partial p^{(2,0)}} = H_{02}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial p^{(0,2)}} - \frac{\partial f_3}{\partial p^{(2,0)}} = H_{03},$$

die Hauptgleichung 6. Ordnung ebenfalls identisch befriedigen und die Form annehmen

$$(17)\quad K = K_0 p^{(3,0)} + K_1 p^{(2,1)} + K_2 p^{(1,2)} + K_3 p^{(0,3)} + K_{22}(p^{(2,1)} p^{(0,3)} - p^{(1,2)^2}) + \overline{K},$$

worin $K_0, K_1, K_2, K_3, K_{22}, \overline{K}$ wiederum Funktionen zweiter Ordnung sind; zugleich sieht man aber unmittelbar, daß die Substitution dieses Wertes von K in die Hauptgleichung 6. Ordnung für den Koeffizienten des Gliedes $p^{(3,1)} \cdot p^{(1,3)}$ den Ausdruck $\frac{\partial K_{22}}{\partial p^{(2,0)}}$ liefert, und daß somit, da die Hauptgleichung identisch befriedigt sein soll, K_{22} von $p^{(2,0)}$ unabhängig sein wird.

Ebenso leicht folgt allgemein aus den letzten $2\nu+1$ Gliedern der zu dem Ausdrucke (16) gehörigen Hauptgleichung (9), infolge des identischen Verschwindens des Koeffizienten der in den partiellen Differentialquotienten $2\nu-2^{ter}$ Ordnung von p quadratischen Glieder, daß

$$\frac{\partial K_{13}}{\partial p^{(\nu-1,0)}} = \frac{\partial K_{14}}{\partial p^{(\nu-1,0)}} = \cdots = \frac{\partial K_{1\nu}}{\partial p^{(\nu-1,0)}} = \cdots = \frac{\partial K_{\nu-2,\nu}}{\partial p^{(\nu-1,0)}} = 0,$$

diese Größen selbst also von $p^{(\nu-1,0)}$ unabhängig sind.

Setzt man nunmehr

$$\begin{aligned}\omega_1' &= \varphi_2 p^{(\nu-2,2)} + \varphi_3 p^{(\nu-3,3)} + \cdots + \varphi_\nu p^{(0,\nu)},\\ \omega_2' &= -\varphi_2 p^{(\nu-1,1)} - \varphi_3 p^{(\nu-2,2)} - \cdots - \varphi_\nu p^{(1,\nu-1)},\end{aligned}$$

worin die von den $\nu-1$ ersten partiellen Differentialquotienten von p abhängigen, aber $p^{(\nu-1,0)}$ nicht enthaltenden Funktionen $\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_\nu$ den identischen Gleichungen genügen sollen

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial p^{(\nu-3,2)}} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial p^{(\nu-2,1)}} = K_{13}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial p^{(0,\nu-1)}} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p^{(\nu-2,1)}} = K_{1\nu},$$

was möglich ist, da $K_{13}, \cdots, K_{1\nu}$ von $p^{(\nu-1,0)}$ unabhängig waren, so wird der Ausdruck ν^{ter} Ordnung

$$L = K - \frac{d\omega_1'}{dt_1} - \frac{d\omega_2'}{dt_2}$$

die Form annehmen

$$\begin{aligned} L = L_0 p^{(\nu,0)} &+ L_1 p^{(\nu-1,1)} + \cdots + L_\nu p^{(0,\nu)} \\ &+ L_{24}(p^{(\nu-3,3)^2} - p^{(\nu-2,2)} p^{(\nu-4,4)}) + \cdots \\ &+ L_{2\nu}(p^{(\nu-3,3)} p^{(\nu-1,1)} - p^{(\nu-2,2)} p^{(0,\nu)}) + \cdots \\ &+ L_{\nu-2,\nu}(p^{(1,\nu-1)^2} - p^{(2,\nu-2)} p^{(0,\nu)}) + \bar{L} \end{aligned}$$

und wiederum der Hauptgleichung (9) identisch Genüge leisten. Da aber jetzt wieder $L_{24}, \cdots, L_{2\nu}, \cdots, L_{\nu-2,\nu}$ von $p^{(\nu-2,1)}$ unabhängig sein werden, so kann die Reduktion in derselben Weise durch Subtraktion von nach t_1 und t_2 genommenen totalen Differentialquotienten von Funktionen ν^{ter} Ordnung ω_1'' und ω_2'' der angegebenen Art fortgesetzt werden, und wir gelangen somit zunächst zu dem Resultat,

daß, wenn die Funktion H der ν^{ten} Ordnung der Hauptgleichung (9) *identisch genügt, zwei Funktionen ω_1 und ω_2 von der Form*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \quad f_1 p^{(\nu-1,1)} + f_2 p^{(\nu-2,2)} + \cdots + f_\nu p^{(0,\nu)}, \\ \omega_2 &= -f_1 p^{(\nu,0)} \quad - f_2 p^{(\nu-1,1)} - \cdots - f_\nu p^{(1,\nu-1)} \end{aligned}$$

bestimmbar sind, in welchen $f_1, f_2, \cdots, f_\nu$ Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung darstellen von der Art, daß

$$H - \frac{d\omega_1}{dt_1} - \frac{d\omega_2}{dt_2} = H_0 p^{(\nu,0)} + H_1 p^{(\nu-1,1)} + \cdots + H_\nu p^{(0,\nu)} + \bar{H}$$

wiederum die Hauptgleichung (9) *identisch befriedigt.*

Es bleibt somit nur noch nachzuweisen, daß, wenn ein Ausdruck von der Form

$$(18) \qquad M = M_0 p^{(\nu,0)} + M_1 p^{(\nu-1,1)} + \cdots + M_\nu p^{(0,\nu)} + \bar{M},$$

worin $M_0, M_1, \cdots, M_\nu, \bar{M}$ Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung in den Ableitungen von p bedeuten, der Hauptgleichung (9) identisch Genüge leistet, M wiederum durch totale Differentialquotienten, nach t_1 und t_2 genommen, darstellbar ist, und die Form dieser zu differentiierenden Funktionen zu untersuchen.

Setzt man

$$\begin{aligned} \omega_1 &= F_1(t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, \ldots, p^{(\nu-1,0)}, \ldots, p^{(0,\nu-1)}), \\ \omega_2 &= F_2(t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, \ldots, p^{(\nu-1,0)}, \ldots, p^{(0,\nu-1)}), \end{aligned}$$

so genügt $\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2}$ als Funktion ν^{ter} Ordnung der Hauptgleichung $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung (9) identisch, und bestimmt man die Funktionen F_1 und F_2 den Gleichungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial p^{(\nu-1,0)}} = M_0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial p^{(\nu-2,1)}} + \frac{\partial F_2}{\partial p^{(\nu-1,0)}} = M_1$$

gemäß, so wird

$$(19)\qquad N = M - \frac{d\omega_1}{dt_1} - \frac{d\omega_2}{dt_2} = N_2 p^{(\nu-2,2)} + \cdots + N_\nu p^{(0,\nu)} + \overline{N}$$

wieder die Gleichung (9) identisch befriedigen. Setzt man aber diesen Ausdruck in jene Hauptgleichung ein, so ergibt sich aus den letzten $2\nu+1$ Gliedern derselben, wie unmittelbar zu sehen, als Koeffizient des Ausdruckes $p^{(2\nu-4,2)} \cdot p^{(\nu,0)}$ die Größe

$$-\frac{\partial^2 N_2}{\partial p^{(\nu-1,0)^2}},$$

woraus, da dieselbe verschwinden muß, folgt, daß N_2, und genau ebenso die übrigen $N_3, \cdots, N_\nu$ in bezug auf $p^{(\nu-1,0)}$ vom ersten Grade sind, so daß (19) in

$$(20)\qquad N = (P_2 p^{(\nu-1,0)} + Q_2) p^{(\nu-2,2)} + (P_3 p^{(\nu-1,0)} + Q_3) p^{(\nu-3,3)} + \cdots \\ + (P_\nu p^{(\nu-1,0)} + Q_\nu) p^{(0,\nu)} + \overline{N}$$

übergeht, worin $P_2, Q_2, \cdots, P_\nu, Q_\nu$ Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche $p^{(\nu-1,0)}$ nicht enthalten.

Substituiert man aber diesen Wert in die identisch zu befriedigende Hauptgleichung (9), so erhält man, wie unmittelbar zu sehen, die zu erfüllenden Gleichungen

$$(21)\qquad \frac{\partial P_\varrho}{\partial p^{(\nu-\sigma,\sigma-1)}} = \frac{\partial P_\sigma}{\partial p^{(\nu-\varrho,\varrho-1)}} \qquad (\varrho, \sigma = 2, 3, \cdots, \nu)$$

und

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 Q_\varrho}{\partial p^{(\nu-\sigma,\sigma-1)}\,\partial p^{(\nu-2,1)}} - \frac{\partial^2 Q_\sigma}{\partial p^{(\nu-\varrho,\varrho-1)}\,\partial p^{(\nu-2,1)}} = \frac{\partial P_\varrho}{\partial p^{(\nu-\sigma-1,\sigma)}} - \frac{\partial P_\sigma}{\partial p^{(\nu-\varrho-1,\varrho)}}$$
$$(\varrho, \sigma = 2, 3, \cdots, \nu),$$

welche die nachfolgende Reduktion ermöglichen werden.

Setzt man nämlich nunmehr

$$\omega_1 = f_1(t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, \cdots, p^{(\nu-2,1)}, p^{(\nu-3,2)}, \cdots, p^{(0,\nu-1)}),$$
$$\omega_2 = f_2(t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, \cdots, p^{(\nu-2,1)}, \cdots, p^{(0,\nu-1)}) \cdot p^{(\nu-1,0)}$$
$$+ f_3(t_1, t_2, p, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}, \cdots, p^{(\nu-2,1)}, \cdots, p^{(0,\nu-1)}),$$

so wird wiederum nach Früherem der Ausdruck

$$\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

welcher von der ν^{ten} Ordnung ist, der Hauptgleichung (9) identisch genügen, und unterwirft man die Funktionen f_1, f_2, f_3 den Bedingungen

$$(23)\qquad \frac{\partial f_2}{\partial p^{(\nu-2,\,1)}} = P_2,\quad \frac{\partial f_2}{\partial p^{(\nu-3,\,2)}} = P_3,\ \cdots,\ \frac{\partial f_2}{\partial p^{(0,\,\nu-1)}} = P_\nu,$$

$$(24)\qquad f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial p^{(\nu-2,\,1)}} = 0,$$

$$(25)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial p^{(\nu-3,\,2)}} + \frac{\partial f_3}{\partial p^{(\nu-2,\,1)}} = Q_2,\ \cdots,\ \frac{\partial f_1}{\partial p^{(\nu-\varrho-1,\,\varrho)}} + \frac{\partial f_3}{\partial p^{(\nu-\varrho,\,\varrho-1)}} = Q_\varrho,$$
$$\cdots,\ \frac{\partial f_3}{\partial p^{(0,\,\nu-1)}} = Q_\nu,$$

so daß die Bedingungen (23) vermöge der Integrabilitätsbedingungen (21) f_2 bestimmen, f_1 dann durch (24) gegeben ist, und endlich f_3 aus (25) vermöge der Beziehungen (22) bestimmt werden kann, so wird

$$T = N - \frac{d\omega_1}{dt_1} - \frac{d\omega_2}{dt_2}$$

ebenfalls der Hauptgleichung (9) identisch genügen, welche aber, weil T nur von der $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung ist, in die entsprechende Hauptgleichung, die nur von der $2\nu - 2^{\text{ten}}$ Ordnung ist, übergeht. Da nun auf die Funktion T der $\nu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung dieselbe Reduktion angewandt werden kann, so ergibt sich allgemein das folgende Theorem:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H der ν^{ten} Ordnung von einer abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln der zugehörigen Hauptgleichung $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung identisch Genüge leistet, ist die, daß dieselbe in der Form

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2}$$

darstellbar ist, worin die Funktionen ω_1 und ω_2 — nicht wie in dem vorher für Funktionen erster Ordnung mit einer abhängigen und beliebig vielen unabhängigen Variabeln behandelten Falle, Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung sondern — wiederum Funktionen ν^{ter} Ordnung von der Form sind

$$\omega_1 = f_1 p^{(\nu-1,\,1)} + f_2 p^{(\nu-2,\,2)} + \cdots + f_\nu p^{(0,\,\nu)} + F_1,$$
$$\omega_2 = -f_1 p^{(\nu,\,0)} - f_2 p^{(\nu-1,\,1)} - \cdots - f_\nu p^{(1,\,\nu-1)} + F_2,$$

und $f_1, \cdots, f_\nu, F_1, F_2$ Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten. Zugleich war ersichtlich, daß, wenn H eine in den ν^{ten} partiellen Ableitungen von p lineare Funktion war, die Funktionen ω_1 uud ω_2 wiederum nur Funktionen $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung sein werden.

Wenn die Funktion H der ν^{ten} Ordnung zwar nur noch wie bisher eine abhängige, aber mehr als zwei unabhängige Variable enthält, wird zwar der Satz von der Darstellung der Funktion H als Summe von totalen Differentialquotienten erhalten bleiben, aber der Charakter der Funktionen ω sich ändern.

Untersuchen wir zunächst wieder die Form der Funktionen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$, welche eine abhängige Variable p und deren Differentialquotienten, nach den unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \cdots, t_\varrho$ genommen, bis zur ν^{ten} Ordnung enthalten und so beschaffen sein sollen, daß der Ausdruck

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho} \tag{26}$$

selbst nur von der ν^{ten} Ordnung ist; dieser wird dann nach dem Früheren wieder der Hauptgleichung $2\nu^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{\partial H}{\partial p} - \sum_{i_1} \frac{d}{dt_{i_1}} \frac{\partial H}{\partial p^{(i_1)}} + \sum_{i_1 i_2} \frac{d^2}{dt_{i_1}\, dt_{i_2}} \frac{\partial H}{\partial p^{(i_1 i_2)}} - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \frac{d^\nu}{dt_{i_1}\, dt_{i_2} \cdots dt_{i_\nu}} \frac{\partial H}{\partial p^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}} = 0$$

identisch Genüge leisten, in welcher

$$\frac{\partial^k p}{\partial t_{i_1}\, \partial t_{i_2} \cdots \partial t_{i_k}} = p^{(i_1 i_2 \cdots i_k)},$$

und die nach den $i_1, i_2, \cdots$ genommenen Summen auf alle Zusammenstellungen der i aus den Zahlen $1, 2, \cdots, \varrho$ auszudehnen sind, in welchen $i_1 \leqq i_2 \leqq i_3 \cdots$ sind, und es werden sich genau wie oben die für die Funktionen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ notwendigen und hinreichenden Bedingungen daraus ergeben, daß die partiellen Differentialquotienten $\nu + 1^{\text{ter}}$ Ordnung von p aus der Summe (26) herausfallen müssen.

Es genügt, wegen der bequemeren Darstellung in der Bezeichnung, den Fall zu betrachten, in welchem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ Funktionen zweiter Ordnung der drei Variabeln t_1, t_2, t_3 sind, und

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \frac{d\omega_3}{dt_3} \tag{27}$$

selbst nur von der zweiten Ordnung ist, somit der Hauptgleichung vierter Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &- \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(2)}} - \frac{d}{dt_3}\frac{\partial H}{\partial p^{(3)}} + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(11)}} + \frac{d^2}{dt_2^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(22)}} \\ &+ \frac{d^2}{dt_3^2}\frac{\partial H}{\partial p^{(33)}} + \frac{d^2}{dt_1\, dt_2}\frac{\partial H}{\partial p^{(12)}} + \frac{d^2}{dt_1\, dt_3}\frac{\partial H}{\partial p^{(13)}} + \frac{d^2}{dt_2\, dt_3}\frac{\partial H}{\partial p^{(23)}} = 0\end{aligned} \tag{28}$$

identisch Genüge leistet.

Da H eine Funktion zweiter Ordnung sein soll, ergeben sich aus (27) unmittelbar die identisch zu befriedigenden Beziehungen

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial p^{(11)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial p^{(12)}} + \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p^{(11)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial p^{(13)}} + \dfrac{\partial \omega_3}{\partial p^{(11)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial p^{(22)}} + \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p^{(12)}} = 0, \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial p^{(23)}} + \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p^{(13)}} + \dfrac{\partial \omega_3}{\partial p^{(12)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial p^{(33)}} + \dfrac{\partial \omega_3}{\partial p^{(13)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p^{(22)}} = 0, \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p^{(23)}} + \dfrac{\partial \omega_3}{\partial p^{(22)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial p^{(33)}} + \dfrac{\partial \omega_3}{\partial p^{(23)}} = 0,\ \dfrac{\partial \omega_3}{\partial p^{(33)}} = 0, \end{cases}$$

nach denen, wie unmittelbar zu sehen, ω_1, ω_2, ω_3 zunächst die Form annehmen

$$(30)\quad \begin{cases} \omega_1 = f_{12}(p^{(13)}, p^{(23)})p^{(22)} + f_{13}(p^{(12)}, p^{(23)})p^{(33)} + \varphi_1 p^{(22)}p^{(33)} \\ \qquad\qquad + F_1(p^{(12)}, p^{(13)}, p^{(23)}) \\ \omega_2 = f_{21}(p^{(13)}, p^{(23)})p^{(11)} + f_{23}(p^{(12)}, p^{(13)})p^{(33)} + \varphi_2 p^{(11)}p^{(33)} \\ \qquad\qquad + F_2(p^{(12)}, p^{(13)}, p^{(23)}) \\ \omega_3 = f_{31}(p^{(12)}, p^{(23)})p^{(11)} + f_{32}(p^{(12)}, p^{(13)})p^{(22)} + \varphi_3 p^{(11)}p^{(22)} \\ \qquad\qquad + F_3(p^{(12)}, p^{(13)}, p^{(23)}), \end{cases}$$

worin die Funktionen f, φ, F außer den bezeichneten Differentialquotienten zweiter Ordnung von p noch t_1, t_2, p, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ enthalten werden.

Setzt man diese Werte von ω_1, ω_2, ω_3 in die Bedingungsgleichungen (29) ein, so ergeben sich leicht für die Funktionen f, φ, F die Beziehungen

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_{12}}{\partial p^{(12)}} + \varphi_2 = 0,\quad \frac{\partial f_{12}}{\partial p^{(13)}} + \varphi_3 = 0,\quad \frac{\partial F_1}{\partial p^{(12)}} + f_{21} = 0,\quad \frac{\partial F_1}{\partial p^{(13)}} + f_{31} = 0 \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial p^{(23)}} + \varphi_3 = 0,\quad \frac{\partial f_{23}}{\partial p^{(12)}} + \varphi_1 = 0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial p^{(12)}} + f_{12} = 0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial p^{(23)}} + f_{32} = 0 \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial p^{(23)}} + \varphi_2 = 0,\quad \frac{\partial f_{32}}{\partial p^{(13)}} + \varphi_1 = 0,\quad \frac{\partial F_3}{\partial p^{(13)}} + f_{13} = 0,\quad \frac{\partial F_3}{\partial p^{(23)}} + f_{23} = 0 \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial p^{(23)}} + \frac{\partial f_{32}}{\partial p^{(12)}} = 0,\quad \frac{\partial f_{13}}{\partial p^{(23)}} + \frac{\partial f_{23}}{\partial p^{(13)}} = 0,\quad \frac{\partial f_{21}}{\partial p^{(13)}} + \frac{\partial f_{31}}{\partial p^{(12)}} = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial p^{(23)}} + \frac{\partial F_2}{\partial p^{(13)}} + \frac{\partial F_3}{\partial p^{(12)}} = 0, \end{gathered}$$

und daraus für die drei Funktionen ω_1, ω_2, ω_3 die Formen:

$$(31)\quad \begin{cases} \omega_1 = f_1 p^{(12)} + f_2 p^{(13)} + f_3 p^{(22)} + f_4 p^{(23)} + f_5 p^{(33)} + g_1(p^{(23)^2} - p^{(22)}p^{(33)}) \\ \qquad + g_2(p^{(12)}p^{(33)} - p^{(13)}p^{(23)}) + g_3(p^{(13)}p^{(22)} - p^{(12)}p^{(23)}) + G_1 \\ \omega_2 = -f_1 p^{(11)} + f_7 p^{(23)} - f_3 p^{(12)} + f_6 p^{(13)} + f_8 p^{(33)} + g_1(p^{(12)}p^{(33)} - p^{(13)}p^{(23)}) \\ \qquad + g_2(p^{(13)^2} - p^{(11)}p^{(33)}) + g_3(p^{(11)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(13)}) + G_2 \\ \omega_3 = -f_2 p^{(11)} - f_7 p^{(22)} - f_5 p^{(13)} - (f_4 + f_6)p^{(12)} - f_8 p^{(23)} \\ \qquad + g_1(p^{(13)}p^{(22)} - p^{(12)}p^{(23)}) + g_2(p^{(11)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(13)}) \\ \qquad + g_3(p^{(12)^2} - p^{(11)}p^{(22)}) + G_3, \end{cases}$$

worin $f_1, \cdots, f_8, g_1, g_2, g_3, G_1, G_2, G_3$ beliebige Funktionen von $t_1, t_2, t_3, p, p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ sind. Bemerkt man aber, daß sowohl für

$$(32)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \quad f_1 p^{(12)} + f_2 p^{(13)} + f_3 p^{(22)} + f_4 p^{(23)} + f_5 p^{(33)}, \\ \omega_{12} = -f_1 p^{(11)} + f_7 p^{(23)} - f_3 p^{(12)} + f_6 p^{(13)} + f_8 p^{(33)}, \\ \omega_{13} = -f_2 p^{(11)} - f_7 p^{(22)} - f_5 p^{(13)} - (f_7 + f_6) p^{(12)} - f_8 p^{(23)}, \end{cases}$$

als auch für die mit beliebigen Multiplikatoren erster Ordnung versehenen Unterdeterminanten zweiter Ordnung von

$$\begin{vmatrix} p^{(11)} & p^{(12)} & p^{(13)} \\ p^{(21)} & p^{(22)} & p^{(23)} \\ p^{(31)} & p^{(32)} & p^{(33)} \end{vmatrix},$$

nämlich

$$(33)\quad \begin{cases} \omega_{21} = g_1 (p^{(23)^2} - p^{(22)} p^{(33)}), \quad \omega_{22} = g_1 (p^{(21)} p^{(33)} - p^{(13)} p^{(23)}), \\ \qquad\qquad \omega_{23} = g_1 (p^{(13)} p^{(22)} - p^{(12)} p^{(23)}), \\ \omega_{31} = g_2 (p^{(12)} p^{(33)} - p^{(13)} p^{(23)}), \quad \omega_{32} = g_2 (p^{(13)^2} - p^{(11)} p^{(33)}), \\ \qquad\qquad \omega_{33} = g_2 (p^{(11)} p^{(23)} - p^{(12)} p^{(13)}), \\ \omega_{41} = g_3 (p^{(13)} p^{(22)} - p^{(12)} p^{(23)}), \quad \omega_{42} = g_3 (p^{(11)} p^{(23)} - p^{(12)} p^{(13)}), \\ \qquad\qquad \omega_{43} = g_3 (p^{(12)^2} - p^{(11)} p^{(22)}) \end{cases}$$

die Funktionen

$$\frac{d\omega_{\varrho 1}}{dt_1} + \frac{d\omega_{\varrho 2}}{dt_2} + \frac{d\omega_{\varrho 3}}{dt_3} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 4),$$

wie unmittelbar aus ihrer Form zu erkennen, wiederum nur Funktionen zweiter Ordnung sind und somit bekanntlich der Hauptgleichung (28) identisch genügen, so folgt:

daß, wenn für drei Funktionen zweiter Ordnung $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ einer abhängigen und dreier unabhängigen Variabeln der Ausdruck

$$\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \frac{d\omega_3}{dt_3}$$

wiederum von der zweiten Ordnung ist und somit der Hauptgleichung (28) *identisch Genüge leistet,*

$$\omega_1 = \omega_{11} + \omega_{21} + \omega_{31} + \omega_{41} + G_1$$
$$\omega_2 = \omega_{12} + \omega_{22} + \omega_{32} + \omega_{42} + G_2$$
$$\omega_3 = \omega_{13} + \omega_{23} + \omega_{33} + \omega_{43} + G_3$$

ist, worin die $\omega_{\varrho 1}, \omega_{\varrho 2}, \omega_{\varrho 3}$ durch die Ausdrücke (32) *und* (33) *definiert sind, $f_\alpha, g_\beta, G_\gamma$ willkürliche Funktionen erster Ordnung sind, und die Funktionen*

$$\frac{d\omega_{\varrho 1}}{dt_1} + \frac{d\omega_{\varrho 2}}{dt_2} + \frac{d\omega_{\varrho 3}}{dt_3}$$

selbst wieder als Funktionen zweiter Ordnung die Hauptgleichung (28) *identisch befriedigen.*

Untersuchen wir nun, um die Frage nach der Umkehrung des Satzes zu beantworten, die Form einer jeden Funktion zweiter Ordnung H, welche der Hauptgleichung (28) identisch genügt, so liefert das identische Verschwinden der Koeffizienten der vierten partiellen Ableitungen von p die Bedingungsgleichungen

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(11)^2}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(12)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(12)}\,\partial p^{(22)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(13)}} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(13)}\,\partial p^{(33)}} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(22)^2}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(22)}\,\partial p^{(23)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(23)}\,\partial p^{(33)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(33)^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(13)}\,\partial p^{(22)}} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(12)}\,\partial p^{(23)}} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(23)}} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(12)}\,\partial p^{(13)}} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(12)}\,\partial p^{(33)}} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(13)}\,\partial p^{(23)}} = 0, \\ 2\,\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(22)}\,\partial p^{(33)}} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(23)^2}} = 0, \quad 2\,\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(22)}} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(12)^2}} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2\,\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(11)}\,\partial p^{(33)}} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^{(13)^2}} = 0, \end{cases}$$

woraus sich zunächst H in der Gestalt ergibt

$$(35)\quad \begin{aligned} H = {} & H_1 p^{(11)} + H_2 p^{(12)} + H_3 p^{(13)} + H_4 p^{(22)} + H_5 p^{(23)} + H_6 p^{(33)} \\ & + K_1 (p^{(11)} p^{(22)} - p^{(12)^2}) + K_2 (p^{(11)} p^{(23)} - p^{(12)} p^{(13)}) + K_3 (p^{(11)} p^{(33)} - p^{(13)^2}) \\ & + K_4 (p^{(12)} p^{(23)} - p^{(13)} p^{(22)}) + K_5 (p^{(13)} p^{(23)} - p^{(12)} p^{(33)}) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + K_6 (p^{(22)} p^{(33)} - p^{(23)^2}) + K, \end{aligned}$$

worin $H_1, H_2, \cdots, K_1, K_2, \cdots$ Funktionen erster Ordnung bedeuten, während K noch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von p in einer höheren Dimension als der zweiten enthalten kann.

Aus den Gleichungen (34) folgt aber unmittelbar, daß die sämtlichen partiellen Ableitungen vierter Ordnung von H nach den partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung der p verschwinden, während die Ableitungen der dritten Ordnung von H, nach eben diesen Differentialquotienten genommen, ebenfalls verschwinden mit Ausnahme der folgenden, für welche sich die Beziehungen ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 H}{\partial p^{(12)}\partial p^{(13)}\partial p^{(23)}} &= -\frac{\partial^3 H}{\partial p^{(12)}\partial p^{(12)}\partial p^{(33)}} = -\frac{\partial^3 H}{\partial p^{(11)}\partial p^{(23)}\partial p^{(23)}} \\ &= -\frac{\partial^3 H}{\partial p^{(13)}\partial p^{(13)}\partial p^{(22)}} = 2\frac{\partial^3 H}{\partial p^{(11)}\partial p^{(22)}\partial p^{(33)}}, \end{aligned}$$

so daß

$$K = K_7(p^{(11)}p^{(22)}p^{(33)} - p^{(11)}p^{(23)^2} - p^{(33)}p^{(12)^2} - p^{(22)}p^{(13)^2} + 2p^{(12)}p^{(13)}p^{(23)}) + \overline{H}$$
$$= K_7\{p^{(11)}(p^{(22)}p^{(33)} - p^{(23)^2}) + p^{(12)}(p^{(13)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(33)})$$
$$+ p^{(13)}(p^{(12)}p^{(23)} - p^{(13)}p^{(22)})\} + \overline{H}$$

wird, worin K_7 und $\overline{H}$ Funktionen erster Ordnung sind, und somit (35) in

$$(36)\quad H = H_1p^{(11)} + H_2p^{(12)} + H_3p^{(13)} + H_4p^{(22)} + H_5p^{(23)} + H_6p^{(33)}$$
$$+ K_1(p^{(11)}p^{(22)} - p^{(12)^2}) + K_2(p^{(11)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(13)}) + K_3(p^{(11)}p^{(33)} - p^{(13)^2})$$
$$+ K_4(p^{(12)}p^{(23)} - p^{(13)}p^{(22)}) + K_5(p^{(13)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(33)})$$
$$+ K_6(p^{(22)}p^{(33)} - p^{(23)^2})$$
$$+ K_7\{p^{(11)}(p^{(22)}p^{(33)} - p^{(23)^2}) + p^{(12)}(p^{(13)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(33)})$$
$$+ p^{(13)}(p^{(12)}p^{(23)} - p^{(13)}p^{(22)})\} + \overline{H}$$

übergeht, worin sämtliche Koeffizienten nur Funktionen erster Ordnung bedeuten.

Genügt nun H der Hauptgleichung (28) identisch, besitzt es also die durch (36) dargestellte Form, und bestimmt man eine Funktion erster Ordnung g_1 aus der Gleichung

$$\frac{\partial g_1}{\partial p^{(1)}} = K_7,$$

so wird, wie unmittelbar zu sehen, die Funktion zweiter Ordnung

$$(37)\qquad H - \frac{d\omega_{21}}{dt_1} - \frac{d\omega_{22}}{dt_2} - \frac{d\omega_{23}}{dt_3} = M$$

wiederum die Hauptgleichung (28) identisch befriedigen, und M selbst die Determinante der zweiten Differentialquotienten von p nicht mehr enthalten. Wenn aber eine Funktion

$$M = M_1p^{(11)} + M_2p^{(12)} + M_3p^{(13)} + M_4p^{(22)} + M_5p^{(23)} + M_6p^{(33)}$$
$$+ P_1(p^{(11)}p^{(22)} - p^{(12)^2}) + P_2(p^{(11)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(13)}) + P_3(p^{(11)}p^{(33)} - p^{(13)^2})$$
$$+ P_4(p^{(12)}p^{(23)} - p^{(13)}p^{(22)}) + P_5(p^{(13)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(33)}) + P_6(p^{(22)}p^{(33)} - p^{(23)^2}) + \overline{M}$$

der Hauptgleichung (28) identisch genügt, so sieht man unmittelbar durch Substitution dieses Wertes von M in (28), daß das notwendige Verschwinden des Koeffizienten des Gliedes $p^{(22)}p^{(13)^2}$ die Gleichung nach sich zieht

$$(38)\quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial p^{(3)^2}} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial p^{(2)}\partial p^{(3)}} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial p^{(2)^2}} - \frac{\partial^2 P_4}{\partial p^{(1)}\partial p^{(3)}} + \frac{\partial^2 P_5}{\partial p^{(1)}\partial p^{(2)}} + \frac{\partial^2 P_6}{\partial p^{(1)^2}} = 0,$$

und unterwirft man nunmehr $f_1, f_2, \cdots, f_8$ den sechs Gleichungen

$$\frac{\partial f_2}{\partial p^{(1)}} - \frac{\partial f_1}{\partial p^{(2)}} = P_1, \quad \frac{\partial f_5}{\partial p^{(1)}} - \frac{\partial f_2}{\partial p^{(3)}} = P_3, \quad \frac{\partial f_8}{\partial p^{(2)}} - \frac{\partial f_7}{\partial p^{(3)}} = P_6,$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial p^{(1)}} - \frac{\partial f_2}{\partial p^{(2)}} - \frac{\partial f_1}{\partial p^{(3)}} = P_2, \quad \frac{\partial f_7}{\partial p^{(1)}} - \frac{\partial f_3}{\partial p^{(3)}} - \frac{\partial f_6}{\partial p^{(2)}} = P_4,$$
$$\frac{\partial f_4}{\partial p^{(3)}} - \frac{\partial f_5}{\partial p^{(2)}} + \frac{\partial f_6}{\partial p^{(3)}} - \frac{\partial f_8}{\partial p^{(1)}} = P_5,$$

welche sich in die Form setzen lassen

$$\frac{\partial f_7}{\partial p^{(1)}} - \frac{\partial f_6}{\partial p^{(2)}} = P_4 + \int\left[\frac{\partial P_1}{\partial p^{(3)}} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial p^{(2)}\,\partial p^{(3)}}\right] dp^{(1)},$$
$$\frac{\partial f_6}{\partial p^{(3)}} - \frac{\partial f_8}{\partial p^{(1)}} = P_5 - \int\left[\frac{\partial P_2}{\partial p^{(3)}} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial p^{(3)2}}\right] dp^{(1)},$$
$$\frac{\partial f_8}{\partial p^{(2)}} - \frac{\partial f_7}{\partial p^{(3)}} = P_6,$$

so ist, wie unmittelbar zu sehen, für beliebige Werte von f_1 und f_2 vermöge (38) die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und es werden die so gefundenen Werte $f_1, \cdots, f_8$ vermöge der Gleichungen (32) drei Funktionen ω_{11}, ω_{12}, ω_{13} definieren von der Beschaffenheit, daß auch

$$M - \frac{d\omega_{11}}{dt_1} - \frac{d\omega_{12}}{dt_2} - \frac{d\omega_{13}}{dt_3} = N$$

die Hauptgleichung (28) identisch befriedigt, worin

(39) $\quad N = N_1 p^{(11)} + N_2 p^{(12)} + N_3 p^{(13)} + N_4 p^{(22)} + N_5 p^{(23)} + N_6 p^{(33)} + \overline{N}$

ist, und $N_1, \cdots, N_6, \overline{N}$ Funktionen erster Ordnung bedeuten.

Bestimmt man nun drei Funktionen erster Ordnung $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ so, daß

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial p^{(3)}} = N_6, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial p^{(2)}} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p^{(3)}} = N_5, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial p^{(1)}} + \frac{\partial \omega_1}{\partial p^{(3)}} = N_3$$

ist, so wird

(40) $\quad Q = N - \dfrac{d\omega_1}{dt_1} - \dfrac{d\omega_2}{dt_2} - \dfrac{d\omega_3}{dt_3} = Q_1 p^{(11)} + Q_2 p^{(12)} + Q_3 p^{(22)} + \overline{Q},$

worin $Q_1, Q_2, Q_3, \overline{Q}$ Funktionen erster Ordnung sind, wiederum der Hauptgleichung (28) Genüge leisten.

Die Substitution des Ausdruckes von Q in diese identisch zu erfüllende Gleichung liefert aber durch Identifikation der Glieder

$$p^{(11)}p^{(33)} - p^{(13)2}, \quad p^{(13)}p^{(23)} - p^{(12)}p^{(33)}, \quad p^{(22)}p^{(33)} - p^{(23)2}$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial p^{(3)2}} = \frac{\partial^2 Q_2}{\partial p^{(3)2}} = \frac{\partial^2 Q_3}{\partial p^{(3)2}} = 0,$$

also

(41) $\quad Q_1 = R_{11} p^{(3)} + R_{12}, \quad Q_2 = R_{21} p^{(3)} + R_{22}, \quad Q_3 = R_{31} p^{(3)} + R_{32},$

während die Identifizierung der übrigen in den zweiten Differential-

quotienten von p quadratischen Glieder die von $p^{(3)}$ freien $R_{\alpha\beta}$ den Bedingungen unterwirft

$$(42)\qquad 2\frac{\partial R_{11}}{\partial p^{(2)}}=\frac{\partial R_{21}}{\partial p^{(1)}},\quad 2\frac{\partial R_{31}}{\partial p^{(1)}}=\frac{\partial R_{21}}{\partial p^{(2)}},\quad \frac{\partial^2 R_{32}}{\partial p^{(1)2}}+\frac{\partial^2 R_{12}}{\partial p^{(2)2}}=\frac{\partial^2 R_{22}}{\partial p^{(1)}\,\partial p^{(2)}}.$$

Bezeichnet man nun mit ω_1, ω_2, ω_3 drei solche Funktionen von $t_1, t_2, t_3, p, p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$, für welche

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(1)}}=R_{11}p^{(3)}+R_{12}, & \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(2)}}+\dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(1)}}=R_{21}p^{(3)}+R_{22}, \quad \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(2)}}=R_{31}p^{(3)}+R_{32}, \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial p^{(3)}}+\dfrac{\partial\omega_3}{\partial p^{(1)}}=0, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial p^{(3)}}+\dfrac{\partial\omega_3}{\partial p^{(2)}}=0, \quad \dfrac{\partial\omega_3}{\partial p^{(3)}}=0, \end{cases}$$

so folgen aus den drei letzten Gleichungen

$$\omega_3=\Omega_3(t_1,t_2,t_3,p,p^{(1)},p^{(2)}),\quad \omega_2=-\frac{\partial\Omega_3}{\partial p^{(2)}}p^{(3)}+\Omega_2(t_1,t_2,t_3,p,p^{(1)},p^{(2)}),$$
$$\omega_1=-\frac{\partial\Omega_3}{\partial p^{(1)}}p^{(3)}+\Omega_1(t_1,t_2,t_3,p,p^{(1)},p^{(2)}),$$

während nach den drei ersten Ω_1, Ω_2, Ω_3 den Bedingungen unterworfen sind:

$$\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial p^{(1)2}}=-R_{11},\quad 2\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial p^{(1)}\,\partial p^{(2)}}=-R_{21},\quad \frac{\partial^2\Omega_3}{\partial p^{(2)2}}=-R_{31},$$
$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial p^{(1)}}=R_{12},\quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial p^{(2)}}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial p^{(1)}}=R_{22},\quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial p^{(2)}}=R_{32},$$

für welche vermöge der Gleichungen (42) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Da nun der Ausdruck Q nach (40) die Form annimmt

$$Q=(R_{11}p^{(3)}+R_{12})p^{(11)}+(R_{21}p^{(3)}+R_{22})p^{(12)}+(R_{31}p^{(3)}+R_{32})p^{(22)}+\overline{Q},$$

und nach Früherem, da ω_1, ω_2, ω_3 Funktionen erster Ordnung sind,

$$\frac{d\omega_1}{dt_1}+\frac{d\omega_2}{dt_2}+\frac{d\omega_3}{dt_3}$$

ebenfalls der Hauptgleichung (28) identisch Genüge leistet, so wird auch

$$S=Q-\frac{d\omega_1}{dt_1}-\frac{d\omega_2}{dt_2}-\frac{d\omega_3}{dt_3}$$

dieselbe befriedigen, und da S vermöge der Gleichung (43) nur von der ersten Ordnung ist, somit der Hauptgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial p}-\frac{d}{dt_1}\frac{\partial S}{\partial p^{(1)}}-\frac{d}{dt_2}\frac{\partial S}{\partial p^{(2)}}-\frac{d}{dt_3}\frac{\partial S}{\partial p^{(3)}}=0$$

identisch genügt und nach Früherem daher als Summe von nach t_1, t_2, t_3 genommenen totalen Differentialquotienten von drei Funktionen von t_1, t_2, t_3, p darstellbar ist, so folgt zunächst:

daß, wenn eine Funktion

$$N = N_1 p^{(11)} + N_2 p^{(12)} + N_3 p^{(13)} + N_4 p^{(22)} + N_5 p^{(23)} + N_6 p^{(33)} + \bar{N}$$

der Hauptgleichung vierter Ordnung identisch Genüge leistet, dieselbe stets in der Form darstellbar ist

$$N = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \frac{d\omega_3}{dt_3},$$

worin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *Funktionen erster Ordnung bedeuten.*

Fassen wir nunmehr die einzelnen hier gewonnenen Resultate zusammen, so folgt als *notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H zweiter Ordnung von einer abhängigen und drei unabhängigen Variabeln der zugehörigen Hauptgleichung vierter Ordnung identisch Genüge leistet, die, daß dieselbe in der Form darstellbar ist*

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \frac{d\omega_3}{\partial t_3},$$

worin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *durch die in den Unterdeterminanten erster und zweiter Ordnung der aus den 2. partiellen Differentialquotienten von p gebildeten Determinante linear zusammengesetzten Ausdrücke* (31) *definiert sind.*

Genau ebenso stellt sich die notwendige und hinreichende Bedingung für die identische Befriedigung der zugehörigen Hauptgleichung dar für eine Funktion H beliebiger Ordnung von *einer* abhängigen und beliebig vielen unabhängigen Variabeln durch die Zusammensetzung von nach den unabhängigen Variabeln genommenen totalen Differentialquotienten.

Wir gehen nun endlich zu Funktionen mehrerer abhängiger Variabeln über, bei welchen selbst schon für solche *erster* Ordnung nicht mehr, wie es für den Fall *einer* abhängigen Variabeln oben nachgewiesen worden, die Funktionen ω nur von der 0^{ten} Ordnung sein werden.

Untersuchen wir den Fall einer Funktion H der ersten Ordnung von zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln, so ist zunächst wieder unmittelbar ersichtlich, daß, wenn ω_1 und ω_2 Funktionen erster Ordnung von t_1, t_2, p_1, p_2 bedeuten, und

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2}$$

ebenfalls eine Funktion erster Ordnung sein soll, somit den beiden Hauptgleichungen

$$(44) \quad \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(2)}} = 0$$

identisch genügen wird, die Bedingungen zu befriedigen sind

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial p_1^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial p_1^{(2)}} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial p_2^{(2)}} + \frac{\partial \omega_2}{\partial p_2^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial p_1^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial p_2^{(2)}} = 0,$$

aus denen die Formen sich ergeben:

(45) $\omega_1 = f_1 p_1^{(2)} + f_2 p_2^{(2)} + F_1, \quad \omega_2 = -f_1 p_1^{(1)} - f_2 p_2^{(1)} + F_2,$

worin die Funktionen f_1, f_2, F_1, F_2 nur von t_1, t_2, p_1, p_2 abhängen.

Wenn sich somit eine Funktion H der ersten Ordnung zweier abhängiger und zweier unabhängiger Variabeln in der Form darstellen läßt

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

und somit den beiden Hauptgleichungen (44) *identisch genügt, so werden die beiden Funktionen ω_1 und ω_2 die durch die Gleichungen* (45) *angegebene Form besitzen.*

Um wiederum die Frage der Umkehrung zu beantworten, suchen wir die Form einer jeden Funktion H der ersten Ordnung, welche die Hauptgleichungen (44) identisch befriedigt, und finden aus den Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(1)^2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(1)} \partial p_1^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(2)^2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(1)} \partial p_2^{(1)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(2)} \partial p_2^{(2)}} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(1)^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(1)} \partial p_2^{(2)}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(2)^2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(1)} \partial p_2^{(2)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(2)} \partial p_2^{(1)}} = 0$$

H in der Gestalt

(46) $H = H_1 p_1^{(1)} + H_2 p_1^{(2)} + H_3 p_2^{(1)} + H_4 p_2^{(2)} + H_5 (p_1^{(1)} p_2^{(2)} - p_1^{(2)} p_2^{(1)}) + \overline{H},$

worin $H_1, H_2, \cdots, \overline{H}$ nur von t_1, t_2, p_1 und p_2 abhängen, wie z. B.

$$H = (t_2 p_2 + 2 t_2 p_1) p_1^{(2)} + (t_1 p_1 - 2 t_2 p_1^2) p_2^{(1)} + (2 t_2^2 p_1 - t_1 t_2)(p_1^{(1)} p_2^{(2)} - p_2^{(1)} p_1^{(2)})$$
$$+ p_1 p_2 + p_1^2.$$

Zunächst ist wiederum ersichtlich, daß, wenn man

$$\omega_1 = f_1(t_1, t_2, p_1, p_2) p_1^{(2)}, \quad \omega_2 = -f_1(t_1, t_2, p_1, p_2) p_1^{(1)}$$

setzt, die Funktion erster Ordnung

$$\frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

ebenso wie H der Voraussetzung nach, den beiden Hauptgleichungen (44) identisch Genüge leistet, und daß daher, wenn f_1 durch die Gleichung bestimmt ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_2} = -H_5,$$

dasselbe für die Funktion

$$K = H - \frac{d\omega_1}{dt_1} - \frac{d\omega_2}{dt_2} = K_1 p_1^{(1)} + K_2 p_1^{(2)} + K_3 p_2^{(1)} + K_4 p_2^{(2)} + \overline{K},$$

worin die $K_1, K_2, \cdots, \overline{K}$ wiederum 0^{ter} Ordnung sind, der Fall ist.

Genügt aber eine Funktion von der Form K den Hauptgleichungen (44) identisch, so finden, wie die Substitution unmittelbar lehrt, die Beziehungen statt

$$\frac{\partial K_1}{\partial p_2} = \frac{\partial K_3}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial K_2}{\partial p_2} = \frac{\partial K_4}{\partial p_1}, \tag{47}$$

und bestimmt man daher zwei Funktionen

$$\bar{\omega}_1 = \bar{f}_1(t_1, t_2, p_1, p_2), \qquad \bar{\omega}_2 = \bar{f}_2(t_1, t_2, p_1, p_2)$$

mittels der Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial p_1} = K_1, \quad \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial p_2} = K_3, \quad \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial p_1} = K_2, \quad \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial p_2} = K_4,$$

was vermöge der Integrabilitätsbedingungen (47) möglich ist, so wird

$$K - \frac{d\bar{\omega}_1}{dt_1} - \frac{d\bar{\omega}_2}{dt_2} = L$$

wiederum den Hauptgleichungen (44) identisch genügen, und L als Funktion 0^{ter} Ordnung von p_1 und p_2 frei sein müssen. Setzen wir die beiden eben gefundenen Resultate zusammen, so folgt

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H erster Ordnung von zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln den beiden zugehörigen Hauptgleichungen identisch Genüge leistet, die, daß dieselbe in der Form darstellbar ist

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

wenn

$$\omega_1 = f_1 p_1^{(2)} + \bar{f}_1, \qquad \omega_2 = -f_1 p_1^{(1)} + \bar{f}_2,$$

und $f_1, \bar{f}_1, f_2, \bar{f}_2$ Funktionen 0^{ter} Ordnung bedeuten.

In dem oben zu (46) beigefügten Beispiel ist

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \quad (t_1 t_2 p_2 - 2t_2^2 p_1 p_2) p_1^{(2)} + t_1 p_1 p_2 - 2t_2 p_1^2 p_2, \\ \omega_2 &= -(t_1 t_2 p_2 - 2t_2^2 p_1 p_2) p_1^{(1)} + t_2 p_1^2. \end{aligned}$$

Ist nun H eine Funktion erster Ordnung von μ abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln, so findet man ebenso leicht als die notwendige Form dafür, daß dieselbe den zugehörigen μ Hauptgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(2)}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, \mu)$$

identisch genügt:

$$\begin{aligned} H = H_{11} p_1^{(1)} + H_{12} p_1^{(2)} + H_{21} p_2^{(1)} + H_{22} p_2^{(2)} + \cdots + H_{\mu 1} p_\mu^{(1)} + H_{\mu 2} p_\mu^{(2)} \\ + \bar{H}_{12}(p_1^{(1)} p_2^{(2)} - p_1^{(2)} p_2^{(1)}) + \bar{H}_{13}(p_1^{(1)} p_3^{(2)} - p_1^{(2)} p_3^{(1)}) + \cdots \\ + \bar{H}_{\mu-1,\mu}(p_{\mu-1}^{(1)} p_\mu^{(2)} - p_{\mu-1}^{(2)} p_\mu^{(1)}) + \bar{H}, \end{aligned}$$

worin die $H_{11}, \cdots, \overline{H}_{12}, \cdots, \overline{\overline{H}}$ Funktionen 0^{ter} Ordnung sind, und es ergibt sich somit auf Grund der früheren Betrachtungen

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H erster Ordnung von μ abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln den zugehörigen μ Hauptgleichungen identisch Genüge leistet, die, daß dieselbe in der Form darstellbar ist

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

worin

$$\omega_1 = \quad f_1 p_1^{(2)} + f_2 p_2^{(2)} + \cdots + f_\mu p_\mu^{(2)} + F_1,$$

$$\omega_2 = -f_1 p_1^{(1)} - f_2 p_2^{(1)} - \cdots - f_\mu p_\mu^{(1)} + F_2,$$

und $f_1, \cdots, f_\mu, F_1, F_2$ *Funktionen* 0^{ter} *Ordnung bedeuten.*

Und ebenso folgt allgemein

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H der ersten Ordnung von μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln den zugehörigen μ Hauptgleichungen identisch Genüge leistet, die, daß diese Funktion in der Form darstellbar ist

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho},$$

worin $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ *ebenfalls Funktionen erster Ordnung von der Form sind:*

$$\begin{aligned}
\omega_1 = \quad & f_{12} p_1^{(2)} + f_{22} p_2^{(2)} + \cdots + f_{\mu 2} p_\mu^{(2)} + f_{13} p_1^{(3)} + f_{23} p_2^{(3)} + \cdots + f_{\mu 3} p_\mu^{(3)} + \cdots \\
& + f_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + f_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + f_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_1, \\
\omega_2 = & -f_{12} p_1^{(1)} - f_{22} p_2^{(1)} - \cdots - f_{\mu 2} p_\mu^{(1)} + g_{13} p_1^{(3)} + g_{23} p_2^{(3)} + \cdots + g_{\mu 3} p_\mu^{(3)} + \cdots \\
& + g_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + g_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + g_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_2, \\
\omega_3 = & -f_{13} p_1^{(1)} - f_{23} p_2^{(1)} - \cdots - f_{\mu 3} p_\mu^{(1)} - g_{13} p_1^{(2)} - g_{23} p_2^{(2)} - \cdots - g_{\mu 3} p_\mu^{(2)} + \cdots \\
& + h_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + h_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + h_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_3, \\
\vdots \\
\omega_\varrho = & -f_{1\varrho} p_1^{(1)} - f_{2\varrho} p_2^{(1)} - \cdots - f_{\mu\varrho} p_\mu^{(1)} - \cdots \\
& + k_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + k_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + k_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_\varrho.
\end{aligned}$$

Während nun aber bei *einer* abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln sich ein Unterschied in der Form der ω für Funktionen H der ersten und einer höheren Ordnung ergab, bleibt für mehrere abhängige und zwei unabhängige Variable die Form der ω dieselbe, von welcher Ordnung H auch sein mag.

Ist nämlich H eine Funktion *zweiter* Ordnung von zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln, so werden sich, wenn die beiden Hauptgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(2)}} + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(11)}} + \frac{d^2}{dt_1\,dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(12)}} + \frac{d^2}{dt_2^2}\frac{\partial H}{\partial p_1^{(22)}} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{d}{dt_1}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(1)}} - \frac{d}{dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(2)}} + \frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(11)}} + \frac{d^2}{dt_1\,dt_2}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(12)}} + \frac{d^2}{dt_2^2}\frac{\partial H}{\partial p_2^{(22)}} = 0$$

durch dieselbe identisch befriedigt sein sollen, wie durch Substitution unmittelbar folgt, die ebenso für beliebig viele abhängige Variable geltenden Beziehungen ergeben

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(11)}\,\partial p_\varrho^{(11)}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(11)}\,\partial p_\varrho^{(12)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(12)}\,\partial p_\varrho^{(11)}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(12)}\,\partial p_\varrho^{(22)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(22)}\,\partial p_\varrho^{(12)}} = 0, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(22)}\,\partial p_\varrho^{(22)}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(11)}\,\partial p_\varrho^{(22)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(12)}\,\partial p_\varrho^{(12)}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s^{(22)}\,\partial p_\varrho^{(11)}} = 0,$$

und daher, weil die dritten Differentialquotienten von H sämtlich verschwinden, H die Form annehmen

$$\begin{aligned} H = {} & H_{11} p_1^{(11)} + H_{12} p_1^{(12)} + H_{13} p_1^{(22)} + H_{21} p_2^{(11)} + H_{22} p_2^{(12)} + H_{23} p_2^{(22)} \\ & + H_1\left(p_1^{(11)} p_1^{(22)} - p_1^{(12)^2}\right) + H_2\left(p_2^{(11)} p_2^{(22)} - p_2^{(12)^2}\right) \\ & + H_3\left(p_1^{(12)} p_2^{(11)} - p_2^{(12)} p_1^{(11)}\right) + H_4\left(p_1^{(12)} p_2^{(22)} - p_2^{(12)} p_1^{(22)}\right) \\ & + H_5\left(p_1^{(22)} p_2^{(11)} - p_1^{(11)} p_2^{(22)}\right) + H_6\left(p_1^{(11)} p_2^{(22)} - p_1^{(12)} p_2^{(12)}\right) + \overline{H}, \end{aligned}$$

worin $H_{11}, \cdots, H_1, \cdots, \overline{H}$ Funktionen erster Ordnung bedeuten, und man zeigt wieder genau wie oben, daß

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion zweiter Ordnung zweier abhängiger und zweier unabhängiger Variabeln den beiden zugehörigen Hauptgleichungen 4. Ordnung identisch Genüge leistet, die ist, daß dieselbe sich in der Form darstellen läßt

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2},$$

worin ω_1 und ω_2 Funktionen zweiter Ordnung von der Form sind

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 p_1^{(12)} + f_2 p_2^{(12)} + f_3 p_1^{(22)} + f_4 p_2^{(22)} + \varphi_1 p_1^{(2)} + \psi_1, \\ \omega_2 &= -f_1 p_1^{(11)} - f_2 p_2^{(11)} - f_3 p_1^{(12)} - f_4 p_2^{(12)} - \varphi_1 p_1^{(1)} + \psi_2, \end{aligned}$$

wenn f_1, f_2, f_3, f_4 *Funktionen erster Ordnung,* $\varphi_1, \psi_1, \psi_2$ *Funktionen* 0^{ter} *Ordnung bedeuten,*

und genau dieselbe Reduktionsform ergibt sich für Funktionen H ν^{ter} Ordnung von μ abhängigen und *zwei* unabhängigen Variabeln.

Sei endlich H eine Funktion zweiter Ordnung von zwei abhängigen und drei unabhängigen Variabeln, so werden sich die Funktionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ wieder den Gleichungen (31) analog zusammensetzen, indem nur diese Funktionen aus der Summe solcher Ausdrücke bestehen, die sich durch die Kombination der Indizes der abhängigen Variabeln p voneinander unterscheiden, und entsprechend werden alle diese Sätze auch für Funktionen H beliebiger Ordnung mit μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln lauten.

Fassen wir nunmehr die in der vorliegenden Untersuchung gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich das nachfolgende Theorem:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion H *der* ν^{ten} *Ordnung von* μ *abhängigen Variabeln* $p_1, p_2, \cdots, p_\mu$ *und* ϱ *unabhängigen Variabeln* $t_1, t_2, \cdots, t_\varrho$ *den zu der Variation*

$$\delta \int_{t_1^0}^{t_1^1} \int_{t_2^0}^{t_2^1} \cdots \int_{t_\varrho^0}^{t_\varrho^1} H \, dt_\varrho \, dt_{\varrho-1} \cdots dt_1$$

gehörigen μ *Hauptgleichungen* $2\nu^{ter}$ *Ordnung*

$$\frac{\partial H}{\partial p_s} - \sum_{i_1} \frac{d}{dt_{i_1}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(i_1)}} + \sum_{i_1 i_2} \frac{d^2}{dt_{i_1} dt_{i_2}} \frac{\partial H}{\partial p_s^{(i_1 i_2)}} - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \frac{d^\nu}{dt_{i_1} dt_{i_2} \cdots dt_{i_\nu}} \frac{\partial H}{\partial p^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}} = 0$$

identisch Genüge leistet, ist die, daß H *in der Form darstellbar ist*

$$H = \frac{d\omega_1}{dt_1} + \frac{d\omega_2}{dt_2} + \cdots + \frac{d\omega_\varrho}{dt_\varrho},$$

worin

I. *die Funktionen* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\varrho$ *Funktionen der* 0^{ten} *Ordnung sind, wenn* H *eine Funktion* erster *Ordnung von* einer *abhängigen und* ϱ *unabhängigen Variabeln ist;*

II. *die Funktionen* ω_1 *und* ω_2 *die Form haben*

$$\omega_1 = \quad f_1 p^{(\nu-1,1)} + f_2 p^{(\nu-2,2)} + \cdots + f_\nu p^{(0,\nu)} \quad + F_1,$$
$$\omega_2 = - f_1 p^{(\nu,0)} \quad - f_2 p^{(\nu-1,1)} - \cdots - f_\nu p^{(1,\nu-1)} + F_2,$$

worin $f_1, f_2, \cdots, f_\nu, F_1, F_2$ *Funktionen* $\nu - 1^{ter}$ *Ordnung bedeuten, wenn* H

eine Funktion ν^{ter} Ordnung ($\nu > 1$) von einer abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln ist, und ähnlich

$$\begin{aligned}
\omega_1 = {} & f_{12} p_1^{(2)} + f_{22} p_2^{(2)} + \cdots + f_{\mu 2} p_\mu^{(2)} + f_{13} p_1^{(3)} + f_{23} p_2^{(3)} + \cdots + f_{\mu 3} p_\mu^{(3)} + \cdots \\
& + f_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + f_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + f_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_1, \\
\omega_2 = {} & -f_{12} p_1^{(1)} - f_{22} p_2^{(1)} - \cdots - f_{\mu 2} p_\mu^{(1)} + g_{13} p_1^{(3)} + g_{23} p_2^{(3)} + \cdots + g_{\mu 3} p_\mu^{(3)} + \cdots \\
& + g_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + g_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + g_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_2, \\
\omega_3 = {} & -f_{13} p_1^{(1)} - f_{23} p_2^{(1)} - \cdots - f_{\mu 3} p_\mu^{(1)} - g_{13} p_1^{(2)} - g_{23} p_2^{(2)} - \cdots - g_{\mu 3} p_\mu^{(2)} + \cdots \\
& + h_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + h_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + h_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_3, \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\omega_\varrho = {} & -f_{1\varrho} p_1^{(1)} - f_{2\varrho} p_2^{(1)} - \cdots - f_{\mu\varrho} p_\mu^{(1)} - \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + k_{1\varrho} p_1^{(\varrho)} + k_{2\varrho} p_2^{(\varrho)} + \cdots + k_{\mu\varrho} p_\mu^{(\varrho)} + F_\varrho,
\end{aligned}$$

worin die Koeffizienten von 0^{ter} Ordnung sind, wenn H eine Funktion erster Ordnung von μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln ist;

ferner die entsprechenden Formen

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= f_1 p_1^{(12)} + f_2 p_2^{(12)} + f_3 p_1^{(22)} + f_4 p_2^{(22)} + \varphi_1 p_1^{(2)} + \psi_1, \\
\omega_2 &= -f_1 p_1^{(11)} - f_2 p_2^{(11)} - f_3 p_1^{(12)} - f_4 p_2^{(12)} - \varphi_1 p_1^{(1)} + \psi_2,
\end{aligned}$$

worin f_1, f_2, f_3, f_4 Funktionen erster, $\varphi_1, \psi_1, \psi_2$ Funktionen 0^{ter} Ordnung bedeuten, wenn H eine Funktion zweiter Ordnung von zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln ist, und die ähnliche Darstellung für Funktionen ν^{ter} Ordnung mit μ abhängigen, aber zwei unabhängigen Variabeln;

III. *die Funktionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Gestalt haben*

$$\begin{aligned}
\omega_1 = {} & f_1 p^{(12)} + f_2 p^{(13)} + f_3 p^{(22)} + f_4 p^{(23)} + f_5 p^{(33)} + g_1 (p^{(23)2} - p^{(22)} p^{(33)}) \\
& + g_2 (p^{(12)} p^{(33)} - p^{(13)} p^{(23)}) + g_3 (p^{(13)} p^{(22)} - p^{(12)} p^{(23)}) + G_1, \\
\omega_2 = {} & -f_1 p^{(11)} + f_7 p^{(23)} - f_3 p^{(12)} + f_6 p^{(13)} + f_8 p^{(33)} + g_1 (p^{(12)} p^{(33)} - p^{(13)} p^{(23)}) \\
& + g_2 (p^{(13)2} - p^{(11)} p^{(33)}) + g_3 (p^{(11)} p^{(23)} - p^{(12)} p^{(13)}) + G_2, \\
\omega_3 = {} & -f_2 p^{(11)} - f_7 p^{(22)} - f_5 p^{(13)} - (f_4 + f_6) p^{(12)} - f_8 p^{(23)} + g_1 (p^{(13)} p^{(22)} - p^{(12)} p^{(23)}) \\
& + g_2 (p^{(11)} p^{(23)} - p^{(12)} p^{(13)}) + g_3 (p^{(12)2} - p^{(11)} p^{(22)}) - G_3,
\end{aligned}$$

worin $f_1, f_2, \cdots, f_8, g_1, g_2, g_3, G_1, G_2, G_3$ Funktionen von $t_1, t_2, t_3, p, p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ sind, wenn H eine Funktion zweiter Ordnung mit einer abhängigen und drei unabhängigen Variabeln ist; und für Funktionen ν^{ter} Ordnung mit einer abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln die entsprechenden additiven

Zusammensetzungen aus den Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen der aus den partiellen Differentialquotienten der abhängigen Variabeln gebildeten Determinanten anzusetzen sind.

Die analogen Zusammensetzungen der ω ergeben sich für eine Funktion H der zweiten Ordnung mit zwei abhängigen und drei unabhängigen Variabeln, allgemein für eine Funktion H der ν^{ten} Ordnung mit μ abhängigen und ϱ unabhängigen Variabeln.

Heidelberg, den 24. Juni 1905.

Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials.

Von

JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

Seien $F_1, F_2, \cdots, F_n$ gegebene Funktionen, die außer den m unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_m$ auch noch deren n unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und eine endliche Anzahl von Ableitungen

$$y_1^{(1)} = \frac{dy_1}{dx_1}, \cdots, y_h^{(i)} = \frac{dy_h}{dx_i}, \cdots, y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} = \frac{d^\nu y_h}{dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}}, \cdots$$

enthalten. Gibt es eine solche Funktion

$$f\left(x_1, \cdots, x_m;\ y_1, \cdots, y_n;\ y_1^{(1)}, \cdots, y_h^{(i)}, \cdots, y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}, \cdots\right)$$

daß jedes F_h in der Gestalt

$$\begin{aligned} F_h = V_h(f) = \frac{\partial f}{\partial y_h} &- \frac{d}{dx_1}\frac{\partial f}{\partial y_h^{(1)}} - \frac{d}{dx_2}\frac{\partial f}{\partial y_h^{(2)}} - \cdots \\ &+ \frac{d^2}{dx_1^2}\frac{\partial f}{\partial y_h^{(11)}} + \frac{d^2}{dx_1\, dx_2}\frac{\partial f}{\partial y_h^{(12)}} + \cdots \\ &- \frac{d^3}{dx_1^3}\frac{\partial f}{\partial y_h^{(111)}} - \frac{d^3}{dx_1^2\, dx_2}\frac{\partial f}{\partial y_h^{(112)}} - \cdots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

dargestellt werden kann, dann sagen wir mit Leo Koenigsberger, das System $F_1, F_2, \cdots, F_n$ besitzt das *verallgemeinerte kinetische Potential* f.

Unsere Aufgabe soll sein, die Richtigkeit der eleganten Existenzbedingungen eines solchen Potentials, die Arthur Hirsch*) aufgestellt, jedoch außer für $m = 1$ nur in sehr speziellen Fällen bewiesen hat, allgemein darzulegen. Ich befolge bei der Ableitung der Notwendigkeit dieser Bedingungen genau den von Hirsch eingeschlagenen Weg. Hingegen mußte

---

*) A. Hirsch, *Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Math. Annalen Bd. 49 (1897), S. 49—72.

Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials. Math. Annalen Bd. 50 (1898), S. 429—441.

ich zum Beweise der Hinlänglichkeit der als notwendig erkannten Bedingungen einen neuen Weg suchen.

1. Bevor wir uns dem Gegenstande selbst zuwenden, schicken wir einige Betrachtungen voraus über Systeme linearer Differentialausdrücke, die zueinander adjungiert sind.

Bezeichnen wir mit

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

n unbestimmte Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_m$ und mit

$$P_{hk}(u) =$$
$$= \alpha_{hk}(x, \cdots, x_m) u + \beta_{hk}(x_1, \cdots, x_m) \frac{du}{dx_1} + \cdots + \mu_{hk}(x_1, \cdots, x_m) \frac{d^\nu u}{dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}} + \cdots$$
$$(h, k = 1, 2, \cdots, n)$$

n^2 lineare homogene Differentialausdrücke, aus denen wir n Summen

$$\sum_{k=1}^{n} P_{1k}(u_k), \quad \sum_{k=1}^{n} P_{2k}(u_k), \cdots, \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(u_k) \tag{1}$$

zusammensetzen, so liegt es nahe zu fragen: wie müssen n Funktionen

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

beschaffen sein, damit sich

$$v_1 \sum_{k=1}^{n} P_{1k}(u_k) + v_2 \sum_{k=1}^{n} P_{2k}(u_k) + \cdots + v_n \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(u_k) \tag{2}$$

durch ein Aggregat von m exakten, nach den einzelnen Argumenten $x_1, x_2, \cdots, x_m$ genommenen Differentialquotienten darstellen läßt?

Die vom Ausdrucke (2) geforderte Eigenschaft soll im folgenden zur Abkürzung mit ~ 0 bezeichnet werden. Um die Forderung

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} v_h P_{hk}(u_k) \sim 0 \tag{3}$$

auch in anderer Weise auszudrücken, ziehen wir in Betracht, daß der zu $P_{hk}(u)$ *adjungierte* Differentialausdruck

$$\text{adj. } P_{hk}(u) =$$
$$u \cdot \alpha_{hk} - \frac{d}{dx_1}(u \cdot \beta_{hk}) + \cdots + (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}} (u \cdot \mu_{hk}) + \cdots$$

bekanntlich*) als solcher völlig durch die Eigenschaft

$$v \cdot P_{hk}(u) - u \cdot \text{adj. } P_{hk}(v) \sim 0$$

---

*) G. Frobenius, *Über adjungierte lineare Differentialausdrücke.* Journal für Mathematik, Bd. 85 (1878), S. 207.

charakterisiert ist. Unsere obige Forderung kann also auch so geschrieben werden:

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \operatorname{adj.} P_{hk}(v_h) \sim 0. \tag{4}$$

Da hier die u_k unbestimmt sind, so müssen die einzelnen Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{adj.} P_{hk}(v_h)$$

für sich verschwinden.

Die Summen

$$\sum_{h=1}^{n} \operatorname{adj.} P_{h1}(v_h),\ \sum_{h=1}^{n} \operatorname{adj.} P_{h2}(v_h),\ \cdots,\ \sum_{h=1}^{n} \operatorname{adj.} P_{hn}(v_h), \tag{5}$$

die demnach die linken Seiten bemerkenswerter Differentialgleichungen bilden, nennen wir das zum Systeme (1) *adjungierte* System von linearen Differentialausdrücken.

Fallen die beiden Systeme (1) *und* (5) *zusammen, sobald wir die Zeichen u_k und v_k identifizieren, so nennen wir das System* (1) *zu sich selbst adjungiert.*

Das notwendige und untrügliche Kriterium für das Eintreffen dieses Falles wird durch die Gleichungen

$$\operatorname{adj.} P_{hk}(u) = P_{kh}(u)$$
$$(h, k = 1, 2, \cdots, n)$$

ausgedrückt, die wir auch in der Gestalt

$$u \cdot P_{kh}(v) - v \cdot P_{hk}(u) \sim 0 \tag{6}$$
$$(h, k = 1, 2, \cdots, n)$$

schreiben können.

2. Das vom kinetischen Potential

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_m;\ y_1, y_2, \cdots, y_n;\ \cdots, y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}, \cdots\right)$$

abgeleitete System

$$F_1 = V_1(f),\ F_2 = V_2(f), \cdots, F_n = V_n(f)$$

wird, wie aus der Variationsrechnung bekannt ist, durch die Eigenschaft definiert, daß die Differenz von $u_h \cdot F_h$ und

$$\delta_{u_h} f = \frac{\partial f}{\partial y_h} u_h + \frac{\partial f}{\partial y_h^{(1)}} u_h^{(1)} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}} u_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} + \cdots$$

sich durch ein Aggregat von m exakten, nach den einzelnen Argumenten

$x_1, x_2, \cdots, x_m$ genommenen Differentialquotienten darstellen läßt. Es kann dies mit Hilfe des Zeichens $\sim$ so ausgedrückt werden:

$$\delta_{u_h} f \sim u_h \cdot F_h$$
$$(h = 1, 2, \cdots n).$$

Wenden wir auf diese Relationen den Prozeß

$$\delta_{v_k} f = \frac{\partial f}{\partial y_k} v_k + \frac{\partial f}{\partial y_k^{(1)}} v_k^{(1)} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_k^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}} v_k^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} + \cdots$$

an, so ergibt sich zufolge der Vertauschbarkeit von $\frac{d}{dx_i}$ und δ_{v_k}:

$$\delta_{v_k}(\delta_{u_h} f) \sim u_h \cdot \delta_{v_k} F_h.$$

Ebenso gilt:

$$\delta_{u_h}(\delta_{v_k} f) \sim v_k \cdot \delta_{u_h} F_k.$$

In Anbetracht der Vertauschbarkeit der beiden Prozesse δ_{u_h} und δ_{v_k} folgt hieraus

(7) $$u_h \cdot \delta_{v_k} F_h \sim v_k \cdot \delta_{u_h} F_k.$$
$$(h, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Führen wir noch für $\delta_{u_k} F_h$ das Symbol $P_{hk}(u_k)$ ein, so gehen diese Formeln über in das System (6). Ihr Inhalt kann also durch den folgenden Satz ausgedrückt werden:

I. *Das aus den Funktionen*

$$F_1 = V_1(f),\ F_2 = V_2(f), \cdots, F_n = V_n(f)$$

abgeleitete System linearer Differentialausdrücke

(8) $$\delta F_h = \delta_{u_1} F_h + \delta_{u_2} F_h + \cdots + \delta_{u_n} F_h$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n)$$

ist zu sich selbst adjungiert.

3. Der soeben bewiesene Satz läßt sich umkehren. Dies ist fast selbstverständlich, wenn in den F_h die Ableitungen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ nicht enthalten sind, sondern außer

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

nur

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

selbst vorkommen. In diesem Falle hat nämlich das zu

$$\delta F_h = \frac{\partial F_h}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_h}{\partial y_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial F_h}{\partial y_n} u_n$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n)$$

adjungierte System die folgende Gestalt

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_h} v_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_h} v_2 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial y_h} v_n$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n).$$

Fallen diese beiden Systeme zusammen, sobald wir die Zeichen u_k und v_k identifizieren, so ist

$$\frac{\partial F_h}{\partial y_k} = \frac{\partial F_k}{\partial y_h}$$
$$(h, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Wird diese Bedingung in der Umgebung einer Stelle

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \cdots, x_m = a_m, \quad y_1 = b_1,\ y_2 = b_2, \cdots, y_n = b_n$$

befriedigt, so ist dort

$$(9) \qquad F_1 dy_1 + F_2 dy_2 + \cdots + F_n dy_n,$$

wenn man $x_1, x_2, \cdots, x_m$ nur als Parameter betrachtet, ein vollständiges Differential. Es können also dann in der besagten Umgebung $F_1, F_2, \cdots, F_n$ in der Gestalt

$$F_1 = V_1(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1},\ F_2 = V_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y_2}, \cdots, F_n = V_n(f) = \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

dargestellt werden. Wählen wir als f das geradlinige Integral des Differentials (9) von $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ bis $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, so ist

$$(10) \quad f = \sum_{h=1}^{n} \int_0^1 (y_h - b_h) F_h(x_1, \cdots, x_m;\ t(y_1 - b_1) + b_1, \cdots, t(y_n - b_n) + b_n)\, dt.$$

4. Die Verallgemeinerung der bekannten Formel (10) führt in einfacher Weise zu der folgenden allgemeinen Umkehrung des Satzes I:

II. *Seien $F_1, F_2, \cdots, F_n$ gegebene Funktionen der Größen*

$$x_1, x_2, \cdots, x_m;\ y_1, y_2, \cdots, y_n;\ \cdots, y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}, \cdots,$$

und es bedeute

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots, x_m = a_m;\ y_1 = b_1, y_2 = b_2, \cdots, y_n = b_n; \cdots, y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} = b_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}, \cdots$$

eine solche Stelle (S), daß die in dem Systeme

$$(8) \qquad \delta F_h = \delta_{u_1} F_h + \delta_{u_2} F_h + \cdots + \delta_{u_n} F_h$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n)$$

und in dem hierzu adjungierten Systeme vorkommenden Koeffizienten sowohl an dieser Stelle, wie in einer gewissen Umgebung (C) dieser Stelle existieren. Außerdem sei in (C) das System (8) zu sich selbst adjungiert. Dann kann man mit Hilfe einer Quadratur eine Funktion

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m;\ y_1, y_2, \cdots, y_n;\ \cdots, y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}, \cdots)$$

konstruieren, vermittels deren sich die Funktionen F_h wenigstens in einer gewissen Umgebung (C') von (S) in der Gestalt

$$F_1 = V_1(f),\ F_2 = V_2(f), \cdots, F_n = V_n(f)$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n)$$

darstellen lassen.

Bezeichnen wir $\delta_{u_k} F_h$ wieder durch das Symbol $P_{hk}(u_k)$, so kann unsere Voraussetzung, daß das System (6) zu sich selbst adjungiert ist, durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{hk}(u_k) = \sum_{k=1}^{n} \text{adj. } P_{kh}(u_k) \tag{11}$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n).$$

Diese Gleichungen sind nach unserer Annahme identisch befriedigt; bleiben also auch dann noch richtig, wenn wir in ihnen für die y_k, u_k und deren Ableitungen andere Größen einsetzen. Wir wollen vor allem für

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

und deren Ableitungen die Funktionen

$$t(y_1 - \varphi_1) + \varphi_1,\ t(y_2 - \varphi_2) + \varphi_2, \cdots, t(y_n - \varphi_n) + \varphi_n$$

und deren Ableitungen einsetzen. Hier bedeuten die φ_k beliebige, aber gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_m$; der Buchstabe t bezeichnet einen neuen Parameter, der in den φ_k nicht vorkommt. Nach der besagten Substitution, für die wir das Symbol [ ] einführen, gehen die Gleichungen (11) über in

$$\sum_{k=1}^{n} [P_{hk}(u_k)] = \sum_{k=1}^{n} [\text{adj. } P_{kh}(u_k)] \tag{12}$$
$$(h = 1, 2, \cdots, n).$$

Hier ist

$$[P_{hk}(u)] = \left[\frac{\partial F_h}{\partial y_k}\right] u + \left[\frac{\partial F_h}{\partial y_k^{(1)}}\right] u^{(1)} + \cdots + \left[\frac{\partial F_h}{\partial y_k^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}\right] u^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} + \cdots \tag{13}$$

und

$$[\text{adj. } P_{kh}(u)] = \left[u \cdot \frac{\partial F_k}{\partial y_h}\right] - \left[\frac{d}{dx_1}\left(u \cdot \frac{\partial F_k}{\partial y_h^{(1)}}\right)\right] - \cdots$$
$$+ (-1)^\nu \left[\frac{d^\nu}{dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}} \left(u \cdot \frac{\partial F_k}{\partial y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}\right)\right] + \cdots$$

Ziehen wir noch in Betracht, daß für jede Funktion Φ

$$\frac{\partial [\Phi]}{\partial y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}\right] t$$

und

$$\frac{d[\Phi]}{dx_i} = \left[\frac{d\Phi}{dx_i}\right]$$

ist, so können wir auch schreiben

$$t[\text{adj. } P_{kh}(u)] = u \cdot \frac{\partial[F_k]}{\partial y_h} - \frac{d}{dx_1}\left(u \cdot \frac{\partial[F_k]}{\partial y_h^{(1)}}\right) - \cdots \tag{14}$$

$$+ (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}}\left(u \cdot \frac{\partial[F_k]}{\partial y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}\right) + \cdots.$$

Ersetzen wir nun noch $u_1, u_2, \cdots, u_n$ und deren Ableitungen durch die Funktionen

$$y_1 - \varphi_1,\; y_2 - \varphi_2, \cdots, y_n - \varphi_n$$

und deren Ableitungen, so geht die Summe $\sum_{h=1}^{n}[P_{hk}(u_k)]$ über in

$$\frac{\partial[F_h]}{\partial t}$$

und das Produkt $t[\text{adj. } P_{kh}(u)]$ in

$$V_h((y_k - \varphi_k)[F_k]) - \delta_{hk}[F_h],$$

wo δ_{hk} Eins oder Null bedeutet, je nachdem h und k gleich oder verschieden sind. Die Gleichung (12) geht also schließlich in die folgende über

$$t\,\frac{\partial[F_h]}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} V_h((y_k - \varphi_k)[F_k]) - [F_h]$$

$$(h = 1, 2, \cdots, n),$$

d. h. in

$$\frac{\partial}{\partial t}(t[F_h]) = \sum_{k=1}^{n} V_h((y_k - \varphi_k)[F_k])$$

$$(h = 1, 2, \cdots, n).$$

Wenn wir nun nach t von $t = 0$ bis $t = 1$ integrieren und dabei in Betracht ziehen, daß diese Integration mit der Operation V_h vertauschbar ist, so erhalten wir in der Tat

$$F_h = V_h(f),$$

wo

$$f = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (y_k - \varphi_k)[F_k]\, dt. \tag{15}$$

Das ist die gesuchte Verallgemeinerung von (10).

Die Formeln, welche uns zu diesem Resultate führten, dürfen natürlich nur in einem gewissen Gültigkeitsbereich angewendet werden. Wir

müssen also noch einen Bereich feststellen, in dem unser Resultat unbedingt richtig ist.

Die Umgebung (C) der Stelle (S), in der wir die Gleichungen (11) als identisch befriedigt angenommen haben, sei durch

$$|x_i - a_i| < \delta_i, \quad |y_h - b_h| < \varepsilon_h, \quad |y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} - b_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}| < \varepsilon_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}$$

definiert. Für $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ wählen wir solche rationale ganze Funktionen, daß für $x_1 = a_1, \cdots, x_m = a_m$ die Ableitung

$$\frac{d^\nu}{dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_\nu}} \varphi_h(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

gleich $b_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}$ oder Null werde, je nachdem $y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ in $F_1, F_2, \cdots, F_n$ vorkommt oder nicht. Die Anfangswerte der φ_h seien natürlich

$$\varphi_h(a_1, a_2, \cdots, a_m) = b_h.$$

Wir bestimmen nun $\delta_1', \delta_2', \cdots, \delta_n'$ so, daß für

$$|x_1 - a_1| < \delta_1', \quad |x_2 - a_2| < \delta_2', \cdots, |x_m - a_m| < \delta_m'$$

die Ungleichheiten

$$|\varphi_h - b_h| < \frac{\varepsilon_h}{2},$$

$$|\varphi_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} - b_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}| < \frac{\varepsilon_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}{2}$$

bestehen. Definieren wir nun die Umgebung (C') von (S) durch die Ungleichheiten

$$|x_i - a_i| < \delta_i', \quad |y_h - b_h| < \frac{\varepsilon_h}{2}, \quad |y_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)} - b_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}| < \frac{\varepsilon_h^{(i_1 i_2 \cdots i_\nu)}}{2}$$

so gelten in diesem Bereiche für $0 \leqq t \leqq 1$ alle unsere Formeln. Es besitzt also das System

$$F_1, F_2, \cdots, F_n$$

in (C') wirklich das verallgemeinerte kinetische Potential (15).

Budapest, den 8. Juni 1905.

Zur ersten Verteilung des Bolyai-Preises.

(Bericht, der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erstattet.)

Von

GUSTAV RADOS in Budapest.

Hochansehnliche Akademie!

Anläßlich der hundertsten Jahreswende der Geburt von Johann Bolyai hatte die hochansehnliche Akademie — um auch ihrerseits zur Feier dieses denkwürdigen Tages beizutragen — beschlossen, zum Andenken dieses Forschers von unvergänglichem Ruhme sowie seines Vaters und Lehrers Wolfgang Bolyai eine das Symbol der Akademie und das Bild von Budapest zeigende Medaille, sowie ferner einen internationalen Preis von 10000 Kronen zu stiften, der für immerwährende Zeiten die Benennung „Bolyai-Preis der ungarischen Akademie der Wissenschaften" zu führen hat. Im Sinne des Stiftungs-Statutes hat derselbe zum ersten Male im Jahre 1905 zur Verteilung zu gelangen und ist nachher jedes fünfte Jahr dem Autor der hervorragendsten mathematischen Untersuchungen des verflossenen Lustrums zuzuerkennen, ohne Rücksicht auf die Sprache und die Art der Veröffentlichung dieser Untersuchungen. Es hat jedoch auch die Gesamtleistung des mit dem Preis zu krönenden Forschers in Betracht zu kommen. Für die Zuerkennung dieses Preises hat die mathematische und naturwissenschaftliche Klasse der Akademie in der März-Sitzung der Fälligkeitsjahre eine aus zwei internen und zwei auswärtigen Mitgliedern bestehende Kommission einzusetzen, die im Oktober dieses Jahres in Budapest zusammentritt und aus ihrer Mitte ihren Präsidenten und Referenten wählt. Der Präsident ist stimmberechtigt und entscheidet im Falle von Stimmengleichheit durch sein Votum.

Die Akademie hat für das Jahr 1905 eine Kommission eingesetzt, die bestanden hat aus den internen Mitgliedern: Herrn Julius König, Sekretär der mathematischen und naturwissenschaftlichen Klasse, und Gustav Rados, Mitglied derselben Klasse, und aus den zwei auswärtigen Mitgliedern: Herrn Gaston Darboux, secrétaire perpétuel de l'Academie des Sciences de l'Institut de France, und Herrn Felix Klein, Mitglied der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Die Kommission

war am 11. und 12. Oktober zu ihren mündlichen Verhandlungen in Budapest vereint und wählte Herrn Gaston Darboux zum Präsidenten, Herrn Felix Klein zum Referenten.

Der Schluß des von der Kommission aufgenommenen Protokolls lautet:

„Die Kommission konstatierte zuvörderst, daß die neuen Gesichtspunkte, von denen die moderne mathematische Forschung beherrscht wird, eine sehr ansehnliche Zahl von mathematischen Arbeiten zutage gefördert haben, deren hohen Wert die Kommission mit Freude anerkennt; allein gerade dieser Umstand hat die Aufgabe der Kommission auch zu einer äußerst schwierigen gestaltet."

„Die Kommission war überzeugt, den Intentionen der Akademie am besten nachzukommen, indem sie sich entschloß, nur diejenigen Arbeiten in Verhandlung zu ziehen, die auf die *allgemeine* Entwicklung der Mathematik von bedeutendster Einwirkung waren. In diesem Sinne konnte die Kommission sich darauf beschränken, die Werke zweier Forscher in Erwägung zu ziehen, deren Verdienste allseitig anerkannt sind. Es sind dies die Herren David Hilbert und Henri Poincaré."

„Die Kommission hat nun den einhelligen Beschluß gefaßt, den Bolyai-Preis Herrn

HENRI POINCARÉ

zuzuerkennen, indem sie im Sinne des Statutes die Gesamtleistung des Herrn Poincaré in Betracht zog, dessen Untersuchungen bereits im Jahre 1879 einsetzen und sozusagen einen Kreislauf um das Gesamtgebiet der Mathematik vollendet haben, wobei sie der mathematischen Forschung überall neue Gesichtspunkte eröffneten. Die Kommission hat jedoch zu gleicher Zeit beschlossen, um Herrn Hilbert ein ganz besonderes Zeichen ihrer großen Wertschätzung darzubringen, ihren Referenten — entgegen dem herkömmlichen Brauch — damit zu beauftragen, in seinem Berichte der Arbeiten des Herrn David Hilbert in derselben ausführlichen Weise zu gedenken, wie derjenigen des Herrn Poincaré. Denn sie würdigt die universelle Bedeutung derselben im vollen Maße und ist überzeugt, daß sie je länger, je mehr zu einer Rolle von größter Bedeutung berufen sind."

G. Darboux, Präsident.
F. Klein, Referent.
Julius König.
Gustav Rados.

* * *

Im Sinne dieser Beschlüsse hätte Herr Felix Klein als gewählter Referent der Kommission die Werke der Herren Henri Poincaré und David Hilbert in gleicher Weise hinsichtlich ihrer Einwirkung auf die Entwicklung neuer mathematischer Ideen und Methoden des Eingehenden besprechen und würdigen sollen. Leider war Herr Felix Klein infolge seines Schonung heischenden Gesundheitszustandes gezwungen, seine Referentenstelle niederzulegen, und so mußte denn die Kommission und — wie ich hinzufügen darf — das gesamte mathematische Publikum mit lebhaftem Bedauern auf Herrn Kleins Bericht verzichten. Herr Klein hätte mit demselben gewiß in glänzender Weise einen hochbedeutenden Beitrag zur Geschichte der modernen mathematischen Forschung geliefert. Um für den Ausfall des erwarteten Berichtes einigermaßen Ersatz zu schaffen, hat die Bolyai-Kommission mich der unverdienten Ehre teilhaftig gemacht, an Stelle des Herrn Klein zu treten. Angesichts der kurzen Zeit, die mir zum Studium des reichen Materials zur Verfügung gestanden hat, nicht minder aber auch wegen der großen Schwierigkeit der mir zugefallenen Aufgabe, fürchte ich derselben nur in höchst unvollkommener Weise zu entsprechen. Um den gestellten Anforderungen auch nur einigermaßen gerecht zu werden, mußte ich mir von Haus aus die Beschränkung auferlegen, aus der großen Zahl der in Betracht kommenden Leistungen nur diejenigen herauszugreifen, welche gelegentlich der mündlichen Verhandlungen der Kommission als besonders maßgebend hervorgehoben wurden.

Henri Poincaré ist unstreitig im Augenblicke der wirksamste Forscher auf dem Gebiete der Mathematik und mathematischen Physik. Seine scharfausgeprägte Individualität läßt ihn als intuitiven Gelehrten erkennen, der sich die Anregung zu seinen weitausgreifenden Untersuchungen aus dem unerschöpflichen Born geometrischer und physikalischer Anschauungen holt, diese jedoch mit bewundernswerter logischer Schärfe auch ins einzelne zu verarbeiten vermag. Neben glänzender Erfindungsgabe kennzeichnet ihn die Fähigkeit zur kühnen und erfolgreichen Verallgemeinerung mathematischer Beziehungen, die es ihm oft ermöglichte, die Grenzen der Erkenntnis auf den verschiedensten Gebieten der reinen und angewandten Mathematik weit hinaus zu schieben.

Hiervon zeugen gleich seine ersten Arbeiten über die automorphen Funktionen, mit denen er die Reihe jener glänzenden Publikationen eröffnete, die zu den größten mathematischen Leistungen aller Zeiten gezählt werden müssen. In dem Bestreben, für die Lösungen von Differentialgleichungen eindeutige und überall konvergente Darstellungen zu ermitteln, wandte er sich zunächst der einfachsten bis dahin genauer untersuchten Klasse von totalen Differentialgleichungen zu, den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit rationalen oder auch algebraischen

Koeffizienten. Er gelangte hierbei zu neuen Transzendenten, die als weittragende Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen oder auch der elliptischen Modulfunktionen aufgefaßt werden können und hinsichtlich der Lösung von linearen Differentialgleichungen dasselbe leisten, was die elliptischen und Abelschen Thetafunktionen für die Integrale algebraischer Differentiale geleistet hatten. Diese neuen transzendenten Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie sich gegenüber den Transformationen gewisser diskontinuierlicher Gruppen von linear gebrochenen Substitutionen invariant verhalten. Sind in diesen Substitutionen $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ von der Determinante $ad - bc = 1$ alle Koeffizienten reelle Zahlen, so lassen diese die Achse der reellen Zahlen fest. Werden derartige Substitutionen mit einer solchen komponiert, deren Koeffizienten beliebige komplexe Zahlen sind, so lassen die komponierten Substitutionen einen Kreis unverändert. den Poincaré als Fundamentalkreis bezeichnet. Die hierdurch gekennzeichneten Gruppen sind es, die Poincaré Fuchssche Gruppen nennt, während er die allgemeinsten diskontinuierlichen Gruppen von linearen Substitutionen Kleinsche Gruppen benannt hat. Vermittels der Auffassungsweise der nichteuklidischen Maßbestimmung gelang es nun Poincaré, die Beschreibung und Bestimmung der in Frage stehenden Gruppen anschauungsmäßig zu gestalten. Jede dieser Gruppen gibt Anlaß zu einer regulären Gebietsteilung der Ebene oder des Raumes und es kann dem Problem, alle Fuchsschen oder Kleinschen Gruppen aufzustellen, die Wendung gegeben werden, daß alle regulären Gebietseinteilungen der nichteuklidischen Ebene beziehungsweise des nichteuklidischen Raumes zu bestimmen sind. Durch Einführung der sogenannten Zyklen konnte nun Poincaré die möglichen Fundamentalbereiche der Fuchsschen Gruppen in sieben Familien einordnen und schließlich die den jeweiligen Gebietseinteilungen zugehörigen Gruppen auch wirklich aufstellen. Es handelte sich nun ferner um die Lösung des wichtigen Problems, diejenigen eindeutigen Funktionen zu bestimmen, die sich gegenüber den Substitutionen einer Fuchsschen Gruppe invariant verhalten. Es sind dies die von Poincaré sogenannten Fuchsschen Funktionen. Hierbei läßt sich Poincaré wieder durch die Analogie mit den elliptischen Funktionen leiten. Bekanntlich sind die elliptischenThetafunktionen selbst nicht periodisch, sondern verändern sich bei Vermehrung des Argumentes mit einer Periode durch das Hinzutreten eines Exponentialfaktors. Poincaré bildet nun Reihen, an denen die Einwirkung der Transformationen einer Fuchsschen Gruppe schon äußerlich in Evidenz tritt und deren Verhalten dem der elliptischen Thetafunktionen ähnlich ist. Dieselben sind von der Form

$$\Theta(z, H(z)) = \Sigma H\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)(c_i z + d_i)^{-2m}, \qquad (m > 1)$$

wo die Summe über alle Transformationen der Gruppe zu erstrecken ist und H das Zeichen einer beliebigen rationalen Funktion bedeutet. Die durch diese Reihen definierten eindeutigen analytischen Funktionen sind es, die Poincaré als Fuchssche Thetafunktionen bezeichnet. Dieselben genügen der Funktionalgleichung

$$\Theta\left(\frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right) = \Theta(z)\,(c_k z + d_k)^{2m}$$

für jede Substitution $\left(z, \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}\right)$ der vorgelegten Fuchsschen Gruppe. Übrigens muß man zwei Arten von Fuchsschen Gruppen und dementsprechend von Fuchsschen Thetafunktionen unterscheiden. Für die eine ist der Fundamentalkreis eine sogenannte natürliche Grenze und sie existiert nur innerhalb dieses Kreises, für die andere Art finden sich an der Peripherie des Fundamentalkreises nur isolierte singuläre Stellen vor und die Funktionen dieser Art können über diesen Kreis hinweg über die ganze Ebene fortgesetzt werden.

In Analogie zu dem üblichen Ansatze in der Theorie der elliptischen Funktionen stellt nun Poincaré durch Quotienten von Θ-Funktionen gleichen Grades m solche Funktionen her, die gegen alle Transformationen der vorgelegten Fuchsschen Gruppe unempfindlich bleiben. Es sind dies die Fuchsschen Funktionen, für die nun analoge Gesetze gelten, wie für die elliptischen Funktionen. Die Zahl der Null- und Unendlichkeitsstellen innerhalb eines Fundamentalpolygons ist die gleiche. Zwei Fuchssche Funktionen derselben Gruppe sind stets durch eine algebraische Gleichung verbunden, deren Geschlecht mit dem anschauungsmäßig definierten Geschlechte der Gruppe übereinstimmt. So ist ein Anknüpfungspunkt an die Theorie der algebraischen Funktionen gegeben, den Poincaré in erfolgreicher Weise zum Beweise des wichtigen Satzes benützt: Die Koordinaten der Punkte einer beliebig vorgelegten algebraischen Kurve können stets als eindeutige Funktionen eines Parameters dargestellt werden. Als ähnlich wirksames Instrument der Untersuchung haben sich die Fuchsschen Funktionen für die Theorie der Abelschen Integrale erwiesen, für deren Reduzibilität auf Integrale niedereren Geschlechte Poincarés Untersuchungen als diejenigen zu erwähnen sind, die in das Wesen der Frage aufs tiefste eindringen.

Durch die Einführung der sogenannten Fuchsschen Zetafunktionen, die als Quotienten einer Reihe mit rationalen Gliedern und einer Θ-Reihe definiert werden, gelang es Poincaré schließlich, zu beweisen daß vermittels dieser neuen Transzendenten die Lösungen von linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten algebraische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, in analoger Weise ausgedrückt werden können, wie

etwa die Integrale von algebraischen Differentialen durch Abelsche Θ-Funktionen.

Hiermit hatte Poincaré für das Studium der automorphen Funktionen und deren Anwendungen ein weites Feld eröffnet und durch die Klarlegung des Zusammenhanges dieser Theorie mit derjenigen der linearen Differentialgleichungen die letztere mit neuen und fruchtbaren Methoden bereichert.

Von Poincarés weiteren funktionentheoretischen Untersuchungen sei ferner die Abhandlung «Sur un théorème de la théorie générale des fonctions» (Bulletin de la Société mathématique de France 1883) hervorgehoben. Es handelte sich hier darum, allgemein die Theorie der mehrdeutigen analytischen Funktionen auf diejenige der eindeutigen Funktionen zurückzuführen. In der Tat ist es Poincaré gelungen, den folgenden grundlegenden Satz von großer Allgemeinheit aufzustellen: Ist y eine beliebige mehrdeutige analytische Funktion von x, so kann man stets eine Veränderliche z von der Art bestimmen, daß x und y als eindeutige Funktionen derselben dargestellt werden können.

Es sei hier ferner der wichtigen Arbeit Poincarés gedacht, die sich auf das Laguerresche Geschlecht von transzendenten ganzen Funktionen bezieht und deren Hauptsätze für die transzendente ganze Funktion $f(x) = \Sigma A_n x^n$ vom Geschlechte p die Wachstumseigenschaft $|f(x)| < e^{|x|^{p+1}}$ und für die Koeffizienten die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} A_n (n!)^{\frac{1}{p+1}} = 0$$

liefern, die in späteren wichtigen Untersuchungen eine Rolle spielen.

Für die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen war es von großer Bedeutung, die Frage zu beantworten, von welcher Mächtigkeit die Menge der Funktionswerte einer mehrdeutigen analytischen Funktion an einer beliebigen Stelle ihres Bereiches sein möge. Poincaré hat nun bewiesen, daß die vollständige Bestimmung einer analytischen Funktion stets durch eine abzählbare Menge von Funktionselementen bewirkt werden kann, und daß demnach die Menge der Funktionswerte an einer beliebigen Stelle ihres Bereiches auch abzählbar ist.

Daß die Verwendung von divergenten Reihen unter gewissen Voraussetzungen als legitimes Mittel mathematischer Forschung wieder wirksam wurde, ist vornehmlich dem Umstande zuzuschreiben, daß sich Poincaré der von ihm als asymptotisch bezeichneten Darstellungen sowohl gelegentlich seiner Untersuchungen über die irregulären Lösungen von linearen Differentialgleichungen als auch in seiner berühmten Abhandlung «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique» im reichlichsten Maße bediente und damit zu ähnlichen Untersuchungen die Anregung gegeben hat.

Eine neue Wendung gab er auch der Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten Zahlen durch den Hinweis auf den Zusammenhang derselben mit Lies Gruppentheorie, wodurch die Theorie der komplexen Zahlen in ganz neuem Lichte erscheint und an die Lösung ihrer Grundprobleme mit den Hilfsmitteln der Gruppentheorie herangetreten werden konnte.

Erwähnt sei noch die Theorie linearer Gleichungssystemen von unbegrenzt vielen Gleichungen mit unbegrenzt vielen Unbekannten, in welcher Poincaré, als erster, allgemeine Konvergenzkriterien für die auftretenden unendlichen Determinanten gab.

Ich muß noch in Kürze derjenigen Arbeiten Poincarés gedenken, die den Boden für den Ausbau einer allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen vorbereiten. Hier ist zuerst seine Abhandlung «Sur les résidus des intégrales doubles» zu nennen. Zwischen der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen und derjenigen von mehreren Veränderlichen zeigen sich schon in den Anfangsgründen tiefreichende Unterschiede. Die direkte Übertragung von Sätzen der einen Theorie auf die andere gelang bisher in den seltensten Fällen. Poincaré hat nun gezeigt, auf welche Weise die grundlegenden Cauchyschen Residuensätze für mehrfache Integrale ausgesprochen werden können, und wendet dieselben auf das Studium der Periodizitätsmoduln der mehrfachen Integrale und der Abelschen Thetafunktionen an.

In diesem Zusammenhange seien noch seine Untersuchungen auf dem Gebiete der Analysis situs von höheren Mannigfaltigkeiten hervorgehoben (1895—1904). Er gelangt hierbei u. a. zu dem wichtigen Resultat, daß eine Mannigfaltigkeit höherer Dimension durch die Angabe der Bettischen Zusammenhangszahlen allein im Sinne der Analysis situs noch nicht bestimmt ist, vielmehr lassen sich zu einem System von Bettischen Zahlen noch unendlich viele Mannigfaltigkeiten bilden, die nicht ineinander deformierbar sind. Insbesondere ist hier zu erwähnen die Ausdehnung des Eulerschen Polyedersatzes auf Polyeder von beliebiger Dimension und beliebigem Zusammenhang.

Poincaré war es, der als erster für das folgende Weierstraßsche Theorem einen Beweis geführt hat: Ist eine analytische Funktion von zwei komplexen Variabeln überall meromorph, so kann sie stets als Quotient von zwei ganzen Funktionen derselben Variabeln dargestellt werden.

Ferner sei noch einer bemerkenswerten Verallgemeinerung des Abelschen Theorems gedacht, die folgendermaßen ausgesprochen werden kann: Sind $(x_1, y_1, z_1), \cdots, (x_q, y_q, z_q)$ die Koordinaten der Schnittpunkte einer algebraischen Fläche mit einer algebraischen Raumkurve C, sind ferner

$(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i)$ die Koordinaten der Schnittpunkte einer der C benachbarten Raumkurve C', so besteht eine Anzahl von Beziehungen

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_q dx_q = 0,$$

wobei die X_i rationale Funktionen der x, y, z sind.

Es mögen noch seine Untersuchungen über das Verschwinden der Abelschen Thetafunktionen, sein Beweis für die Darstellung der Abelschen Funktionen durch Thetaquotienten und schließlich die Verallgemeinerung des Satzes von der Residuensumme der elliptischen Funktionen auf Abelsche hervorgehoben werden (1902).

Auch die Theorie der allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichungen hat durch Poincarés Untersuchungen eine Bereicherung erfahren. Ich denke hierbei in erster Linie an jene topographischen Untersuchungen der Lösungen von Differentialgleichungen, die gewissermaßen eine qualitative Analyse der Integrale noch vor deren Ermittelung zulassen. Diese lange Reihe von Untersuchungen, mit denen Poincaré seine Arbeit über das Dreikörperproblem gewissermaßen vorbereitet hat, sind vermöge der Fülle der enthaltenen Resultate noch zu einer bedeutungsvollen Rolle berufen.

Von Poincarés zahlentheoretischen Arbeiten sei zuvörderst seine Abhandlung «Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies» erwähnt, in der er zunächst eine Arithmetik der Gittersysteme (réseaux) entwickelt und vermittels derselben die Äquivalenztheoreme und die Gaußsche Theorie der Komposition von quadratischen Formen in sinnreicher Weise geometrisch darstellt. Die Übertragung der hier entwickelten Methoden auf Mannigfaltigkeiten von höheren Dimensionen führte ihn später zu einer interessanten Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus. Zu erwähnen sind ferner seine Arbeiten über arithmetische Invarianten, die er durch Reihen und Integrale darstellt und auf die Erledigung von Äquivalenzfragen anzuwenden weiß. Durch die Betrachtung derjenigen diskontinuierlichen Gruppen von linearen Substitutionen, die eine ternäre indefinite quadratische Form unverändert lassen, gewinnt er einen Anschluß an die Theorie der automorphen Funktionen. Jede dieser Gruppen ist mit einer speziellen Fuchsschen Gruppe isomorph. Die zu dieser Fuchsschen Gruppe gehörigen sogenannten arithmetischen Fuchsschen Funktionen zeichnen sich dadurch aus, daß sie ein Additionstheorem besitzen, was bei allgemeinen Fuchsschen Funktionen nicht der Fall ist. Die mannigfachen Beziehungen, die zwischen arithmetischen Fuchsschen Funktionen bestehen, eröffnen der Zahlentheorie und Algebra ein aussichtsreiches Feld für neue Untersuchungen. Algebraisch-arithmetischen Charakters sind seine Arbeiten über die Äquivalenz von Formen höherer Ordnung, die als wesentliche Weiterführung der bezüglichen Hermiteschen und Jordanschen Untersuchungen zu betrachten sind.

Ich gehe nun über zu den Arbeiten Poincarés, die sich auf Probleme der Mechanik und theoretischen Physik beziehen. Als bedeutendste in dieser Reihe ist an erster Stelle seine große preisgekrönte Abhandlung «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique» (Acta Mathematica Bd. XIII, 1890) zu erwähnen. Angesichts der großen Schwierigkeiten, die sich der Integration der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems entgegenstellen, haben auch Poincarés Untersuchungen im wesentlichen nur zu negativen Resultaten geführt. Aber als großes Verdienst ist es ihm anzurechnen, daß er auf die Unzulänglichkeit der heutigen mathematischen Methoden für die Lösung des Problems nicht bloß hingewiesen, sondern dieselbe auch bewiesen hat. Es gelang ihm, mit voller Strenge den Nachweis zu führen, daß es außer den bekannten Integralen des Problems keine weiteren eindeutigen analytischen Integrale geben könne, so daß die Lösung des Problems ganz andere Hilfmittel erheischt, als diejenigen, über die wir heute verfügen. Einer eingehenden Untersuchung unterzieht er den speziellen Fall des Problems, in welchem die Masse A groß, B klein und C unendlich klein angenommen wurden und A und B Kreisbewegungen ausführen. Er führt zur Behandlung die auch mathematisch höchst fruchtbaren Methoden der Integralinvarianten, variierten Differentialgleichungen, charakteristischen Exponenten, periodischen und asymptotischen Lösungen ein, und es gelingt ihm, für den erwähnten Spezialfall nachzuweisen, daß im Falle, daß AC endlich bleibt, die Massen A, B, C ihren ursprünglichen Positionen unendlich oft wieder beliebig nahe kommen. Überdies ist die bewundernswerte Abhandlung reich an weittragenden Prinzipien für die praktische Erledigung der Probleme der himmlischen Mechanik, die heute auch der praktische Astronom anerkennt.

Von nicht geringerer Wichtigkeit ist seine folgenreiche Abhandlung «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation» (1885). Für das alte klassische Problem der Gleichgewichtsformen rotierender Flüssigkeiten schafft hier Poincaré eine äußerst sinnreiche neue Theorie. Nach der Einführung der sogenannten Bifurkations- und Grenzformen, der Stabilitäts-Koeffizienten, sowie nach einer höchst interessanten neuen Begründung der Theorie Laméscher Funktionen, gelingt es ihm nicht allein den Beweis für die Existenz der von Mathiessen und W. Thomson angegebenen Gleichgewichtsformen zu führen, sondern auch die Existenz von unendlich vielen anderen nachzuweisen. Insbesondere sei hier die durch Poincaré als pyriforme (birnenförmig) bezeichnete Gleichgewichtsfigur erwähnt, die zu bekannten kosmogenetischen Untersuchungen Anlaß geboten hat. Betreffs der Stabilität der Gleichgewichtsformen hat sich durch die Diskussion der Vorzeichen der Stabilitäts-Koeffizienten folgendes Resultat ergeben. Rotationsellipsoide, die weniger abgespaltet sind als das

Jacobische Ellipsoid E, falls dasselbe auch ein Rotationsellipsoid ist, sind stabile Gleichgewichtsfiguren. Die dreiachsigen Ellipsoide sind stabil, wenn sie länglich sind. Diese Resultate bestehen auch für den Fall, daß eine Viskosität vorhanden ist. Rotationsellipsoide, deren Abplattung größer als diejenige von E ist, sind nur für reibungslose Flüssigkeiten stabile Gleichgewichtsfiguren.

Zu erwähnen ist hier ferner die Abhandlung «Sur les équations aux derivées partielles de la physique mathématique» (1886). Eine große Anzahl von Problemen der theoretischen Physik hat auf die Laplacesche oder ähnliche partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung geführt. Trotz der großen Mannigfaltigkeit der vorkommenden Grenzbedingungen läßt das Wesen und die Behandlung dieser Probleme sozusagen einen gewissen gemeinschaftlichen Familienzug erkennen, so daß man auch für die Lösungen dieser Probleme eine Anzahl von gemeinschaftlichen Eigenschaften zu erwarten hat. Ein hervorstechender gemeinschaftlicher Zug zeigt sich unglücklicherweise in den enormen Schwierigkeiten, die sich bei dem Existenzbeweis der Lösungen einstellen. Poincaré unternimmt es in dieser Abhandlung, diese Schwierigkeiten für eine Reihe dieser Probleme zu bekämpfen. So gelangt er hinsichtlich der Lösung des Dirichletschen Problems zu seiner äußerst originellen «méthode du balayage». In der gleichen ausführlichen Weise hat noch Poincaré das von Fourier herrührende Probleme der Erkaltung eines Körpers behandelt.

Im engen Zusammenhang hiermit steht seine Abhandlung «Sur les équations de la physique mathématique» (1894), in welcher er eine Reihe der schwierigsten und bedeutendsten Probleme der mathematischen Physik der Lösung zuzuführen vermag. Das Problem der Schwingungen einer gespannten Membran, die Elastizitätstheorie, die Fouriersche Theorie der Wärmeleitung und auch noch zahlreiche andere Probleme der mathematischen Physik führen gleicherweise auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \xi v + f = 0,$$

in welcher ξ eine Konstante, f aber eine gegebene Funktion der Koordinaten bedeutet. Poincaré behandelt insbesondere die allgemeine Randwertaufgabe: Es soll v als Funktion der Koordinaten derart bestimmt werden, daß es die Gleichung (I) befriedigt, nebst seinen ersten und zweiten Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes kontinuierlich ist und an den Stellen der Grenzfläche desselben Gebietes die Bedingung

$$\frac{dv}{dn} + bv = 0$$

erfüllt, wobei $\frac{dv}{dn}$ den Differentialquotienten nach der Normale, b aber eine Konstante bedeutet.

Durch äußerst scharfsinnige Anwendung von Methoden, die teils von Schwarz und teils von C. Neumann herrühren, gelingt ihm die strenge Lösung des Problemes für die überwiegende Zahl von Fällen. Hervorzuheben sind hierbei die Reihe von an sich bedeutenden Hilfssätzen, die sich auf Integrale von der Form $\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau$ beziehen und die Poincaré als wirkungsvolles Instrument seiner Untersuchung anzuwenden verstanden hat.

In diesem Zusammenhange möge noch seine Abhandlung «La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet» hervorgehoben werden. Bekanntlich hat C. Neumann eine Methode entwickelt, vermittels deren man eine harmonische Funktion innerhalb eines Gebietes durch konvergente Ausdrücke darstellen kann, falls ihre Werte für alle Stellen der überall konvexen Grenzfläche dieses Gebietes gegeben sind. Poincaré gelang es nun, die Neumannsche Methode auf Begrenzungsflächen zu erweitern, die in allen Punkten eine bestimmte Tangentialebene und zwei bestimmte Hauptkrümmungsradien besitzen, im übrigen aber hinsichtlich ihrer Gestalt beliebig gegeben sind. Von besonderer Wichtigkeit sind hier Poincarés Entwicklungen, die sich auf die sogenannten Fundamentalfunktionen beziehen. Zu jeder Begrenzungsfläche gehört eine unendliche Reihe solcher Fundamentalfunktionen, die für kugelförmige Begrenzungsflächen in die bekannten Kugelfunktionen übergehen. Poincaré bemerkt, daß eine willkürliche Funktion sich nach Fundamentalfunktionen entwickeln lasse, wobei die Entwicklungskoeffizienten durch mehrfache Integrale ausgedrückt werden, die über diejenige Fläche zu erstrecken sind, der die Fundamentalfunktionen angehören. Sind diese Fundamentalfunktionen einer Fläche bekannt, so kann das Dirichletsche Problem sowohl für den Innenraum als den Außenraum der Fläche ohne Schwierigkeit gelöst werden.

Erwähnt sei noch die stattliche Reihe von Büchern, mit denen Poincaré die mathematische Literatur bereichert hat. Besonders seien die Werke: Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Leçons de Mécanique céleste (1905), La théorie de Maxwell et ces oscillations hertziennes, La télégraphie sans fil und La Science et l'Hypothèse (1902) hervorgehoben, ferner auch seine Cours de physique mathématique: Théorie mathématique de la lumière (1887, auch ins Deutsche übertragen); Electricité et Optique (1890, auch übersetzt); Thermodynamique (1890); Théorie de l'élasticité (1890); Théorie des tourbillons (1891); Les oscillations electriques (1892); Capillarité (1895); Théorie analytique de la propagation de la chaleur (1895); Calcul des Probabilités (1897); Cinématique et

mécanismes (1899); Théorie du potentiel newtonien (1899); Figures d'équilibre d'une masse fluide (1902).

Ich habe in meinen bisherigen Ausführungen nur eines geringen Bruchteiles von den mehr als 300 Publikationen Poincarés flüchtig gedenken können; ich glaube jedoch, daß auch schon aus dem Angeführten klar hervorgeht, welch' beherrschende Stellung wir Poincarés Leistungen in der mathematischen Literatur zuerkennen müssen, deren Entwicklung er durch eigenes Forschen nahezu auf allen Gebieten auf das wirksamste gefördert, überall aber durch die Fülle der durch ihn ersonnenen neuen Ideen und Methoden weitgehend befruchtet hat, so daß er sich würdig jenen großen französischen Mathematikern anschließt, in deren Reihen die Namen Laplace, Galois, Cauchy, Hermite von unvergänglichem Glanze sind.

Zum Schlusse sei mir noch gestattet, seines letzterschienenen Werkes «Sur la Valeur de la Science» (1905) zu gedenken, in welchem er gewissermaßen das Glaubensbekenntnis des Gelehrten niedergelegt hat.

Ich möchte aus diesem hochinteressanten Buche eine Stelle wörtlich zitieren, an der er den Gegensatz anschauungsmäßiger und logischer Denkweise des Näheren ausführt. Bezüglich der Logiker meint nun Poincaré: «En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible, ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cette appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares!»

Einer dieser Bewundernswerten und Seltenen ist David Hilbert, der Meister der logischen Analyse in der Mathematik. Mit glänzender logischer Kombinationskraft begabt, schafft er aus sich selbst heraus, lediglich durch die Verallgemeinerung, durch das Trennen und Verknüpfen, durch das Sammeln von mathematischen Begriffen, so daß eine äußere, durch Anschauung vermittelte Anregung gar nicht erkennbar wird.

Logische Strenge und Schlichtheit der Beweisführung gelten ihm als adäquate Anforderungen, und er ist davon überzeugt, daß logische Schärfe — richtig erfaßt — niemals zur Sterilisierung, sondern vielmehr stets zur fruchtbaren Weiterentwicklung mathematischer Ideen führen müsse. Er wendet sich in seinen Forschungen mit Vorliebe den schwierigsten, lange Zeit unerledigt gebliebenen Problemen zu, deren Kern er mit bewundernswertem Scharfsinn so zu erfassen vermag, daß seine Betrachtungen nicht allein diese Probleme vollständig erledigen, sondern oft auch der ganzen Disziplin, der diese Probleme angehörten, einen Abschluß geben.

Von diesem Charakter sind schon seine ersten großen Abhandlungen, in denen Hilbert eine Begründung für den Fundamentalsatz der Invariantentheorie entwickelt. Diesen Satz hatte Gordan für den Fall von Systemen

binärer Grundformen bewiesen; die Methoden, die er hierbei angewendet hat, versagten jedoch in den Fällen, wo die Grundformen mehr als zwei Veränderliche enthalten, oder auch dann, wenn die Grundformen mehrere Reihen von zwei Veränderlichen enthalten, die verschiedenen linearen Transformationen unterliegen. Um sich die Mittel für den lange gesuchten Beweis des allgemeinen Theorems zu schaffen, stellt Hilbert eine ganz neue Theorie der Modulsysteme von Formen voran, in welcher er Sätze von der größten Bedeutung entwickelt. Ein bereits klassisch gewordenes, tief erdachtes Theorem bildet hierzu den Ausgangspunkt. Es lautet wie folgt: Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, \cdots$, so gibt es stets eine Zahl m von der Art, daß jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 \cdots + A_m F_m$$

bringen läßt, wo $A_1, A_2, \cdots, A_m$ geeignete Formen der nämlichen Veränderlichen sind mit Koeffizienten, die demselben Rationalitätsbereiche angehören wie diejenigen der F. Diesem Satz gab er auch eine arithmetische Verfeinerung, indem er seine Gültigkeit für den Fall erweisen konnte, daß den auftretenden Koeffizienten die Beschränkung, ganze rationale Zahlen zu sein, auferlegt wird. Für die Modultheorie haben diese Sätze die Bedeutung, daß man aus den Formen eines Moduls stets eine endliche Anzahl von Formen so auswählen kann, daß jede andere Form des Moduls durch eine lineare Kombination jener ausgewählten Formen darstellbar ist. In geometrischer Deutung heißt das so viel, daß sich durch eine gegebene algebraische Raumkurve stets eine endliche Zahl von Flächen

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \cdots, F_m = 0$$

hindurchlegen lasse derart, daß jede andere die Kurve enthaltende Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = 0$$

dargestellt werden kann, wo unter $A_1, \cdots, A_m$ quaternäre Formen zu verstehen sind.

Im weiteren Verlauf dieser Untersuchungen wendet sich Hilbert dem Studium gewisser Systeme von linearen Diophantischen Gleichungen zu, aus deren Lösungen er die sogenannten abgeleiteten Systeme bildet, und durch äußerst scharfsinnige Betrachtungen gelangt er zu folgendem abschließenden Resultat: Ist das Gleichungssystem

$$F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \cdots + F_{tm} X_m = 0$$
$$(t = 1, 2, \cdots, m)$$

vorgelegt, worin $F_{t1}, \cdots, F_{tm}$ gegebene Formen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bedeuten, so führt die Aufstellung der Relationen zwischen den Lösungen desselben

zu einem zweiten Gleichungssystem von derselben Gestalt, zum sogenannten abgeleiteten System, das wiederum ein abgeleitetes System liefert u. s. f. Das so begonnene Verfahren erreicht nun immer (spätestens beim n-ten abgeleiteten System, das sicher keine Lösung mehr hat) ein Ende. Durch die Kette von abgeleiteten Gleichungssystemen gewinnt Hilbert einen tiefen Einblick in die algebraische Struktur des Modulsystems $(F_1, F_2, \cdots, F_m)$ und ist in den Stand gesetzt, die Anzahl derjenigen Bedingungen zu ermitteln, welche die Koeffizienten einer Form von der R-ten Ordnung zu erfüllen haben, um nach dem Modulsystem $(F_1, F_2, \cdots, F_m)$ der Null kongruent zu sein. Die Anzahl der voneinander linear unabhängigen Bedingungen $\chi(R)$ stellt Hilbert durch die bemerkenswerte Formel

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \cdots + \chi_d \binom{R}{d} \qquad d < n$$

dar, wo $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_d$ gewisse dem Modulsystem $(F_1, F_2, \cdots, F_m)$ eigentümliche ganze Zahlen bedeuten und übrigens R oberhalb einer bestimmten Grenze genommen werden muß, ferner die Symbole $\binom{R}{k}$ Binomialkoeffizienten bezeichnen. Diese ganzzahlige Funktion $\chi(R)$ nennt Hilbert die charakteristische Funktion des Moduls und beweist den für die Modultheorie wichtigen Satz, daß die Summe der charakteristischen Funktionen zweier Modulsysteme stets gleich ist der Summe, die aus den charakteristischen Funktionen des größten gemeinsamen und des kleinsten enthaltenden Modulsystems gebildet wird.*) Nebenbei ist es von Interesse zu bemerken, daß die Koeffizienten $\chi_0, \cdots, \chi_d$ mit den von Nöther definierten Geschlechtszahlen der durch das Modulsystem definierten Raumkurve auf das engste zusammenhängen.

Mittels dieser Sätze und eines Satzes über den Ω-Prozeß, dessen wesentlicher Inhalt von Gordan und Mertens herrührt, gelingt es nun Hilbert, den Fundamentalsatz der Invariantentheorie unter den allgemeinsten

*) Sind $(F_1, F_2, \cdots, F_m)$ und $(H_1, H_2, \cdots, H_h)$ zwei Moduln, und ist für die Gleichung

$$F_1 X_1 + \cdots + F_m X_m = H_1 Y_1 + \cdots + H_h Y_m$$

das volle Lösungssystem

$$X_1 = F_{1s},\ X_2 = F_{2s}, \cdots, X_m = F_{ms},$$
$$Y_1 = H_{1s},\ Y_2 = H_{2s}, \cdots, Y_h = H_{hs}$$
$$(s = 1, 2, \cdots, k)$$

und bildet man die Formen

$$K_s = \sum_{i=1}^{m} F_i F_{is} = \sum_{j=1}^{h} H_j H_{js},$$

so ist $(K_1, K_2, \cdots, K_s)$ der kleinste enthaltende Modul, während bekanntlich $(F_1, F_2, \cdots, F_m;\ H_1, H_2, \cdots, H_h)$ als der größte gemeinsame Modul bezeichnet wird.

Voraussetzungen nachzuweisen. Derselbe lautet in Hilberts Formulierung wie folgt. Ein System von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen, welche in vorgeschriebener Weise gleichen oder verschiedenen Transformationen unterliegen, hat stets eine endliche Zahl von ganzen und rationalen Invarianten, durch welche sich jede andere ganze und rationale Invariante in ganzer und rationaler Weise ausdrücken läßt.

Das gleiche gilt von den Kovarianten, Kombinanten und Kontravarianten, da diese Bildungen sich unter den Invariantenbegriff zusammenfassen lassen.

Versteht man unter einer irreduziblen Syzygie eine solche Relation zwischen den Invarianten des Grundformensystems, deren linke Seite nicht durch lineare Kombination von Syzygien niederer Art erhalten werden kann, so bestehen die beiden abschließenden Sätze Hilberts:

Ein endliches System von Invarianten besitzt nur eine endliche Zahl von irreduziblen Syzygien.

Die Systeme irreduzibler Syzygien verschiedener Arten bilden eine Kette abgeleiteter Gleichungssysteme, die spätestens beim $(m+1)$-ten Glied abbricht, wenn m die Zahl der Invarianten des vollen Systems bezeichnet.

Nachdem Hilbert die Existenz des vollen Invariantensystemes nachgewiesen hatte, war nun das Problem gegeben, die wirkliche Aufstellung desselben auf eine endliche Anzahl, von Beginn der Rechnung übersehbarer Prozesse zurückzuführen. Hilbert gab nun seinen Untersuchungen eine merkwürdige Wendung, die die ganze Invariantentheorie in neuem Lichte erscheinen läßt. Es kann nämlich die Invariantentheorie der Theorie der algebraischen Funktionenkörper derart untergeordnet werden, daß sie lediglich als bemerkenswertes Beispiel für diese Theorie erscheint, etwa so, wie in der Zahlentheorie der Kreisteilungskörper heute nur mehr als Beispiel unter den allgemeinen Zahlkörpern gelten kann, an dem die Sätze der allgemeinen Zahlkörper zuerst erkannt wurden. Hilbert führt nun den Nachweis dafür, daß sich zu jedem Grundformensystem stets ein algebraischer Funktionenkörper konstruieren lasse, dessen ganze algebraische Funktionen genau mit den ganzen rationalen Invarianten des vorgelegten Grundformensystems übereinstimmen. Dies ist der Invariantenkörper. Unter Heranziehung des Kroneckerschen fundamentalen Theorems über das Fundamentalsystem eines Körpers ist es nun klar, daß nach der Kenntnis des Invariantenkörpers zur Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung elementarer Aufgaben aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen nötig ist.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung beweist Hilbert einen Satz, der sich den früher erwähnten schönen Theoremen über Modulsysteme würdig anreiht, und den ich seiner Wichtigkeit und vielseitigen Verwend-

barkeit wegen besonders hervorheben möchte. Derselbe lautet: Sind m ganze rationale homogene Funktionen $f_1, f_2, \cdots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ vorgelegt und sind ferner $F, F', F'', \cdots$ irgendwelche ganze rationale homogene Funktionen von $x_1, x_2, \cdots, x_n$, von der Beschaffenheit, daß sie für alle diejenigen Wertsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche die vorgelegten m Funktionen $f_1, f_2, \cdots, f_m$ sämtlich gleich Null sind, dann ist es stets möglich, eine ganze Zahl r zu bestimmen derart, daß jedes Produkt $\Pi^{(r)}$ von beliebigen r Funktionen der Reihe $F, F', F'', \cdots$ dargestellt werden kann in der Gestalt

$$\Pi^{(r)} = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \cdots, a_m$ geeignet gewählte ganze rationale homogene Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sind. Dieser Satz, den Hilbert in einer späteren Arbeit in sinnreicher Weise zu einem überaus einfachen Beweis eines Dedekindschen Theorems über hyperkomplexe Zahlen angewendet hat, bildet den Kern der ganzen Theorie der algebraischen Invarianten. Die weitere Theorie wird auf die Bestimmung der sogenannten Nullformen aufgebaut, d. h. von Formen, deren Koeffizienten solche numerische Werte besitzen, daß alle ihre Invarianten verschwinden. Eine jede dieser Nullformen kann durch eine unimodulare Substitution auf eine kanonische Form gebracht werden, und die Aufgabe alle Nullformen aufzustellen ist somit auf die Bestimmung aller kanonischen Nullformen zurückgeführt. Die hierzu notwendige Lösung von Diophantischen Ungleichungen geschieht am besten auf graphischem Wege. Für die Aufstellung des vollen Invariantensystems gibt Hilbert schließlich das folgende Verfahren an:

1. Man stelle ein System S_1 von Invarianten auf, durch welche sich alle anderen Invarianten der Grundform als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen; ein derartiges System S_1 erhält man, indem man solche Invarianten auswählt, deren Verschwinden überhaupt das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat.

2. Man stelle ein System S_2 von Invarianten auf, durch welche sich alle übrigen Invarianten rational ausdrücken lassen.

3. Man berechne ein vollständiges ganzes System von ganzen algebraischen Funktionen in dem durch die Systeme S_1 und S_2 bestimmten Funktionenkörper. Die Funktionen dieses Systems S_3 sind Invarianten und bilden, zusammengenommen mit den Invarianten S_1, das gesuchte volle Invariantensystem.

Von diesen drei Aufgaben ist die erste die schwierigste; sie wird gelöst, indem man, wie bereits erwähnt wurde, solche Invarianten ermittelt, deren Verschwinden notwendig das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat; zu ihrer Ermittelung genügt es, alle diejenigen Invarianten

in Betracht zu ziehen, deren Gewicht eine gewisse Zahl nicht übersteigt. Übrigens zeigt Hilbert, daß das volle System der Invarianten auch ohne Kenntnis eines Systems S_2 aufgestellt werden könne.

Hilberts Arbeiten haben somit für alle wesentlichen und bis dahin ungelösten Fragen der Invariantentheorie die langgesuchte Erledigung in der vollkommensten Weise gebracht, so daß dank denselben die Lehre von den Invarianten hinsichtlich der theoretischen Fragen als abgeschlossen betrachtet werden kann.

Ich wende mich nun den arithmetischen Untersuchungen Hilberts zu. Die Zahlentheorie hat vermöge der Schlichtheit ihrer Grundlagen, der Exaktheit ihrer Begriffe, der methodischen Reinheit ihrer Schlüsse von jeher als Muster für alle anderen mathematischen Disziplinen gegolten, hat jedoch zu ihrer Beherrschung und Förderung ein großes Abstraktionsvermögen zur unerläßlichen Voraussetzung. Wir können uns daher nicht wundern, daß sie auf Hilbert, den abstrakten Denker, auch ihren Zauber ausübte und ihn zu tiefgehenden Untersuchungen anreizte. Ich führe seine eigenen Worte an, die sein Empfinden hierfür am klarsten zum Ausdruck bringen. „Die Theorie der Zahlkörper ist wie ein Bauwerk von wunderbarer Schönheit und Harmonie; als der am reichsten ausgestattete Teil dieses Bauwerkes erscheint mir die Theorie der Abelschen und relativ-Abelschen Körper, die uns Kummer durch seine Arbeiten über die höheren Reziprozitätsgesetze und Kronecker durch seine Untersuchungen über komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen erschlossen haben. Die tiefen Einblicke, welche die Arbeiten dieser beiden Mathematiker in die genannte Theorie gewähren, zeigen uns zugleich, daß in diesem Wissensgebiete eine Fülle der kostbarsten Schätze verborgen liegt, winkend als reicher Lohn dem Forscher, der den Wert solcher Schätze kennt und die Kunst, sie zu gewinnen, mit Liebe betreibt.“*) Diesen schönen Worten Hilberts haben wir nur hinzuzufügen, daß Hilbert selbst es ist, dem es gelang, die tiefstverborgenen und kostbarsten dieser Schätze zu heben. Von seinen arithmetischen Untersuchungen sei als erste „Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper“ (1896) erwähnt. Kronecker hatte schon im Jahre 1853 den fundamentalen Satz aufgestellt, daß die Wurzeln aller Abelschen Gleichungen im Bereiche der rationalen Zahlen sich durch Einheitswurzeln ausdrücken lassen. Lange Zeit blieb dieser fundamentale Satz unbewiesen und erst nach 30 Jahren hatte für denselben H. Weber unter Heranziehung von transzendenten Hilfsmitteln einen äußerst schwierigen Beweis erbracht. Hilbert liefert nun mit Hilfe einer Reihe durch ihn eingeführter Begriffsbildungen und

*) Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht von D. Hilbert 1897.

unter Anwendung des Diskriminantensatzes von Minkowski einen einfachen arithmetischen Beweis dieses Satzes, aus dem zugleich ersichtlich wird, auf welche Weise man alle Abelschen Körper von gegebener Gruppe und Diskriminante aufstellen kann.

Ich muß des ferneren seines schon früher zitierten Berichtes „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper" gedenken. Es ist dies ein Bericht über die Entwicklungsgeschichte der Theorie der algebraischen Zahlkörper, der infolge seiner klaren Anordnung, der präzisen Beweisführung als Musterbild einer Zusammenfassung gelten kann, hierüber hinaus aber vermöge der Fülle in demselben zuerst veröffentlichter neuer Begriffsbildungen und Methoden als wesentliche Weiterführung der Theorie der algebraischen Zahlkörper zu betrachten ist. Relativkörper, Relativnorm, Relativdiskriminante, Verzweigungskörper usw. sind alles von Hilbert herrührende Begriffsbildungen, die hier zuerst im systematischen Zusammenhang entwickelt wurden. Als besonders folgenreich hat sich die von Hilbert hier entwickelte Theorie des Kummerschen Zahlkörpers erwiesen, ferner die Bildung des Begriffs der Normenreste dieses Körpers. Mittels dieses Begriffes gelingt es, das allgemeine Reziprozitätsgesetz für Potenzreste durch die Formel

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

darzustellen, wo $\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{w}}\right)$ eine gewisse Einheitswurzel bedeutet und das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers zu erstrecken ist.

In seiner Abhandlung „Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper" hat er die Theorie der quadratischen Reste für den Fall entwickelt, daß der Grundkörper k imaginär und von ungerader Klassenzahl ist. Als wichtigstes Resultat dieser Untersuchungen kann das Reziprozitätsgesetz in k gelten und jener Satz, demzufolge in einem relativ-quadratischen Körper stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten ist, und der als Verallgemeinerung der bekannten Sätze von Gauß gelten kann.

In seiner wichtigen Abhandlung „Über die Theorie der relativ-Abelschen Körper" wird die Gültigkeit dieser Sätze auf beliebige Körper k ausgedehnt. Als grundlegend wichtiges Hilfsmittel der Untersuchung wird hier die Begriffsbildung des Klassenkörpers eingeführt.

Es ist dies jener in bezug auf k relativ-Abelsche Zahlkörper von der Relativdiskriminante 1, der alle in bezug auf k unverzweigten Körper als Teilkörper enthält. Kronecker wurde schon im Jahre 1856 zu der überraschenden Bemerkung geführt, daß es zu jedem imaginären quadratischen Körper einen zu assoziierenden Zahlkörper von der Relativdis-

kriminante 1 gibt, nach dessen Adjunktion die sämtlichen Ideale des Grundkörpers zu wirklichen ganzen algebraischen Zahlen werden. Er bezeichnet es als höchstes, erstrebenswertes Ziel der Zahlentheorie, die Natur dieses zu assoziierenden Zahlkörpers zu ergründen. Die Hilfsmittel hierzu hat nun Hilbert geschaffen, durch dessen grundlegende Untersuchungen angeregt, es Ph. Furtwängler (1904) gelungen ist, den Klassenkörper für einen beliebig vorgelegten Zahlkörper wirklich zu konstruieren.

Als Meisterwerk und Beleg seines großen Talentes für die Vereinfachung schwieriger Beweise sei noch einer seiner älteren Arbeiten „Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlenkörpers in Primideale“ gedacht (1894), in welcher er den bekannten Dedekindschen Satz unter der Zugrundelegung des Galoisschen Zahlkörpers aufs lichtvollste und übersichtlichste beweist. Ferner auch seines Beweises für die Transzendenz der Zahlen e und π. Hier hat er den Kern des Hermiteschen und Lindemannschen Beweises seines unnötigen Beiwerkes entkleidet, indem er das Nichtverschwinden eines Ausdruckes nicht auf schwierige Abschätzungen, sondern auf den Nachweis gründet, daß er eine ganze Zahl vorstellt, welche modulo einer geeigneten Primzahl gewiß nicht zur Null kongruent ist.

Im Anschluß an diese arithmetischen Untersuchungen sei noch einer interessanten Abhandlung „Über die Irreduzibilität ganzer Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten“ gedacht. In dieser Abhandlung führt Hilbert den Nachweis des Satzes: Ist eine Funktion $F(x, y, \cdots, w;\ t, r, \cdots, q)$ in einem gewissen durch eine algebraische Zahl bestimmten Rationalitätsbereich irreduzibel, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, in dieser Funktion für $t, r, \cdots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so daß dadurch die Funktion in eine Funktion allein der Veränderlichen $x, y, \cdots, w$ übergeht, welche im gegebenen Rationalitätsbereiche irreduzibel ist. Hieraus ergibt sich alsdann der Beweis des bis dahin nur vermuteten Satzes, daß es unbegrenzt viele Gleichungen n-ten Grades geben müsse, deren Gruppe im Bereiche der rationalen Zahlen die symmetrische Gruppe ist. Das gleiche gilt auch für die alternierende Gruppe.

Indem ich nun auf die geometrischen Untersuchungen Hilberts übergehe, habe ich über sein Werk „Grundlagen der Geometrie“ (1899, 2. Auflage 1905) zu berichten. Diese „Grundlagen“ sind eine kritische Untersuchung der Prinzipien der Geometrie, für die er ein einfaches und vollständiges System von Axiomen aufstellt und die wichtigsten Grundtheoreme (den Satz von Desargues und einen Spezialfall des Pascalschen Satzes) in der Weise ableitet, daß die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Schlüsse in Evidenz tritt. Er ordnet die Axiome in fünf Gruppen ein und beweist die Widerspruchslosigkeit derselben, indem er arithmetische Mannigfaltigkeiten konstruiert, die den Axiomen genügen.

Schließlich werden die geometrischen Elementarkonstruktionen eingehend erörtert und auf Grund tiefliegender arithmetischer Sätze die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür entwickelt, daß sich eine vorgelegte Konstruktionsaufgabe allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken lösen lasse.

In diesem Zusammenhang sei noch seiner wichtigen Untersuchung über die Begründung der Geometrie vom Standpunkte der Transformationsgruppen aus gedacht, die durch die größere Allgemeinheit ihrer Voraussetzungen die hierauf bezüglichen Untersuchungen von Sophus Lie überholt.

Hilberts hier genannte Arbeiten, die hinsichtlich ihrer großen Bedeutung schon von Poincaré auf das Eingehendste gewürdigt wurden, haben eine reiche Literatur hervorgerufen, gewissermaßen die von Hilbert wiederholt ausgesprochene Überzeugung bekräftigend, daß die logische Strenge der Untersuchungen stets die Keime fruchtbarer Weiterentwicklung in sich trägt.

Und nun noch einiges über Hilberts Forschungen auf dem Gebiete der Funktionentheorie. Ich möchte zuerst seines bewunderungswürdigen Beweises gedenken, den er für das Dirichletsche Prinzip geführt hat, welches die Existenz der Lösung des bekannten Randproblemes der Potentialtheorie aus der als selbstverständlich angesehenen Existenz des Minimums eines Integrals folgert. Dieses Prinzip hatte sich vermöge seiner Einfachheit und mannigfachen Anwendbarkeit auf die Theorie der algebraischen Integrale sowie auf Probleme der mathematischen Physik als eines der wirkungsvollsten Hilfsmittel der mathematischen Forschung erwiesen. Nun kam die Weierstraßsche Kritik, in der an einem sehr einfach gewählten Beispiele die Unzulässigkeit der Dirichletschen Schlußweise evident dargetan wurde. Dem Dirichletschen Prinzip war hierdurch scheinbar der Lebensnerv abgeschnitten. Nur mit dem Aufwand großer Mühe konnten C. Neumann, H. A. Schwarz und H. Poincaré Ersatz für das so leistungsfähige Dirichletsche Prinzip schaffen. Um so höher ist nun Hilberts Verdienst anzurechnen, das Dirichletsche Prinzip in seiner ursprünglichen Einfachheit mit den einfachsten Mitteln wieder belebt zu haben. Die Hilbertsche ebenso lichtvolle wie einwurfsfreie Schlußweise zeichnet sich neben ihrer Schlichtheit noch durch den Umstand aus, daß sie, nur die Minimumseigenschaft benützend, von den speziellen Eigenschaften der Potentialfunktionen keinen Gebrauch macht, daher auch auf allgemeinere Probleme der mathematischen Physik angewendet werden kann.

Von großer Bedeutung sind ferner Hilberts „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (von 1902 ab). Unter Integralgleichungen sind solche Gleichungen zu verstehen, in denen eine unbekannte Funktion explizit und überdies unter dem Zeichen eines be-

stimmten Integrals im Integrandus enthalten ist. Hilbert hatte sich bald überzeugt, daß der systematische Aufbau der Theorie dieser Gleichungen für die ganze Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale und für die der Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, für die Theorie der linearen Differentialgleichungen, für die Potentialtheorie und Variationsrechnung von größter Bedeutung ist.

Er untersucht den Zusammenhang der Eigenschaften von Lösungen solcher Integralgleichungen unter der wesentlichen Voraussetzung, daß die von ihm als „Kern“ bezeichnete Funktion in bezug auf ihre beiden Argumente symmetrisch ist. Hierbei gelangt er zu Entwicklungen einer willkürlichen Funktion nach sogenannten Eigenfunktionen, in denen die bekannten Entwicklungen nach trigonometrischen, Besselschen, Laméschen, Sturmschen und Kugelfunktionen als spezielle Fälle enthalten sind. Es gelingt ihm ferner, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von unendlich vielen Eigenfunktionen aufzustellen. Überaus charakteristisch für Hilberts Art zu schaffen ist es, daß den Grundgedanken seiner Arbeit ein als heuristisches Hilfsmittel oft angewandtes Verfahren liefert, das er mit großem Scharfsinn zu einem beweisenden Prinzip umgestaltet.

Ich möchte auch noch seiner Untersuchungen auf dem Gebiete der Variationsrechnung gedenken, die für diese Disziplin von der größten Bedeutung zu sein scheinen. Einen Weg verfolgend, den Weierstraß angebahnt hatte, zeigt er, daß dieser zu einer überraschenden Vereinfachung der Variationsrechnung führt, indem zum Nachweis der notwendigen und hinreichenden Kriterien des Eintretens eines Extremums die Berechnung der zweiten Variation und zum Teil sogar die mühsamen an die erste Variation anknüpfenden Schlüsse vermieden werden können.

Doch ich breche diese Reihe dieser leider flüchtigen Schilderung von Hilberts Untersuchungen nun ab. Dieselben lassen in Hilbert einen Mathematiker von den seltensten Qualitäten erkennen, der Strenge mit Vielseitigkeit, logische Schärfe mit großer Erfindungskraft, ruhiges Erwägen mit flammender Begeisterung für seine Wissenschaft in sich vereint.

Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen auf den Einheitskreis.

Von

Severin Johansson in Kotka (Finland).

Der Satz.

1. F sei das Symbol einer über der z-Ebene ausgebreiteten, in einer endlichen Anzahl von Punkten dieser Ebene verzweigten, einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche; falls Windungspunkte von unendlich hoher Multiplizität vorkommen, werden dieselben als *singuläre* Punkte der Fläche angesehen, zum Unterschied von allen übrigen Punkten der Fläche, die wir *reguläre* Punkte nennen.

Auf dieser Fläche F nehmen wir an, es gäbe ein harmonisches Potential U folgender Beschaffenheit:

1) U ist auf F *eindeutig* und *positiv;*

2) diejenigen kritischen Punkte $o, o', o'', \cdots$, wo U aufhört harmonisch zu sein, häufen sich, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen keinen regulären Punkt der Fläche; in der Umgebung eines kritischen Punktes ist $U + \log r$, wo r den Abstand vom kritischen Punkte bedeutet, harmonisch.

Unter dieser Voraussetzung über die Fläche F läßt sich zeigen, *daß man die Fläche F auf das Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos abbilden kann.*

Den Beweis dieser Behauptung zu erbringen beabsichtigt die folgende Untersuchung.

2. Weil F eine einfach zusammenhängende Fläche ist, so können wir um den Punkt o herum eine Schar knotenfreier Kurven $C_1, C_2, \cdots$ derart festlegen, daß C_ν von $C_{\nu+1}$ umschlossen wird und daß schließlich für einen hinreichend hohen Wert von ν jeder reguläre Punkt der Fläche innerhalb C_ν liegen wird; die singulären Punkte liegen außerhalb sämtlicher Kurven C_ν*).

*) Vgl. Poincaré, Bull. de la Soc. Math. de France, t. XI (1881), und meine Abhandlung: Über die Uniformisierung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzahl Windungspunkte, Acta Soc. Sc. Fenn. T. XXXIII, Nr. 7 (1905).

3. C_ν umschließt, wie jede geschlossene Kurve, auf F ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Innerhalb dieses Gebietes liegt der Punkt o.

Zu diesem einfach zusammenhängenden Gebiete sei u_ν die Greensche Funktion, die also längs C_ν verschwindet und innerhalb C_ν in allen Punkten mit Ausnahme eines kritischen Punktes harmonisch ist; in der Umgebung des kritischen Punktes ist $u_\nu + \log r$, wo r den Abstand vom kritischen Punkte bedeutet, harmonisch. Als kritischen Punkt wählen wir den Punkt o.

4. Das Potential

$$u_{\nu+\mu} - u_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots)$$

ist überall innerhalb C_ν regulär und auf der Berandung positiv. Also ist für alle Stellen innerhalb C_ν und für alle positiven Werte von μ

$$u_{\nu+\mu} - u_\nu > 0$$

oder

$$u_{\nu+\mu} > u_\nu.$$

Das Potential

$$U - u_\nu$$

ist für alle Punkte innerhalb C_ν regulär oder logarithmisch singulär, während es längs C_ν positiv ist. Folglich können wir schließen, daß für alle Punkte innerhalb C_ν

$$U - u_\nu > 0$$

oder

$$U > u_\nu.$$

Nun umschließt aber $C_{\nu+\mu}$ immer C_ν, und wir können den Schluß ziehen, daß für alle Stellen innerhalb C_ν

$$U > u_{\nu+\mu}$$

für alle Werte von μ.

5. Wählen wir nunmehr auf F ein beliebiges Gebiet G, so können wir immer ν so groß wählen, daß G von C_ν umschlossen wird. Dann ist aber für alle Stellen dieses Gebietes G

$$U > u_{\nu+\mu} > u_\nu$$

für alle Werte von μ.

Falls aber ein positives harmonisches Potential u_n für alle Werte $n \geqq m$ für jeden Punkt eines Gebietes mit wachsendem n wächst, und falls $\lim\limits_{n=\infty} u_n$ für einen einzigen inneren Punkt des Gebietes existiert, so lehrt das Harnacksche Prinzip*), daß u_n für alle inneren Punkte des Gebietes konvergiert und daß $\lim\limits_{n=\infty} u_n$ ein harmonisches Potential ist.

Nach diesem Prinzip existiert also $\lim\limits_{\varrho=\infty} u_\varrho$ und ist für G ein har-

*) Harnack, Logarithmisches Potential, Leipzig 1887, p. 167.

monisches Potential. Falls der Punkt o dem Gebiete G angehört, ist dieser Punkt auszuschließen; daselbst hat $\lim\limits_{\varrho=\infty} u_\varrho$ einen kritischen Punkt. Die Punkte $o', o'', \cdots$ dagegen spielen keine besondere Rolle.

Allgemein läßt sich schließen, daß

$$u = \lim_{\varrho=\infty} u_\varrho$$

für alle Punkte von F existiert und ein harmonisches Potential auf F darstellt. Der einzige singuläre Punkt ist der Punkt o.

Das hiermit vollständig definierte Potential u ist ersichtlich für alle Stellen auf F positiv. Die Funktion

$$e^{-u}$$

ist also überall auf F kleiner als 1.

6. Nach dem Harnackschen Prinzip konvergiert die Reihe

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots$$

gleichmäßig. Dasselbe gilt dann auch von den Reihen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \cdots$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \cdots.$$

Zu u und u_ν bilden wir die konjugierten Potentiale

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\right),$$

$$v_\nu = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u_\nu}{\partial y}\, dx\right).$$

Aus dieser Definition und den obigen Formeln geht hervor, daß

$$\lim_{\nu=\infty} v_\nu = v,$$

und daß die Reihe für v

$$v = v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots$$

gleichmäßig konvergiert.

7. Nach diesen Vorbereitungen setzen wir

$$\eta(z) = e^{(u+iv)}$$

und behaupten, daß die so gewonnene analytische Funktion $\eta(z)$ *eindeutig und einwertig auf F ist und diese Fläche auf das Innere des Einheitskreises abbildet.*

Was zuerst die Eindeutigkeit betrifft, so ist zu zeigen, daß $\eta(z)$ bei allen geschlossenen Umläufen auf F in sich übergeht. Beim Durchlaufen einer derartigen Kurve kann v nur um Multipla von 2π sich verändern. Diese Veränderungen aber können keinen neuen η-Wert veranlassen. Also:

$\eta(z)$ ist eindeutig auf F.

8. Um nachzuweisen, daß $\eta(z)$ auch einwertig auf F ist, wird nötig sein, die Funktionen

$$\eta_\nu(z) = e^{-(u_\nu + i v_\nu)}$$

mit in die Untersuchung hineinzuziehen.

Weil u_ν gleichmäßig gegen u und v_ν gegen v gleichmäßig konvergiert, so konvergiert $\eta_\nu(z)$ gleichmäßig gegen $\eta(z)$, d. h.

$$\lim_{\nu=\infty} \eta_\nu = \eta.$$

Angenommen nun, es nähme $\eta(z)$ in zwei verschiedenen Punkten von F denselben Wert a an. G sei ein Gebiet, welches diese beiden Punkte einschließt und übrigens so gewählt ist, daß $\eta(z)$ nirgends sonst innerhalb oder auf dessen Berandung S den Wert a aufweist. l sei so groß, daß für $\nu \geqq l$ das Gebiet G von C_ν umschlossen wird.

Auf S ist also

$$|\eta(z) - a| > m$$

wo m eine positive Konstante ist.

$\nu_0 \geqq l$ wählen wir weiter so groß, daß für $\nu \geqq \nu_0$

$$|\eta_\nu - \eta| < m$$

für alle Punkte von S. Wir schreiben so

$$\eta_\nu - a \equiv (\eta_\nu - \eta) + (\eta - a) = (\eta - a)\left[1 + \frac{\eta_\nu - \eta}{\eta - a}\right].$$

Nun ist auf S

$$\left|\frac{\eta_\nu - \eta}{\eta - a}\right| < 1,$$

woraus erhellt:

1) $\eta_\nu(z)$ nimmt auf S nirgends den Wert a an.

2) Wenn z einmal S in positiver Richtung durchläuft, so nimmt

$$\arg\left[1 + \frac{\eta_\nu - \eta}{\eta - a}\right]$$

den Ausgangswert wieder an.

Weil nun

$$\arg(\eta_\nu - a) = \arg(\eta - a) + \arg\left[1 + \frac{\eta_\nu - \eta}{\eta - a}\right],$$

so folgt, daß, wenn z die Kurve S beschreibt, der Zuwachs von $\arg(\eta_\nu - a)$ gleich demjenigen von $\arg(\eta - a)$ ist; das aber besagt, daß $(\eta_\nu - a)$

innerhalb S zweimal verschwindet, was in Rücksicht auf die Einwertigkeit der Funktion $\eta_\nu(z)$ unmöglich ist. Also:

$\eta(z)$ *ist auf* F *einwertig.*

9. Die Funktion $\eta(z)$ bildet F auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet H in der η-Ebene ab. Zufolge der Ungleichung

$$e^{-u} < 1$$

hat dieses Gebiet keine außerhalb des Einheitskreises liegenden Punkte. Wir wollen zeigen, daß es gerade mit dem Einheitskreise zusammenfällt.

Die Kurven C_ν auf F werden auf ebenfalls geschlossene Kurven γ_ν innerhalb H abgebildet; die Kurve γ_ν wird von $\gamma_{\nu+1}$ umschlossen.

Das Potential u_ν geht in ein ebenfalls harmonisches Potential über, das längs γ_ν verschwindet und im Punkte $\eta = 0$ unstetig wird; nennen wir dieses Potential wiederum u_ν. Für alle Stellen von H ist

$$\lim u_\nu = u = -\log|\eta|,$$

wo $|\eta|$ ja der Abstand vom Nullpunkte ist.

10. ϱ_ν sei nunmehr der kleinste Wert von $|\eta(z)|$ längs C_ν. Nach den obigen Angaben ist

$$1 > \varrho_{\nu+1} > \varrho_\nu.$$

Ein mit dem Radius ϱ_ν innerhalb H um den Nullpunkt geschlagener Kreis wird von γ_ν berührt, während die Kurven $\gamma_{\nu+\mu}$ $(\mu = 1, 2, \cdots)$ diesen Kreis, ohne zu berühren, vollständig umschließen.

Die Größen ϱ_ν haben eine obere Grenze

$$\lim_{\nu=\infty} \varrho_\nu = \varrho,$$

die sicher nicht größer als 1 ist. Falls es uns nun gelingt zu zeigen, daß ϱ gerade gleich Eins ist, so ist damit auch bewiesen, daß H mit dem Einheitskreise zusammenfällt. Daß aber $\varrho = 1$ ist, läßt sich folgendermaßen dartun.

Sei α_ν einer der Berührungspunkte von ϱ_ν mit γ_ν, z. B. derjenige mit dem kleinsten Argumentwert. Die Punkte α_ν bilden eine isolierte Menge, deren Häufungsstellen auf der Peripherie des mit dem Radius ϱ um den Mittelpunkt geschlagenen Kreises liegen. Eine dieser Häufungsstellen sei α; $\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \cdots$ seien Punkte α_ν derart, daß

$$\lim_{\tau=\infty} \alpha_{l_\tau} = \alpha.$$

Der Punkt α kann innerhalb keiner Kurve γ_ν liegen, denn in jeder Nähe von α liegen Punkte der Kurven γ_{l_τ}, während innerhalb γ_ν keine Punkte der Kurven

$$\gamma_{\nu+\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots)$$

vorkommen.

11. Zum Punkte α adjungieren wir zwei beliebige außerhalb des Einheitskreises liegende Punkte β und γ. Die Dreiecksfunktion (elliptische Modulfunktion)

$$s = s\left(0, 0, 0; \frac{\eta - \alpha}{\eta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}\right)$$

definiert dann eine in α, β und γ verzweigte reguläre unendlichblättrige Riemannsche Fläche Φ. Aus der Funktionenschar

$$\frac{as + b}{cs + d}$$

wählen wir diejenige Funktion s_0 aus, die die ganze Fläche Φ auf das schlichte Innere des Einheitskreises abbildet. Diese Funktion s_0 hat für alle Werte von η Werte, deren Moduln kleiner als Eins sind. Falls wir uns den Punkten α, β oder γ nähern, so nähert sich $|s_0|$ dem Werte Eins.

Das Potential*)

$$\omega = -\log |s_0|$$

ist also für alle η-Werte positiv und hat, wenn wir den Nullpunkt von s_0 in den Punkt $\eta = 0$ von H verlegen, seinen kritischen Punkt in diesem Punkte. Also ist für alle Werte von ν

$$\omega > u_\nu$$

und somit auch

$$\omega \geqq u.$$

12. Die Werte von ω in den Punkten $a_{l_1}, a_{l_2}, \cdots$ streben ersichtlich dem Wert Null zu. Dasselbe gilt dann auch von denjenigen Werten, die u in diesen Punkten annimmt. Das besagt aber, daß die Werte von $|\eta|$ in diesen Punkten gegen Eins zunehmen, was nicht möglich ist, falls nicht α der Peripherie des Einheitskreises angehört.

Hiermit ist also bewiesen, daß $\varrho = 1$ ist. H *deckt sich folglich mit dem Einheitskreise* und unser Satz ist in seiner ganzen Ausdehnung bewiesen.

Folgerungen.

13. Mit Hilfe des oben bewiesenen Satzes ist es mir gelungen, einige allgemeine Rekursionssätze aufzustellen.

Es ist ja bekanntlich eine zentrale Aufgabe der Theorie der automorphen Funktionen zu zeigen, daß, falls wir eine endliche Anzahl beliebiger Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_n$ in der z-Ebene markieren, denen wir beliebige ganze Zahlen größer als Eins $k_1, k_2, \cdots, k_n$ (∞ eingeschlossen) zuordnen, eine derartige linear-polymorphe Funktion sich angeben läßt, daß sie die geeignet zerschnittene z-Ebene auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur

---

*) Vergl. Osgood, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 1 Nr. 3, pp. 310—314 (1900).

$(0;\ n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abbildet. In meiner auf Seite 177 genannten Abhandlung zeige ich gerade mit Anwendung des obigen Satzes: falls es möglich ist, die mit $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_\nu}$ (wo i_ϱ eine der Zahlen $k_1, k_2, \cdots, k_n$ und $\nu < n$ ist) signierte Ebene auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(0;\ \nu;\ k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})$ abzubilden, so ist auch die oben postulierte Abbildung ausführbar.

Ein zweites Fundamentalproblem der Theorie der automorphen Funktionen ist zu zeigen, daß auf jeder Riemannschen Fläche des Geschlechtes p eine unverzweigte polymorphe Funktion existiert, welche die kanonisch zerschnittene Fläche auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p;\ 0)$ abbildet. Dieses Fundamentalproblem kann ich lösen, indem ich nämlich mit Hilfe meines Satzes zeige, daß, wenn diese Aufgabe für alle Flächen vom Geschlechte p lösbar ist, sie sich auch für alle Flächen vom Geschlechte $p+1$ lösen läßt.

Drittens kann man eine Riemannsche Fläche vom Geschlechte p mit n beliebigen Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ signieren und nach einer polymorphen Funktion fragen, welche die kanonisch zerschnittene Fläche auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p;\ n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abbildet. Von diesem Fundamentalproblem läßt sich unmittelbar zeigen, daß es lösbar ist, falls die zweite Aufgabe erledigt ist.

Die genaue Behandlung dieser Probleme wird in dem nachstehenden Aufsatze gegeben werden.

Beweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen.

Von

SEVERIN JOHANSSON in Kotka (Finland).

Das Problem.

1. In der vorliegenden Abhandlung wird das folgende Problem gelöst. *Sind auf einer beliebig gegebenen Riemannschen Fläche des Geschlechtes* p *über der* z*-Ebene* n *willkürlich gewählte Stellen* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *markiert, so verlangt man den Nachweis der Existenz und eindeutigen Bestimmtheit einer an diesen Stellen verzweigten, sonst aber auf der Fläche unverzweigten, linear-polymorphen Funktion* $\eta = \eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$, *welche die kanonisch zerschnittene Fläche auf ein Polygon mit Grenzkreis und von der Signatur* $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ *abbildet, unter den* $k_\varkappa$ *beliebige ganze Zahlen* > 1 *oder* ∞ *verstanden.**)

Diese Fragestellung ist von grundlegender Bedeutung innerhalb der Theorie der automorphen Funktionen. Sie wurde von Klein und Poincaré, den beiden Schöpfern der genannten Theorie, aufgestellt und bezeichnet eines der Theoreme, welche Klein „Fundamentaltheoreme" (der Theorie der automorphen Funktionen) benennt. Klein und Poincaré haben auch eine weitreichende Methode zur Lösung dieses Fundamentalproblems gegeben, die sogenannte „méthode de continuité"**). Indessen selbst die eingehenden Entwicklungen von Poincaré, obwohl scharfsinnig und bewundernswert, dürften lange nicht alle Schwierigkeiten der Methode überwinden. Neuerdings hat sich Herr Fricke***) mit dem Kontinuitätsbeweise eingehend beschäftigt und hat den Beweis von dem Standpunkte einer entwickelten Theorie der diskontinuierlichen Gruppen aus in Angriff genommen, ohne aber bis jetzt mehr als die einfachsten Spezialfälle erledigt zu haben.

*) Dabei muß $\sum \frac{1}{k_\varkappa} < 2p + n - 2$ sein, damit der Grenzkreisfall überhaupt vorliegt.

**) Klein, Math. Ann. Bd. 21, p. 208 ff. Poincaré, Acta mathem., Bd. 4, p. 233 ff.

***) Gött. Nachr. 1903; Math. Ann. Bd. 59, pp. 449—513.

Weitaus kürzer und schärfer kommt man zum Ziele mittels der sogenannten Methode der Liouvilleschen Differentialgleichung. Diese Methode, deren Grundgedanke wohl auf Schwarz zurückgeht, ist von Picard und Poincaré ausgebildet worden.*)

Im folgenden entwickle ich eine wesentlich neue Methode, indem ich nämlich durch ein rekurrentes Verfahren die Lösung des Problems erbringe. Dabei knüpfe ich an denjenigen Satz an, den ich in dem vorhergehenden Aufsatze bewiesen habe.**)

2. Das zu lösende Problem ist mit den folgenden drei äquivalent.

Problem I. *Sind in der z-Ebene n willkürlich gewählte Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_n$ markiert, so fragt man nach der Existenz einer an diesen Stellen verzweigten, sonst aber in der Ebene unverzweigten, linear-polymorphen Funktion $\eta = \eta(z;\ (0, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n))$, welche die geeignet zerschnittene Ebene auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur* $(0;\ n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ *abbildet, unter den $k_\varkappa$ beliebige ganze Zahlen > 1 oder ∞ verstanden.* Dabei muß $\sum\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k_\varkappa}\right) > 1$ sein.

Problem II. *Ist eine beliebige Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p \geqq 2$ gegeben, so fragt man, ob es auf dieser Fläche eine unverzweigte linear-polymorphe Funktion $\eta = \eta(z;\ (p, 0))$ gibt, die die kanonisch zerschnittene Fläche auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, 0)$ abbildet.*

Problem III. *Sind auf einer beliebig gegebenen Riemannschen Fläche mit $p \geqq 1$ irgend $n \geqq 1$ Punkte markiert, so fragen wir nach einer in diesen Punkten verzweigten, sonst aber auf der Fläche unverzweigten linear-polymorphen Funktion $\eta = \eta(z;\ (p, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n))$, welche die kanonisch zerschnittene Riemannsche Fläche auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abbildet.*

Die zugrunde liegende Riemannsche Fläche nennen wir allgemein $\varphi(p, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$, oder speziell beim ersten Problem $\varphi(0, n;\ k_1, k_2, \cdots, k_n)$ und beim zweiten $\varphi(p, 0)$.

---

*) Picard, Journ. de Math. sér. 4, t. 9, p. 195ff., pp. 273—291, Compt. Rend. t. CXVI, p. 1075. Poincaré, Journ. de Math. sér. 5, t. 4, pp. 137—230.

**) Diese Methode habe ich für das erste der unten folgenden Probleme schon in meiner Dissertation: „Über die Uniformisierung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzahl von Windungspunkten“ (Acta Soc. Sc. Fenn. T. XXXIII (1905)) entwickelt, die übrigen Sätze habe ich im Sommer 1905 mehreren Mitgliedern der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorgetragen. Durch Herrn Geh. Rat Klein bin ich auf eine unterdessen erschienene einschlägige Broschüre von Herrn Brodén (Lund 1905) aufmerksam gemacht worden. Diese Arbeit kommt aber für meine Sätze nicht in Betracht: sie gibt wesentlich nur die Resultate von Poincaré (Bull. Soc. Math. de France t. 11 (1883)) und die auch in meiner Dissertation bewiesene Tatsache, daß das Poincarésche Verfahren zu einer Abbildung auf das ganze Innere des Einheitskreises führt. Weitere Bemerkungen über diese Arbeit werde ich gelegentlich später machen.

I. Die Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

3. Auf der Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist die gesuchte Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ unendlich vieldeutig. Führen wir aber auf der Fläche eine kanonische Zerschneidung ein, die in bekannter Weise aus p Paaren von Rückkehrschnitten $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ und n Einschnitten $d_1, d_2, \cdots, d_n$ nach den Verzweigungsstellen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ besteht, so ist auf der so zerschnittenen Fläche die Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ eindeutig. Der Inbegriff der Werte, welche η auf ihr annimmt, bildet einen Funktionszweig der vieldeutigen Funktion.

Auf einer so zerschnittenen Fläche $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ kann nun jeder Zweig der Funktion η ausgebreitet werden. Entsprechend den unendlich vielen Zweigen, entstehen so unendlich viele genau kongruente Flächen φ'.

Ist die Funktion η gegeben, so sind in diesen unendlich vielen Flächen diejenigen Uferpunkte zusammenzuheften, wo η mit demselben Werte auftritt. Auf der so entspringenden unendlichblättrigen Fläche ist dann η eindeutig und einwertig.

4. Die Frage ist nun, wie man jetzt, wo die Existenz von η gerade zu beweisen ist, diese unendlichblättrige Fläche herstellen kann. Um diese Frage zu beantworten, ziehe ich irgend welches kanonische Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ in Betracht. Zwischen den Seiten dieses Polygons und den offenen Kanten von $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ führe ich eine Zuordnung folgendermaßen ein. Ich biege das kanonische Polygon zusammen, so daß die äquivalenten Randpunkte einander gegenüber zu liegen kommen; so entspringt eine mit einer kanonischen Zerschneidung ausgestattete Riemannsche Fläche vom Geschlechte p. Diese Fläche trägt also p Paare von Rückkehrschnitten $a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_p, b_p$ und n Einschnitte $d_1, d_2, \cdots, d_n$. Ist nun die kanonische Zerschneidung der Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ so gewählt, daß die beiden Schnittsysteme, das der eben definierten Fläche und das von $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$, in genau gleicher Ordnung bei positiver Umkreisung der zerschnittenen Flächen durchlaufen werden, so ordnen wir in der durch diese Umkreisung fixierten Ordnung die beiden Ufer der Schnitte a_i, b_i und d_i der einen Fläche den beiden Ufern der gleichgenannten Schnitte der anderen Fläche zu. Dadurch gewinnen wir aber auch eine Korrespondenz zwischen den Stücken der Berandung von $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ und den Seiten des kanonischen Polygons.

Die Fläche $\varphi'(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ denken wir uns also in unendlich vielen kongruenten Exemplaren vorhanden. Andererseits reproduzieren wir das kanonische Polygon durch die zugehörigen Gruppensubstitutionen.

Die beiden Mengen — die Menge der Flächenexemplare und die der Polygone — ordnen wir einander eineindeutig zu. In zwei zugeordneten Individuen ordnen wir wieder diejenigen Berandungsstücke einander zu, die kongruent bez. äquivalent mit zwei zusammengehörigen Berandungsstücken in der Ausgangsfläche und im Ausgangspolygone sind.

Nunmehr fügen wir die unendlich vielen Riemannschen Flächen Exemplar über Exemplar genau so zusammen wie die zugeordneten Polygone im Polygonnetze zusammengefügt sind, so daß immer, wenn zwei Polygone mit zwei Seiten zusammenstoßen, die zugeordneten Flächen mit den entsprechenden Berandungsstücken zusammengeheftet werden.

Es entspringt durch diesen Prozeß eine unendlichblättrige Riemannsche Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$, die grade die gesuchte Fläche ist.

5. Die Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist ersichtlich *einfach zusammenhängend.*

Sie ist weiter in bezug auf $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ als Grundgebilde oder „Blatt“ *regulär*, indem nämlich jedes Flächenexemplar oder „Blatt“ genau so mit den übrigen verzweigt und verschlungen ist wie jedes andere.

6. Auf der hiermit definierten Fläche ist die gesuchte Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ *eindeutig und einwertig.* Jedes „Blatt“ trägt einen Zweig der gesuchten Funktion und wird durch dieselbe auf ein Grenzkreispolygon von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ abgebildet. Die ganze Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ wird somit durch die Funktion $\eta(z; (p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n))$ auf das Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos abgebildet.

II. Ein grundlegender Satz.

7. Von der Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ gilt nun aber auch umgekehrt folgender grundlegender Satz:

Falls es eine auf $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ eindeutige und einwertige Funktion gibt, die die Fläche auf das Innere des Einheitskreises schlicht und lückenlos abbildet, so ist diese Funktion eine Lösung des Fundamentalproblems.

8. Dieser Satz hängt mit dem folgenden zuerst zu beweisenden Satze eng zusammen:

Zwei Funktionen $\eta_1(z)$ und $\eta_2(z)$, die dieselbe einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche F auf das Innere des Einheitskreises abbilden, gehen durch eine lineare Transformation, welche den Einheitskreis in sich verschiebt, auseinander hervor.

Um den Beweis dieses Satzes zu erbringen, definieren wir eine dritte Funktion $\eta_3(z)$ durch die Gleichung

$$\eta_3(z) = S\eta_2(z),$$

wo wir die lineare Verschiebung S des Einheitskreises in sich so wählen, daß $\eta_3(z)$ gleichzeitig mit $\eta_1(z)$ verschwindet, und daß die beiden Funktionen in einem gegebenen Punkte denselben Argumentwert aufweisen.

Die so festgelegte Funktion $\eta_3(z)$ ist nun auch eindeutig und einwertig auf F. Die Funktionen $\eta_1(z)$ und $\eta_3(z)$ sind also eindeutige Funktionen voneinander, und der Quotient $\frac{\eta_1}{\eta_3}$ ist somit eindeutig innerhalb des Einheiskreises sowohl der η_1- als der η_3-Ebene; überdies bleibt der Quotient, da η_1 und η_3 gleichzeitig verschwinden, daselbst stets endlich und von Null verschieden.

Das harmonische Potential

$$u = \log \left| \frac{\eta_1}{\eta_3} \right|$$

ist also innerhalb des Einheitskreises der η_3-Ebene eine eindeutige, endliche und stetige Funktion der reellen Veränderlichen ω_1 und ω_2, wo

$$\eta_3 = \omega_1 + i\omega_2.$$

Betrachten wir nunmehr in der η_3-Ebene einen mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreis, dessen Radius r kleiner ist als Eins. Wenn η_3 auf der Peripherie dieses Kreises verbleibt, so ist

$$|\eta_1| < 1$$

und folglich

$$u < \log \frac{1}{r}.$$

Wenn aber ein harmonisches Potential für ein Gebiet eindeutig, endlich und stetig ist, so erreicht das Potential sein Maximum auf der Berandung des Gebietes.

Also kann u innerhalb des Kreises mit dem Radius r nirgends Werte annehmen, die $\log \frac{1}{r}$ überschreiten.

Lassen wir r gegen Eins zunehmen, so ist

$$\lim_{r=1} \log \frac{1}{r} = 0,$$

und wir schließen, daß innerhalb des Einheitskreises der η_3-Ebene u nirgends positiv wird. Es ist also in jedem Punkte von F

$$\left| \frac{\eta_1}{\eta_3} \right| \leqq 1.$$

Genau ebenso folgt, daß

$$\left| \frac{\eta_3}{\eta_1} \right| \leqq 1.$$

Wir haben also in jedem Punkte von F notwendig

$$|\eta_1| = |\eta_3|$$

und also

$$\eta_3 = \eta_1 e^{\vartheta i}$$

wo ϑ eine reelle Konstante ist.

Nach der Voraussetzung aber haben η_1 und η_3 in einem gewissen Punkte denselben Argumentwert; also ist

$$\vartheta = 0$$

und

$$\eta_3 = \eta_1$$

oder

$$\eta_1 = S\eta_2,$$

womit der Satz bewiesen ist*).

9. Sei nunmehr $\eta(z)$ eine Funktion, die unsere Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ auf das Innere des Einheitskreises abbildet; $\eta_1, \eta_2, \cdots$ seien ihre Zweige, deren jeder also auf seinem Exemplare der Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ausgebreitet ist. Wir wollen beweisen, daß diese Zweige durch eine lineare Verschiebung des Einheitskreises in sich zusammenhängen.

Unsere Fläche $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist eine reguläre Fläche. Wir können also die Wertemenge der Funktion $\eta(z)$ insoweit beliebig auf der Fläche ausbreiten, ohne daß $\eta(z)$ aufhört auf der Fläche eindeutig und einwertig zu sein, daß wir nach Willkür ein „Blatt" als Träger des Ausgangszweiges $\eta_1(z)$ wählen können. Denken wir uns zwei verschiedene derartige Ausbreitungen so vollzogen, daß ein und dasselbe „Blatt" das eine Mal $\eta_i(z)$, das andere Mal $\eta_k(z)$ trägt. Dann gehen nach dem obigen Satze diese Zweige durch lineare Verschiebungen des Einheitskreises in sich auseinander hervor.

Die Zweige von $\eta(z)$ gehen also auseinander durch lineare Verschiebung des Einheitskreises in sich hervor. Diese Verschiebungen bilden eine Gruppe, die ersichtlich von der Signatur $(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ ist. Hiermit ist aber der auf der Seite 187 formulierte, grundlegende Satz bewiesen.

10. Durch Vermittelung dieses Satzes tritt an Stelle des Fundamentalproblems ein neues äquivalentes Problem uns entgegen. Dieses verlangt *eine konforme Abbildung der Fläche* $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ *auf das schlichte und lückenlose Innere des Einheitskreises.*

---

*) Zu dem obigen Beweise vergl. Poincaré, Acta math. 4, pp. 231—232, und meine Abhandlung *Über die Uniformisierung etc.* Acta Soc. Sc. Fenn. T. XXXIII, Nr. 7.

III. Die Rekursionssätze.

11. An die Spitze dieser Abteilung stelle ich den Satz, den ich in der vorhergehenden Note*) ausgesprochen habe. Dieser Satz lautet:

Falls auf einer gegebenen unendlichblättrigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche F ein eindeutiges positives Potential existiert, dessen kritische Punkte, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen keinen regulären Punkt der Fläche sich häufen, so läßt sich diese Fläche F immer auf das Innere des Einheitskreises abbilden.

12. Mit Hilfe dieses Satzes und des in der vorigen Abteilung bewiesenen grundlegenden Satzes kann ich, den drei mit dem Fundamentalprobleme äquivalenten Problemen (S. 185) entsprechend, drei Rekursionssätze aufstellen.

Der erste lautet:

Satz I. *Falls es unter den Punkten $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ im ersten Probleme $\nu < n$ solche gibt, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_\nu}$, daß das Problem für die mit diesen Punkten signierte Ebene und die zugehörigen Zahlen $k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu}$ lösbar ist, so ist das Problem auch für die gegebene Ebene lösbar.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Nach der Voraussetzung existiert nämlich $\eta = \eta\big(z; (0, \nu; k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)$. Diese Funktion ist aber auf unserer Fläche $\Phi(0, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ eindeutig und nimmt daselbst keine Werte an, deren Moduln größer sind als Eins; diejenigen Stellen der Fläche, wo $\eta\big(z; (0, \nu; k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)$ verschwindet, liegen übereinander in der z-Ebene und häufen sich folglich gegen keinen regulären Punkt der Fläche.

Das Potential

$$U = -\log\left|\eta\big(z; (0, \nu: k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)\right|$$

ist folglich auf der Fläche ein eindeutiges positives Potential, dessen kritische Punkte, die ja mit den Nullstellen von $\eta\big(z; (0, \nu; k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_\nu})\big)$ zusammenfallen, die Bedingung meines Satzes erfüllen. Also können wir schließen, daß man die Fläche $\Phi(0, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ auf das Innere des Einheitskreises abbilden kann. Das besagt aber nach unserem grundlegenden Satze, daß das erste Problem lösbar ist. Der Satz I ist folglich richtig.

Satz II. *Falls das zweite Problem für alle Flächen vom Geschlechte p gelöst ist, so läßt es sich auch für alle Flächen vom Geschlechte $p + 1$ lösen.*

Um den Beweis dieses Satzes zu erbringen, gehen wir aus von derjenigen Normalform der Riemannschen Fläche, die dadurch charakterisiert ist, daß sie lauter einfache Windungspunkte trägt und daß diejenigen Windungspunkte, die dieselben Blätter verbinden, immer paarweise vorkommen;

*) Seite 177—183 dieses Bandes.

die Verzweigungsschnitte verbinden diese Windungspunkte genau so wie auf einer gewöhnlichen Verzweigungsfläche der hyperelliptischen Funktionen.*)

$\varphi(p+1, 0)$ sei die in diese Normalform gebrachte Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p+1$, $\Phi(p+1, 0)$ die zugehörige unendlichblättrige Fläche der unverzweigten polymorphen Funktion.

Wenn wir auf $\varphi(p+1, 0)$ ein Paar Verzweigungspunkte dadurch verschwinden lassen, daß wir die zu demselben Blatte gehörenden Ufer des zugehörigen Verzweigungsschnittes zusammenheften, so entsteht eine Fläche vom Geschlechte p, $\varphi(p, 0)$.

Jede auf $\varphi(p, 0)$ unverzweigte Funktion ist nun ersichtlich auch auf $\varphi(p+1, 0)$ unverzweigt. Auf $\varphi(p, 0)$ existiert aber nach unserer Voraussetzung die unverzweigte polymorphe Funktion $\eta(z; (p, 0))$. Diese Funktion ist folglich auch auf $\varphi(p+1, 0)$ unverzweigt und somit eindeutig auf $\Phi(p+1, 0)$.

Das Potential

$$U = -\log|\eta(z; (p, 0))|$$

ist also ein positives eindeutiges Potential auf $\Phi(p+1, 0)$, und wir können wieder genau so wie beim ersten Satze schließen, daß man die Fläche $\Phi(p+1, 0)$ auf das Innere des Einheitskreises abbilden kann. Hiermit ist aber auch der Satz II bewiesen.

Satz III. *Wenn das Problem II gelöst ist, so läßt sich auch das Problem III lösen.*

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellt unmittelbar. Denn die zur Fläche $\varphi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ gehörende unverzweigte polymorphe Funktion, die ja nach der Voraussetzung existiert, ist auch auf $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$ eindeutig. Das Potential

$$U = -\log|\eta(z; (p, 0))|$$

ist also ein eindeutiges positives Potential auf $\Phi(p, n; k_1, k_2, \cdots, k_n)$. Diese Fläche läßt sich folglich auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Der Satz III ist also bewiesen.

IV. Die Lösung des Problems.

13. Mit Hilfe der obigen Rekursionssätze können wir von einfachen Spezialfällen ausgehend die drei Probleme und somit das ganze Fundamentalproblem lösen.

---

*) Lüroth, Math. Ann. Bd. 4, p. 181 (1871), Münch. Abh. Bd. 15, p. 329 ff. (1885); Clebsch, Math. Ann. Bd. 6, p. 216 (1872); vergl. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen (1896) p. 31 ff.

Problem I. Hier ist nun erstens zu beachten, daß dieses Problem für drei Windungspunkte eine Lösung hat, falls die zugehörigen Zahlen k_1, k_2 und k_3 die Ungleichung

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < 1$$

befriedigen; diese Lösung ist die Dreiecksfunktion

$$\eta(z;\, (0, 3;\, k_1, k_2, k_3)) = s\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3};\, \frac{z - a_1}{z - a_3} \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}\right).$$

Also können wir mit Hilfe des ersten Rekursionssatzes schließen, daß das erste Problem jedenfalls dann zu lösen ist, wenn unter den Zahlen $k_\varkappa$ drei k_{i_1}, k_{i_2} und k_{i_3} vorkommen, die der Ungleichung

$$\frac{1}{k_{i_1}} + \frac{1}{k_{i_2}} + \frac{1}{k_{i_3}} < 1$$

genügen.

Um aber ganz allgemein das erste Problem zu erledigen, knüpfen wir an die Untersuchungen von Herrn Fricke an. In Math. Ann. Bd. 59, p. 497 ff. hat Herr Fricke nämlich mit der Kontinuitätsmethode die Lösung für vier Windungspunkte sichergestellt, außer natürlich im Falle $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$, welcher ja gar nicht zum Grenzkreistypus gehört. Mit Hilfe von Satz I ist nun daraus zu schließen, daß das Problem I für beliebig viele Windungspunkte eine Lösung hat, falls nur nicht alle Zahlen $k_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ gleich 2 sind.

Um aber auch diesen Fall zu beherrschen, müssen wir die Lösung für den Fall $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 2$ zuerst bringen. Nun hat wieder Herr Fricke in Math. Ann. Bd. 59 gezeigt, daß auf jedem elliptischen Gebilde eine in *einem* Punkte verzweigte polymorphe Funktion unserer Art, $\eta(2;\, (1, 1, k))$, vorkommt. Wir denken uns folglich ein zweiblättriges elliptisches Gebilde, dessen vier einfache Windungspunkte mit den Windungspunkten a_1, a_2, a_3 und a_4 der Fläche $\Phi(0, 5;\, 2, 2, 2, 2, 2)$ zusammenfallen, und markieren den Punkt a_5 der z-Ebene in dem einen Blatte des Gebildes. Auf dem elliptischen Gebilde existiert alsdann die Funktion $\eta(z;\, (1, 1;\, 2))$, deren Windungspunkt auf der Fläche im Punkte a_5 liegt. Diese Funktion ist aber auf der Fläche $\Phi(0, 5;\, 2, 2, 2, 2, 2)$ eindeutig. Das Potential

$$U = -\log|\eta(2;\, (1, 1;\, 2))|$$

ist folglich ein eindeutiges, positives Potential auf derselben Fläche, woraus wiederum in schon bekannter Weise zu schließen ist, daß das Problem I für die Signatur $(0, 5;\, 2, 2, 2, 2, 2)$ eine Lösung hat.

Dann hat aber auch für den Fall, daß alle $k_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ gleich 2 sind, das Problem I eine Lösung. Das Problem I ist also vollständig gelöst.

Problem II. Bei diesem Probleme stehen wir schließlich vor der Aufgabe, das Problem für die Signatur $(2, 0)$ zu erledigen. Denn mit Hilfe des Satzes II kann man daraus auf die Lösung für die Signatur $(p, 0)$ schließen.

Nun sind aber alle Flächen vom Geschlechte 2 hyperelliptisch. Durch birationale Transformation erteilen wir also unserer Grundfläche $\varphi(2, 0)$ die Gestalt einer gewöhnlichen zweiblättrigen Fläche mit sechs Windungspunkten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6. Nach dem Vorausgehenden existiert nun die Funktion $\eta(z;\, (0, 6;\, 2, 2, 2, 2, 2, 2))$ mit Windungspunkten in a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6. Diese Funktion ist aber auf der Fläche $\Phi(2, 0)$ eindeutig, und wir können wieder in bekannter Weise schließen, daß die Funktion $\eta(z;\, (2, 0))$ existiert.

Hiermit ist also das Problem II in seiner ganzen Ausdehnung gelöst.

Problem III. Die Möglichkeit der Lösung dieses Problems folgt nunmehr unmittelbar aus dem Satze III.

Kotka, im Januar 1906.

Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*).

Di

Francesco Severi a Padova.

Nelle ricerche sia di Geometria che d'Analisi, s'incontra oggi molto spesso, per categorie svariatissime di enti, la questione della *base*, che può formularsi in generale così:

Dato un insieme di elementi qualunque, fissare, se è possibile, alcuni tra essi, in guisa che ogni altro elemento dell' insieme risulti legato agli elementi fissati, mediante operazioni ben definite.

La questione della base è fondamentale nella teoria dei campi di razionalità, e si presenta inoltre nelle ricerche di Dedekind e Weber sulle funzioni razionali appartenenti ad una data curva algebrica; nelle ricerche di Hilbert sui moduli di forme algebriche; nelle ricerche di Hurwitz sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica; nello studio degli integrali abeliani e degl' integrali di Picard; ecc, ecc.

In questo lavoro io stabilisco l'esistenza della base per l'insieme delle curve (algebriche) tracciate sopra una superficie algebrica F, provando che, se più curve della superficie diconsi *algebricamente legate* quando una combinazione lineare (a coefficienti interi e positivi) di alcune di esse, sta in un medesimo sistema algebrico irriducibile, con una combinazione analoga delle rimanenti, *si può determinare un intero positivo* ϱ, *tale che, fissate comunque sulla superficie* F ϱ *curve algebricamente distinte, ogni altra curva della* F *risulti algebricamente legata ad esse* (Teor. VI).

Il numero ϱ dicesi il *numero-base* della superficie; e l'insieme delle ϱ curve algebricamente distinte si dice una *base* per la totalità delle curve algebriche tracciate su F.

*) Un riassunto dei principali risultati di questa Memoria trovasi nei «Comptes rendus» del 6 febbraio 1905.

Darò un cenno della via seguita per giungere a questo risultato.

Fissato sopra F un gruppo di curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, di ordini $m_1, \cdots, m_l$, definisco come *matrice discriminante* del gruppo la tabella:

$$\left|\begin{matrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{matrix}\right|,$$

ove n_{ii} è il grado virtuale della curva C_i, ed n_{ik} è il numero dei punti comuni alle curve C_i, C_k.

Dimostro poi, in modo puramente geometrico, che l'annullarsi della suddetta matrice (cioè l'annullarsi di tutti i suoi determinanti d'ordine l), dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè le l curve siano algebricamente legate (Teoremi I e II); e ne deduco che le curve logaritmiche di un integrale semplice di 3ª specie, appartenente ad F, son sempre algebricamente legate.

Di quest' ultima proposizione è vera anche la reciproca; sicchè la condizione necessaria e sufficiente affinchè più curve siano legate algebricamente, si può esprimere sotto forma trascendente mediante l'esistenza di un integrale semplice di 3ª specie, che possegga singolarità logaritmiche soltanto lungo quelle curve (Teor. III).

Profittando allora di un teorema fondamentale del sig. Picard, sugli integrali di 3ª specie appartenenti ad una superficie algebrica*), mediante il criterio trascendente sopra riferito, giungo a risolvere la questione della base.

Accanto a questi risultati se ne presentano altri; ma per non dilungarmi di soverchio, riferirò soltanto i più notevoli.

Nel § 5, tenendo conto del fatto che una superficie regolare è caratterizzata dalla mancanza di sistemi algebrici completi, non lineari; nonchè dalla mancanza d'integrali di Picard della 2ª specie**), deduco dal teor. III, che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè gl'integrali di Picard appartenenti ad una superficie algebrica, riducansi a combinazioni algebrico-logaritmiche, è che la superficie sia regolare, cioè che il suo ordine di connessione lineare p_1 sia uguale ad* 1 (Teor. V).

Resta così risoluta negativamente l'importante questione, più volte

*) Cfr. ad es. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1904); t. II, fascicolo 2°, pag. 241.

**) Per le citazioni relative a questi teoremi, rimando al § 5.

posta dal sig. Picard*), di sapere cioè se esistano superficie col $p_1 = 1$ i cui integrali semplici non si riducano tutti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Il teor. V rende inoltre più stretta l'analogia che, da vari punti di vista, sussiste tra le curve razionali e le superficie regolari.

Infatti anche gl'integrali abeliani appartenenti ad una curva razionale, riduconsi tutti quanti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Nel § 7 studio l'effetto di una trasformazione birazionale sulla base e sul numero-base, e stabilisco, in particolare, che *il numero-base è un invariante relativo,* cioè che rimane immutato per quelle trasformazioni birazionali della superficie, che non introducono curve eccezionali di 1ª specie.**)

Per una trasformazione birazionale qualunque, il numero-base varia come il numero dalle curve eccezionali di 1ª specie.

Nello stesso paragrafo si vedrà inoltre come la considerazione della base dia luogo ad un altro invariante (assoluto).

Alla fine della Memoria (§ 8) deduco dall' esistenza della base *il teorema di Bézout sopra una superficie algebrica qualunque,* calcolando il numero dei punti comuni a due curve qualsiansi C, D della superficie, in funzione dei numeri delle intersezioni di C, D colle curve della base.

In particolare, nel caso del piano, prendendo come base una retta, si ha l'ordinario teorema di Bézout.

Quando le due curve C, D coincidono, la formola che esprime il teorema di Bézout sopra una superficie qualunque, dà il grado virtuale di C; e dalla conoscenza del grado si deduce poi anche l'espressione del genere virtuale, in funzione dei numeri delle intersezioni di C colle curve della base.

L'esistenza della base si conosceva, oltrechè sul piano (e in conseguenza sulle superficie razionali), sulle superficie generali nel loro ordine, ove come base si può assumere una sezione piana***); sulla superficie di Kummer, ove si può pure assumere come base una sezione piana†); sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o di due

---

*) Ved. ad es. il rapporto dal titolo, *Sur la théorie des surfaces algébriques,* riprodotto nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (t. IX, 1895, pag. 164); nonchè il Cap. IX (n° 10, pag. 244) della *Théorie des fonctions algébriques,* t. II.

**) A proposito della distinzione delle curve eccezionali in due specie, ved. il § 3 della Memoria di Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, (3), VI, 1901).

***) Nöther, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (Abhandlungen der Berliner Akad., 1882; §§ 11, 12.)

†) Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Math. 1893; pag. 72).

curve algebriche*) (ed in particolare sulle rigate e sulle superficie iperellitiche); e sulle superficie i cui integrali semplici riduconsi a combinazioni algebrico-logaritmiche.**)

Il campo delle questioni che si connettono all' esistenza della base, è ben lungi dall' essere esaurito dal presente lavoro! Accennerò p. e. alla questione della *base minima*, che si affaccia in primo posto, quando si vogliano proseguire le indagini in questo campo. Intendo che sopra una superficie F, il cui numero-base sia ϱ, un gruppo di $\varrho_1 \geqq \varrho$ curve, costituisca una base minima, quando nel legame algebrico che passa tra le ϱ_1 curve ed una curva qualunque C di F, sia uguale all' unità il coefficiente della C; senza peraltro che si verifichi la stessa proprietà per meno di ϱ_1 curve.

Sul piano e sopra una superficie generale del proprio ordine, una base minima è costituita da una sezione piana; mentre sopra la superficie di Kummer K una sezione piana non costituisce una base minima, perchè è soltanto il doppio di una curva di K, che *equivale* ad un multiplo di una sezione piana. Però unendo ad una sezione piana le coniche di K, si ottiene ivi una base minima.***)

La base minima si conosce pure sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una o di due curve.†)

Alcuni esempi (come quello sopra addotto della superficie di Kummer) mostrano come per ottenere una base minima, occorre talora aumentare il numero delle curve che costituiscono la base.

§ 1.
Definizioni e notazioni.

1. Siano C_1, C_2 due curve algebriche, tracciate sopra una superficie algebrica (irriducibile) F. Diremo che le due curve sono *algebricamente equivalenti*, quando esiste su F un sistema algebrico di curve, che le contiene entrambe totalmente. Parlando di un sistema algebrico, sottintendiamo sempre, salvo avviso contrario, ch' esso sia „irriducibile", cioè che riguardando le sue curve come elementi, si abbia come immagine una varietà algebrica irriducibile.

Per denotare l'equivalenza algebrica tra le curve C_1, C_2, scriveremo $C_1 \equiv C_2$.

Se il sistema algebrico che contiene C_1, C_2 è *lineare*, cioè se esso è

*) Severi, *Sulle corrispondenze tra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della R. Acc. di Torino, t. 64, 1903); n[i] 16, 21.

**) Picard et Simart, loc. cit., Cap. IX, n° 12.

***) Humbert, loc. cit.

†) Severi, loc. cit. n[i] 17, 22.

costituito dalle curve di livello costante di una funzione razionale dell' ente F, le curve C_1, C_2 si diranno *linearmente equivalenti*, e si scriverà $C_1 \equiv C_2$. Riserveremo il segno $=$ per esprimere la coincidenza di due curve.

Un sistema algebrico contenente una data curva C, s'indicherà con $\{C\}$; mentre s'indicherà con $|C|$ il sistema lineare individuato dalla curva C.

Siano $C_1, C_2, \cdots, C_l$ più curve tracciate sulla superficie F, e supponiamo che sussista tra esse una relazione del tipo:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l, \tag{1}$$

ove le λ, μ son numeri interi positivi, non tutti nulli. Si dirà allora che le l curve date son *legate algebricamente*.

Spesso il legame algebrico (1) verrà scritto sotto la forma simbolica:

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t + \lambda_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0, \tag{2}$$

ove:

$$\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \cdots, \lambda_l = -\mu_l.$$

I numeri interi $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ si chiameranno *coefficienti del legame*, e quando occorrerà tenerne presenti i valori, si dirà che *le* $C_1, \cdots, C_l$ *son legate secondo i numeri* $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$.

Se poi tra le $C_1, \cdots, C_l$ non sussiste alcuna relazione del tipo (2), per valori non tutti nulli delle λ, si dirà che le l curve sono *algebricamente distinte*.

In particolare parleremo di curve *linearmente legate*, quando sia possibile una relazione del tipo:

$$\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0, \tag{3}$$

per valori non tutti nulli dei numeri interi, positivi o negativi, λ. E nel caso contrario parleremo di curve *linearmente distinte*.*)

Indicheremo col simbolo $(C_1 C_2)$ il *gruppo* dei punti comuni alle curve C_1, C_2, e con $[C_1, C_2]$ il *numero* dei punti di questo gruppo.

Se sopra la curva C_1 esiste la *serie caratteristica*, il che, com' è noto, avviene allora e soltanto allora che la C_1 appartiene ad un sistema continuo almeno ∞^1**), con $(C_1 C_1)$ si denoterà un gruppo caratteristico, e

*) Ho qui adottato le locuzioni „legate linearmente" o „linearmente distinte", perchè le locuzioni „linearmente dipendenti o indipendenti" (che ho usate nella mia nota dei Comptes rendus), si sogliono riferire, in un senso diverso da quello del testo, a curve di uno stesso sistema lineare.

**) Ved. le mie Note, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 39, 1904); *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1905).

con $[C_1 C_1]$ il numero dei punti di tale gruppo, cioè il *grado* di C_1. Ma lo stesso simbolo $[C_1 C_1]$ verrà usato in ogni caso per indicare il *grado virtuale* della curva C_1, anche quando su questa non esista la serie caratteristica.

Consideriamo ancora sulla F le curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$, di ordini $m_1, m_2, \cdots, m_l$, e poniamo per brevità:

$$n_{ik} = n_{ki} = [C_i C_k]. \qquad (i, k = 1, \cdots, l)$$

Per *matrice discriminante* dell' insieme delle l curve date, s'intenderà la matrice:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix},$$

costituita da l verticali e da $l+1$ orizzontali.*)

Il determinante $|n_{ik}|$ formato dalle prime l orizzontali, si chiamerà semplicemente *determinante dell' insieme delle curve date.*

§ 2.

Criterio aritmetico per riconoscere quand' è che due curve dello stesso ordine, tracciate sopra una superficie algebrica, son legate algebricamente.

2. Se tra due curve algebriche A, B, dello stesso ordine m, tracciate sulla superficie F, sussiste il legame algebrico:

$$\lambda A + \mu B \equiv 0,$$

sarà:

$$\lambda m + \mu m = 0,$$

e quindi risulterà:

$$\mu = -\lambda,$$

cioè il legame algebrico si ridurrà alla forma:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è un intero positivo.

Da ciò segue che le A, B hanno lo stesso grado virtuale n, lo stesso genere virtuale π, e che segano nello stesso numero di punti una mede-

*) La matrice discriminante definita nella mia Nota citata dei Comptes rendus, contiene una orizzontale di più, formata coi numeri virtuali delle intersezioni delle date curve, con una curva canonica della superficie. — Si vedrà dal seguito come la considerazione di quest' orizzontale sia superflua.

sima curva della superficie. In particolare si deduce che il loro grado n è uguale al numero $[AB]$ delle loro intersezioni.

Dimostriamo ora, viceversa, il

Teorema I. *Avendosi sulla superficie F due curve algebriche dello stesso ordine A, B, soddisfacenti alle condizioni aritmetiche:*

$$[AA] = [BB] = [AB] = n > 0,$$

esse hanno lo stesso genere virtuale, e inoltre esiste un numero intero positivo λ, tale che:

$$\lambda A \equiv \lambda B.$$

Indicheremo con:

α, β i generi virtuali delle A, B, e supporremo ad es. $\beta \geqq \alpha$; $|C|$ il sistema delle sezioni piane o iperpiane di F; $|L|$ il sistema canonico di F, non spogliato dalle eventuali componenti fisse eccezionali.

Si può sempre scegliere un multiplo $|E|$ così elevato del sistema $|C|$, che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

a) Le curve E abbiano l'ordine maggiore delle L, sicchè ogni sistema avente lo stesso ordine di $|E|$ sia non speciale.

b) La dimensione virtuale:

$$\nu - \varrho + p_a + 1,$$

del sistema $|E|$, di grado ν e genere ϱ, tracciato sulla superficie F di genere aritmetico p_a, sia maggiore di zero.

Il grado e il genere della *curva virtuale* $E + A - B$*), saranno rispettivamente uguali a:

$$\nu, \quad \varrho + \alpha - \beta;$$

sicchè la dimensione virtuale di $|E + A - B|$ sarà espressa da:

$$\nu - \varrho + p_a + 1 + \beta - \alpha.$$

Poichè la curva $E + A - B$, in forza dell' ipotesi a) è non speciale, e d'altronde la dimensione virtuale di $|E + A - B|$, in forza dell' ipotesi b), è maggiore di zero, esisteranno certamente curve effettive

$$E + A - B\text{**)}$$

ed avranno lo stesso ordine delle E. Posto:

$$|E_1| = |E + A - B|,$$

si vede similmente che la dimensione virtuale di $|E_1 + A - B|$ è espressa da:

*) Ved. la mia Nota, *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica* (Rend. del R. Istituto lombardo, (2), t. 38, 1905).

**) Cfr. Severi, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 40, 1905); e *Sulle curve algebriche virtuali* . . .

$$v - \varrho + p_a + 1 + 2(\beta - \alpha);$$

e siccome la curva $E_1 + A - B$ è non speciale, esisterà anche il sistema:

$$|E_2| = |E_1 + A - B| = |E + 2(A - B)|.$$

Così proseguendo si vede che esisterà pure il sistema:

$$|E_t| = |E + t(A - B)|,$$

ove t è un intero positivo, comunque grande.

Anzi le E_t avranno lo stesso ordine delle E, e inoltre la dimensione virtuale di $|E_t|$ sarà espressa da:

$$v - \varrho + p_a + 1 + t(\beta - \alpha);$$

dal che segue che, se fosse $\beta > \alpha$, col crescere di t la dimensione virtuale di $|E_t|$, e quindi la sua dimensione effettiva, si potrebbero render maggiori di un numero prefissato, comunque grande.

Ma ciò è assurdo, perchè sulla F le curve dello stesso ordine delle E, si distribuiscono in un numero finito di sistemi algebrici, e quindi, qualunque sia t, la dimensione di $|E_t|$ non può superare la dimensione del più ampio dei sistemi suddetti.

Si conclude che $\beta = \alpha$.

Riprendiamo adesso in esame la successione indefinita di sistemi lineari

(5) $$|E|, |E_1|, |E_2|, \cdots, |E_t|, \cdots.$$

Poichè tutti questi sistemi lineari debbono esser contenuti totalmente in un numero finito di sistemi algebrici, due casi posson presentarsi:

1°) Nella successione (5) si trova soltanto un numero finito di sistemi lineari tra loro *distinti*.

2°) Esiste qualche sistema algebrico completo, non lineare, contenente totalmente infiniti sistemi lineari distinti della (5).

Nel 1° caso *l'operazione* $+ A - B$ *è periodica*, a partire da un certo termine della (5) (che potrebbe essere anche il primo); e quindi risulta:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è il periodo dell' operazione $+ A - B$.

Nel 2° caso, indichiamo con Σ un sistema algebrico contenente gl'infiniti sistemi lineari distinti:

$$|E_{r_1}|, |E_{r_2}|, |E_{r_3}|, \cdots \quad (r_1 < r_2 < r_3 < \cdots).$$

Il grado ed il genere della curva virtuale:

$$E_{r_1} + \lambda A - D,$$

ove λ è la differenza $r_2 - r_1$ tra i termini r_1, r_2 della successione:

(6) $$r_1, r_2, r_3, \cdots$$

e D una generica curva di Σ, sono rispettivamente uguali a:

$$\lambda^2 n, \quad n\binom{\lambda}{2} + \lambda(\alpha - 1) + 1;$$

e quindi la dimensione virtuale di

$$(7) \qquad |E_{r_1} + \lambda A - D|,$$

è espressa da:

$$(8) \qquad n\binom{\lambda+1}{2} - \lambda(\alpha - 1) + p_a.$$

Ora, poichè $n > 0$, scegliendo r_1 abbastanza innanzi nella successione (6), la dimensione virtuale (8) risulterà maggior di zero, e inoltre la curva virtuale $E_{r_1} + \lambda A - D$ sarà non speciale. Per quel valore di r_1 (e pei successivi) esisterà dunque il sistema (7), *qualunque sia la curva D di Σ*.

Al variare continuo della D entro Σ, il sistema (7) varia con continuità descrivendo un sistema algebrico Σ'.

Riguardando come *elementi* di Σ' i sistemi (7), e come elementi di Σ i sistemi lineari $|D|$, dalla costruzione di Σ' si rileva che le due varietà algebriche Σ, Σ' son riferite *birazionalmente*; e poichè la Σ è irriducibile, si conclude che Σ' è irriducibile come varietà degli elementi (7), e, per conseguenza, anche come varietà delle curve $E_{r_1} + \lambda A - D$.

Quando D viene a coincidere con una E_{r_1} o con una E_{r_2}, il sistema (7) vien rispettivamente a coincidere con:

$$|E_{r_1} + \lambda A - E_{r_1}| = |\lambda A|, \quad |(E + r_1 A - r_1 B) + \lambda A - (E + r_2 A - r_2 B)| = |\lambda B|;$$

dunque le curve λA, λB appartengono al medesimo sistema Σ'; cioè:

$$\lambda A \equiv \lambda B, \quad \text{c. d. d.}$$

Osservazione 1ª. — L'ipotesi che le due curve A, B abbiano lo stesso ordine, si può anche abbandonare, senza che il teor. I cessi di valere.

Basterà ripetere la dimostrazione sostituendo al sistema $|E|$, di cui sopra, il sistema:

$$|k(A+B)|,$$

ove k è un intero positivo, abbastanza grande.

Osservazione 2ª. — Nel caso in cui le due curve A, B *dello stesso ordine*, soddisfino alle condizioni aritmetiche:

$$[AA] = [BB] = [AB] = 0,$$

aggiungendo alle A, B una sezione piana C, e ponendo $A_1 = C + A$, $B_1 = C + B$, avremo:

$$[A_1 A_1] = [B_1 B_1] = [A_1 B_1] > 0;$$

onde risulterà:

$$\lambda A_1 \equiv \lambda B_1,$$

cioè:

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B. \tag{9}$$

Ma da ciò non si può in ogni caso dedurre:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

perchè non sempre togliendo una curva da un sistema algebrico irriducibile, si ottiene come resto un sistema algebrico irriducibile.

È anzi facile costruire esempi di curve A, B, per le quali non è soddisfatta nessuna relazione $\lambda A \equiv \lambda B$, per quanto lo siano le condizioni $[AA] = [BB] = [AB] = 0$*).

Però quel che si può senz' alcun dubbio rilevare dalla relazione (9), è che *le A, B segano nello stesso numero di punti non soltanto una sezione piana della superficie F, ma anche un' altra curva qualunque di F.*

Invero, se D è un' altra curva di F, si ha:

$$\lambda[CD] + \lambda[AD] = \lambda[CD] + \lambda[BD],$$

donde, essendo $\lambda > 0$, si trae:

$$[AD] = [BD].$$

Se dunque D è una curva di grado virtuale > 0, oppure una curva di grado 0, che incontri ciascuna delle A, B almeno in un punto, ponendo:

$$A_2 = D + A, \quad B_2 = D + B,$$

avremo:

$$[A_2 A_2] = [B_2 B_2] = [A_2 B_2] > 0,$$

e quindi risulterà pure:

$$\mu D + \mu A \equiv \mu D + \mu B,$$

ove μ è un intero positivo conveniente.

§ 3.

Criterio aritmetico per riconoscere quand' è che più curve d'una superficie son legate algebricamente.

3. Dal teorema dimostrato nel § precedente, si deduce il seguente:

Teorema II. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè l curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$ tracciate sopra una superficie F, siano legate algebricamente, è che sia nulla la matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_1 C_2 \cdots C_l)$.*

---

*) Si consideri ad es. la superficie F che rappresenta le coppie (non ordinate) dei punti di una curva irrazionale Γ; e s'indichi con Σ il sistema algebrico, d'indice 2 e grado 1, immagine dei punti di Γ. Si trasformi quindi birazionalmente la F, in modo da mutare il punto E di F in una curva eccezionale E', e si assumano come curve A, B le trasformate (astrazion fatta da E') delle curve di Σ che escono da E.

Detti $m_1, m_2, \cdots, m_l$ gli ordini delle $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e posto:

$$n_{ik} = [C_i C_k] \quad (i, k = 1, \cdots, l),$$

dimostriamo anzitutto che la condizione enunciata è necessaria; cioè che se si ha tra le C un legame algebrico:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0, \tag{10}$$

ove le λ sono interi, positivi o negativi, non tutti nulli, si annullano in conseguenza tutti i determinanti d'ordine l, estratti dalla matrice:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1l} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{l1} & n_{l2} & \cdots & n_{ll} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_l \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Invero, indicando con D una curva algebrica della F, dalla (10) si trae:

$$\lambda_1[C_1 D] + \lambda_2[C_2 D] + \cdots + \lambda_l[C_l D] = 0.$$

Facendo coincidere successivamente la D con una curva dei sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$, $\cdots$, $|C_l|$, e con una sezione piana o iperpiana di F, avremo quindi le relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_l n_{1l} = 0, \\ \lambda_1 n_{21} + \lambda_2 n_{22} + \cdots + \lambda_l n_{2l} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1 n_{l1} + \lambda_2 n_{l2} + \cdots + \lambda_l n_{ll} = 0, \\ \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_l m_l = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Poichè queste son soddisfatte per valori non tutti nulli delle λ, dovranno esser nulli tutti i determinanti d'ordine l estratti dalla (11); come volevasi provare.

Osservazione. — Se la curva C_1, ad es., non appartiene ad un sistema lineare (nè ad un sistema algebrico) infinito, si perviene lo stesso alla relazione:

$$\lambda_1 n_{11} + \lambda_2 n_{12} + \cdots + \lambda_l n_{1l} = 0, \tag{13}$$

aggiungendo alla C_1 una curva E, non coincidente con alcuna delle C, e tale che il sistema $|C_1 + E|$ risulti infinito e irriducibile. Si ottengono allora le relazioni:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1[C_1 + E, C_1] & + \lambda_2[C_1 + E, C_2] & + \cdots + \lambda_l[C_1 + E, C_l] & = 0, \\ \lambda_1[EC_1] & + \lambda_2[EC_2] & + \cdots + \lambda_l[EC_l] & = 0, \end{array}$$

le quali, sottratte membro a membro, dànno la (13).

Dimostriamo ora che la condizione enunciata è sufficiente.

Supponiamo pertanto che la matrice (11) sia nulla. Poichè gli elementi della matrice son numeri interi, si potranno determinare gl' *interi*, non tutti nulli, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, tali che risultino soddisfatte le relazioni (12). Queste λ *non potranno esser tutte dello stesso segno*, perchè gli ordini $m_1, m_2, \cdots, m_l$, che entrano come coefficienti delle λ nell' ultima relazione (12), son tutti maggiori di zero.

Ammettiamo, ad es., che siano positive le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ e negative le altre. Posto allora:

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \cdots, \mu_l = -\lambda_l,$$

consideriamo le due curve:

$$A = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t, \quad B = \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l.$$

Il grado della prima è espresso da:

$$[AA] = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k n_{ik} \quad (i, k = 1, \cdots, t);$$

e il grado della seconda da:

$$[BB] = \sum_{i,k} \mu_i \mu_k n_{ik} \quad (i, k = t+1, \cdots, l);$$

ed il numero dei punti comuni alle A, B da:

$$[AB] = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k n_{ik} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, t \\ k = t+1, \cdots, l \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando le prime t relazioni (12) ordinatamente per $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$, e sommandole quindi membro a membro, avremo:

$$\sum_{i=1}^{t} (\lambda_1 n_{1i} + \lambda_2 n_{2i} + \cdots + \lambda_t n_{ti}) \lambda_i - \sum_{i=1}^{t} (\mu_{t+1} n_{t+1,i} + \cdots + \mu_l n_{li}) \lambda_i = 0;$$

cioè:

$$[AA] - [AB] = 0.$$

Similmente, moltiplicando le $l - t$ relazioni successive ordinatamente per $\mu_{t+1}, \cdots, \mu_l$, e sommandole membro a membro, si ha:

$$\sum_{i=t+1}^{l} (\lambda_1 n_{1i} + \lambda_2 n_{2i} + \cdots + \lambda_t n_{ti}) \mu_i - \sum_{i=t+1}^{l} (\mu_{t+1} n_{t+1,i} + \cdots + \mu_l n_{li}) \mu_i = 0,$$

ossia:

$$[AB] - [BB] = 0.$$

Si conclude che:

$$[AA] = [BB] = [AB].$$

E siccome inoltre le A, B, in forza dell' ultima relazione (12), hanno lo stesso ordine, applicando il teor. I, si deduce, se $[AB] > 0$:

$$\lambda A \equiv \lambda B,$$

ove λ è un conveniente intero positivo.

Quest' ultima relazione si può pure scrivere sotto la forma:

$$(14) \qquad \lambda\lambda_1 C_1 + \lambda\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda\lambda_l C_l \equiv 0,$$

ed esprime appunto che le $C_1, C_2, \cdots, C_l$ sono algebricamente legate.

Se poi $[AB] = 0$, si potrà soltanto scrivere la relazione:

$$\lambda C + \lambda A \equiv \lambda C + \lambda B,$$

ove C è una curva qualunque di grado $\geqq 0$, che seghi ciascuna delle A, B (n° 2, Oss. 2ª).

Tuttavia continueremo a dire che le $C_1, C_2, \cdots, C_l$ sono *algebricamente legate*, allargando leggermente il significato di questa locuzione; e scriveremo ancora la relazione simbolica (14).

Osservazione 1ª. — Se però qualcuna delle $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e sia p. e. la C_1, ha il grado virtuale positivo, le curve $C_1 + A$, $C_1 + B$ hanno lo stesso grado virtuale maggior di zero, e di più il numero delle loro intersezioni è uguale al loro grado virtuale; onde risulta:

$$\lambda C_1 + \lambda A \equiv \lambda C_1 + \lambda B,$$

con λ intero positivo conveniente; cioè si ha la relazione:

$$\lambda(1+\lambda_1)C_1 + \lambda\lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda\lambda_t C_t \equiv \lambda C_1 + \lambda\mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \lambda\mu_l C_l;$$

e le $C_1 \cdots C_l$ risultano «algebricamente legate» nel senso più ristretto del § 1.

Osservazione 2ª. Se le $C_1, C_2, \cdots, C_{l-1}$ sono algebricamente distinte, in virtù del teorema dimostrato, non dovranno essere nulli tutti i determinanti d'ordine $l-1$, che si possono estrarre dalla matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_1 C_2 \cdots C_{l-1})$; cioè dalla matrice che si ottiene dalla (11) sopprimendo l'ultima verticale e la penultima orizzontale. E similmente dicasi per $l-2, l-3, \cdots$ curve scelte entro al gruppo $C_1, C_2, \cdots, C_l$.

§ 4.

Criterio trascendente per riconoscere l'esistenza di un legame algebrico tra due o più curve algebriche d'una superficie.

4. Siano $C_1, C_2, \cdots, C_l$ l curve algebriche della superficie F, tra le quali passi il legame:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0,$$

ove le λ sono interi non tutti nulli (e, necessariamente, non tutti dello stesso segno).

Supposto ad es. che siano positive le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ e negative le altre λ, poniamo:

$$\mu_{t+1} = -\lambda_{t+1}, \cdots, \mu_l = -\lambda_l,$$

e fissiamo l'attenzione sulle curve algebricamente equivalenti:

$$A = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t, \quad B = \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l.$$

Dicasi Σ un sistema algebrico ∞^1, contenente totalmente le A, B;

$$\varphi(\xi\eta) = 0$$

la curva algebrica piana (irriducibile) i cui punti rappresentano le curve di Σ; e $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ i punti di φ corrispondenti alle ν curve di Σ, che escono dal punto generico x di F.

Siano a, b i punti di φ che rappresentano le curve A, B, ed ϖ un integrale abeliano di 3ª specie, che si conservi ovunque finito sulla φ, tranne nei punti a, b, ove presenti due singolarità logaritmiche coi periodi polari relativi $+1$ e -1*).

Poichè il gruppo $(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_\nu)$ dipende *razionalmente* dal punto x variabile su F, la somma:

$$\varpi(\xi_1) + \varpi(\xi_2) + \cdots + \varpi(\xi_\nu), \tag{15}$$

si trasformerà in un integrale di Picard:

$$J(x) = \int P dx + Q dy,$$

appartenente alla superficie F di equazione:

$$F(xyz) = 0,$$

(con P, Q funzioni razionali di x, y, z).

Sino a che x non appartiene a nessuna delle due curve A, B, ciascun termine della somma (15) si conserva finito, perchè i punti $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu$ risultano tutti diversi dai punti singolari a, b; ma quando x cade in

*) Cfr. p. e. Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, Gauthier-Villars, 1895); n° 148.

A (o in B) uno dei punti $\xi_1, \cdots, \xi_\nu$ cade in a (o in b), sicchè la somma (15) diviene infinita.

Ne deriva che l'integrale J conservasi finito in ogni punto di F, non appartenente alle A, B; mentre diviene infinito nei punti di queste curve. Ed è facile vedere che in ciascuno di questi ultimi punti si ha una singolarità logaritmica; sicchè l'integrale J risulta di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche A, B (ossia $C_1, C_2, \cdots, C_l$).

Se, invero, il punto x di F si muove sopra una sezione piana *generica* descrivendo un ciclo lineare infinitamente piccolo, che circondi un punto x_1 di C_1, passando pei λ_1 punti infinitamente prossimi ad x_1, segnati sul piano considerato, dalla curva di Σ, infinitamente vicina ad A; dei ν punti di φ, corrispondenti ad x, uno solo si muove nelle vicinanze di a, girando λ_1 volte attorno a questo punto, nel *medesimo verso*. Onde la somma (15), e quindi l'integrale J, aumentano di λ_1 unità; il che significa che x_1 è per J un punto singolare logaritmico, col periodo polare λ_1.

Analogamente si vede che le $C_2, \cdots, C_t, C_{t+1}, \cdots, C_l$ son curve logaritmiche coi relativi periodi

$$\lambda_2 \cdots \lambda_t, \; -\mu_{t+1}, \cdots, -\mu_l, \quad \text{cioè} \quad \lambda_2 \cdots \lambda_t, \lambda_{t+1}, \cdots, \lambda_l.$$

Osservazione. — Se il legame che passa tra le $C_1 \cdots C_l$ è del tipo:

$$C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t \equiv C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l,$$

ove le λ, μ son positive, si fisserà l'attenzione sopra le curve algebricamente equivalenti:

$$A = C + \lambda_1 C_1 \quad + \cdots + \lambda_t C_t,$$
$$B = C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \cdots + \mu_l C_l,$$

e si ragionerà come nel caso precedente; osservando però che la curva C non risulta logaritmica per l'integrale J, costruito come sopra.

Si conclude pertanto che, quando su F si abbiano più curve algebricamente legate, esiste sempre un integrale di 3ª specie, che diviene infinito logaritmicamente nei punti di quelle curve, conservandosi finito in tutti gli altri punti della superficie.

Supponiamo ora, viceversa, che esista su F un integrale semplice J, di 3ª specie, colle sole curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, e dimostriamo che queste curve risultano algebricamente legate.

Dei periodi polari $c_1, c_2, \cdots, c_l$ relativi alle curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, alcuni potranno esser nulli (ed allora le corrispondenti curve o non saranno singolari per J, o saranno curve polari); ma è certo che due almeno delle c son diverse da zero, perchè se una sola c fosse diversa da zero, per $y = \text{cost.}$ non sarebbe nulla la somma dei residui della funzione razionale $\frac{dJ}{dx}$ *).

*) Cfr. ad es. Appell et Goursat, loc. cit., n° 96.

Se D è una curva arbitraria irriducibile della superficie, l'integrale J stacca su D un integrale abeliano di 3ª specie π, che diviene infinito logaritmicamente nei punti dei gruppi $(C_1 D)$, $(C_2 D)$, $\cdots$, $(C_l D)$, e che resta finito in tutti gli altri punti della D. Poichè la somma dei periodi polari di π deve esser nulla, avremo:

$$c_1[C_1 D] + c_2[C_2 D] + \cdots + c_l[C_l D] = 0.$$

Supposto ora che la D sia una curva tale che il sistema lineare $|C_i + D|$ risulti infinito e irriducibile, segando con una curva generica E di questo sistema, avremo similmente:

$$c_1[C_1 E] + c_2[C_2 E] + \cdots + c_l[C_l E] = 0;$$

dalla quale, sottraendo membro a membro la precedente, si ricava:

$$(16) \qquad c_1 n_{1i} + c_2 n_{2i} + \cdots + c_l n_{li} = 0 \quad (i = 1, \cdots, l).$$

Segando infine con un piano generico, si ottiene la relazione:

$$(17) \qquad c_1 m_1 + c_2 m_2 + \cdots + c_l m_l = 0,$$

ove $m_1, m_2, \cdots, m_l$ son gli ordini delle curve logaritmiche.

Poichè le equazioni (16), (17) coesistono per valori non tutti nulli delle c, dovrà esser nulla la matrice dei loro coefficienti, che è precisamente la matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_1\, C_2 \cdots C_l)$; e quindi, pel teor. II, le curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$ risulteranno algebricamente legate.

Riassumendo otteniamo il

Teorema III. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè più curve algebriche $C_1, C_2, \cdots, C_l$ tracciate sopra una superficie F, siano algebricamente legate, è che esista su F un integrale semplice di 3ª specie, il quale divenga infinito logaritmicamente soltanto nei punti di $C_1, \cdots, C_l$.*

5. Un' osservazione notevole s'impone a proposito del teorema precedente.

Siano I, J due integrali di 3ª specie possedenti le stesse curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$. Se in corrispondenza ad una medesima di queste curve, e sia p. e. la C_1, i due integrali hanno periodi polari non nulli, si potrà sempre determinare una costante non nulla k, in guisa che l'integrale:

$$I' = J - kI,$$

non possegga più la curva logaritmica C_1. Ma allora due casi possono presentarsi: o I' non è un integrale di 3ª specie, oppure possiede ancora delle singolarità logaritmiche (necessariamente lungo alcune delle curve $C_2, \cdots, C_l$).

Nel 1° caso i periodi polari di J saranno proporzionali ai periodi polari di I, secondo il coefficiente k; nel 2° caso le curve $C_2, C_3, \cdots, C_l$ risulteranno algebricamente legate.

Se dunque non è nulla la matrice discriminante dell' aggruppamento $(C_2, \cdots, C_l)$, cioè se le curve $C_2, \cdots, C_l$ sono algebricamente distinte, l'integrale di 3ª specie più generale avente le curve logaritmiche $C_1, \cdots, C_l$ (col periodo *necessariamente* non nullo lungo C_1), si otterrà da un particolare integrale, che possegga le stesse curve logaritmiche, moltiplicandolo per una costante arbitraria ed aggiungendo al prodotto un qualunque integrale di 2ª specie.

Tra gl' integrali che divengono infiniti logaritmicamente lungo $C_1, C_2, \cdots, C_l$, ce n'è uno (determinato a meno d'un integrale di 2ª specie addittivo), il quale ha per periodi polari i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ del legame, che, in virtù del teor. III, intercede tra le l curve logaritmiche. Quest' integrale si costruisce nel modo indicato al principio del n° precedente.

Segue dalle osservazioni premesse, che ogni integrale di 3ª specie colle curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$, ha i periodi polari proporzionali ai numeri interi $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$.

Alla stessa conclusione si perviene direttamente, osservando che i periodi polari $c_1, c_2, \cdots, c_l$ ed i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, essendo due sistemi di soluzioni delle equazioni lineari:

$$n_{i1}x_1 + n_{i2}x_2 + \cdots + n_{il}x_l = 0, \quad (i = 1, \cdots, l)$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_l x_l = 0,$$

son proporzionali ai complementi algebrici (supposti non tutti nulli) degli elementi di una orizzontale, appartenente ad un determinante d'ordine l, estratto dalla matrice.

Si conclude col

Teorema IV. *Se la matrice discriminante delle l curve $C_1, C_2, \cdots, C_l$, tracciate sulla superficie F, ha la caratteristica $l-1$, ciascuno degl' infiniti integrali semplici di 3ª specie, che posseggono le sole curve logaritmiche $C_1, \cdots, C_l$, ha i periodi polari rispettivamente proporzionali ai coefficienti del legame algebrico che intercede tra le l curve date.*

§ 5.

Caratterizzazione geometrica delle superficie i cui integrali semplici di 3ª specie riduconsi a combinazioni algebrico-logaritmiche.

6. Confrontando le più importanti proprietà delle *curve razionali* e delle *superficie algebriche regolari*, un' analogia stretta si riscontra, da vari punti di vista, tra queste due classi di enti algebrici.

Infatti una curva razionale è *caratterizzata* dalle proprietà seguenti:

a) La superficie di Riemann, immagine della curva, è semplicemente connessa, cioè ogni cammino chiuso in essa tracciato, può ridursi ad un punto per deformazione continua.

b) Ogni sistema continuo di gruppi di n punti sopra una curva razionale, è contenuto nella serie *lineare* di tutti i gruppi di n punti della curva.

D'altra parte una superficie regolare è *caratterizzata* dalle seguenti proprietà, perfettamente analoghe alle precedenti:

a') La varietà riemanniana reale a 4 dimensioni, immagine della superficie complessa, è linearmente uniconnessa, cioè ogni cammino chiuso in essa tracciato, può ridursi ad un punto per deformazione continua.*)

b') Ogni sistema continuo di curve algebriche sopra una superficie regolare, è contenuto in un sistema *lineare* di curve dello stesso ordine.**)

Un' altra proprietà che pure caratterizza le curve razionali, è che gl' integrali abeliani di 3ª specie, appartenenti ad una tal curva, riduconsi tutti quanti a combinazioni algebrico-logaritmiche.

Orbene, anche di quest' ultima proprietà sussiste l'analoga per le superficie regolari, come si vedrà dimostrato in questo paragrafo.

7. Sia F una superficie regolare, e sia J un qualunque integrale semplice di 3ª specie, ad essa appartenente.

Se $C_1, C_2, \cdots, C_l$ son le curve logaritmiche di J, poichè sulla F ogni sistema algebrico di curve algebriche è contenuto totalmente in un sistema lineare, pel teor. III, avremo tra le C il legame *lineare:*

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_l C_l \equiv 0;$$

il che significa che, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ sono interi positivi e

$$\lambda_{t+1}(= -\mu_{t+1}), \cdots, \lambda_l(= -\mu_l)$$

interi negativi, esisterà su F una funzione razionale $R(xyz)$, la quale si annullerà soltanto nei punti di $C_1, \cdots, C_t$, cogli ordini rispettivi $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$, e diverrà infinita soltanto nei punti di $C_{t+1}, \cdots, C_l$, cogli ordini rispettivi $\mu_{t+1}, \cdots, \mu_l$.

*) Che per ogni superficie regolare si verifichi questa proprietà, è enunciato nella mia Nota, *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie* (Rendiconti dei Lincei, settembre 1904), e dimostrato nella mia Memoria dallo stesso titolo, inserita in questi „Annalen" (Bd. 61, 1905). Che, viceversa, una superficie dotata della proprietà a') sia regolare, risulta, dopo le ricerche dei sigg. Humbert e Picard, dal teorema b') di Enriques.

**) Enriques, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie regolare* (Rendiconti di Palermo, 1899); e *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della R. Acc. di Bologna, Decembre 1904).

Onde l'integrale di 3ª specie:

$$I = \log R(xyz) = \int \frac{1}{R} \left(\frac{dR}{dx} dx + \frac{dR}{dy} dy \right),$$

possiederà le sole curve logaritmiche $C_1, C_2, \cdots, C_l$.

Detti $i_1, i_2, \cdots, i_l$ i periodi polari di I lungo queste curve logaritmiche, ed $j_1, j_2, \cdots, j_l$ i periodi polari di J lungo le stesse curve, scegliamo una i diversa da zero*), e sia p. e. i_1, e formiamo quindi l'integrale:

$$J_1 = J - \frac{j_1}{i_1} I.$$

Se con questa sottrazione spariscono da J tutte le curve logaritmiche, J_1 si ridurrà certo ad una funzione razionale $S(xyz)$, perchè sulla F, a causa della regolarità, non esistono integrali trascendenti della 2ª specie. Avremo quindi:

$$J = \frac{j_1}{i_1} \log R(xyz) + S(xyz),$$

cioè J si ridurrà ad una combinazione algebrico-logaritmica.

Se, invece, l'integrale J_1 è ancora di 3ª specie, poichè per esso la C_1 non è più curva logaritmica, le curve $C_2, \cdots, C_l$ saranno linearmente legate (teor. III); e quindi si potrà costruire un'altra funzione razionale $R_1(xyz)$, i cui zeri ed i cui poli cadano soltanto nei punti delle $C_2, \cdots, C_l$. Detti $i_2', \cdots, i_l'$ i periodi polari dell' integrale:

$$I_1 = \log R_1(xyz)$$

lungo le $C_2, \cdots, C_l$, si sceglierà ancora una i' diversa da zero, e sia p. e. i_2', e si costruirà l'integrale:

$$J_2 = J_1 - \frac{j_2 i_1 - j_1 i_2}{i_1 i_2'} I_1,$$

dotato (al più) delle curve logaritmiche $C_3, \cdots, C_l$.

Se J_2 è di 2ª specie, avremo:

$$J = \frac{j_1}{i_1} \log R(xyz) + \frac{j_2 i_1 - j_1 i_2}{i_1 i_2'} \log R_1(xyz) + S_1(xyz),$$

ove S_1 è una funzione razionale. Se J_2 è ancora di 3ª specie, le curve $C_3, \cdots, C_l$ saranno linearmente legate; ecc.

Così proseguendo, per successive sottrazioni di logaritmi di funzioni razionali, si fanno sparire da J tutte le singolarità logaritmiche, e resta come differenza una funzione razionale.

---

*) Non si esclude che alcune delle λ, e quindi alcune delle i (ma non tutte) possano esser nulle.

Si conclude pertanto che «sulla superficie F ogni integrale semplice di 3ª specie, riducesi ad una combinazione algebrico-logaritmica.»

Se, viceversa, gl'integrali di 3ª specie appartenenti ad una superficie F, riduconsi a combinazioni algebrico-logaritmiche, alla F non potranno appartenere integrali trascendenti di 2ª specie, e quindi la superficie sarà regolare.*)

Riassumendo, abbiamo dunque il

Teorema V. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè gl'integrali di Picard della 3ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica, riducansi a combinazioni algebrico-logaritmiche, è che la superficie sia regolare.*

Dal punto di vista dell' *Analysis situs* la condizione precedente si può esprimere dicendo che «*la superficie deve avere l'ordine di connessione lineare* $p_1 = 1$.»

Nei casi particolari *il procedimento indicato nella dimostrazione servirà ad effettuare, mediante operazioni razionali e logaritmiche, l'integrazione di ogni differenziale esatto del tipo:*

$$Adx + Bdy,$$

ove A, B *son funzioni razionali appartenenti ad una data superficie regolare.*

Restano così estese quelle regole, che nel calcolo elementare conducono all' integrazione, mediante operazioni razionali e logaritmiche, di ogni funzione razionale di una variabile, o, più generalmente, di ogni funzione razionale appartenente ad una data curva razionale.

§ 6.

Sull' esistenza di una base per la totalità delle curve algebriche appartenenti ad una superficie.

8. La proposizione fondamentale della teoria degl' integrali semplici di 3ª specie, è senza dubbio la seguente, dovuta al sig. Picard:

Per ogni superficie algebrica F esiste un numero intero positivo ϱ, tale che, prese comunque su F $\varrho+1$ curve algebriche, si può costruire un integrale semplice di 3ª specie appartenente alla superficie e non avente singolarità logaritmiche fuori delle $\varrho+1$ curve; mentre il fatto analogo non si verifica per tutti i gruppi di ϱ curve della superficie.

In virtù del teor. III ciò significa che sulla F $\varrho+1$ curve son sempre algebricamente legate, mentre esistono su F gruppi di ϱ curve algebricamente distinte.

Dette $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ ϱ curve di F, la cui matrice discriminante sia

---

*) Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie* . . .

diversa da zero, cioè che siano distinte algebricamente, se C è una curva arbitraria della superficie, avremo dunque:

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \equiv 0,$$

con $\lambda \neq 0$. Perveniamo così al

Teorema VI. *Se F è una superficie algebrica qualunque, si possono fissare su F ϱ curve algebricamente distinte, tali che ogni altra curva della superficie sia algebricamente legata ad esse.*

L'insieme delle ϱ curve (algebriche) distinte, si dirà una *base* per la totalità delle curve algebriche della superficie F, ed il carattere ϱ si dirà il *numero-base* della superficie.

Osservazione. — Supponendo, com' è lecito, che qualcuna delle curve della base abbia il grado > 0, la frase «algebricamente legata», che appare nell' enunciato del teor. VI, ha senza dubbio il significato introdotto nel § 1, e non già quello più ampio introdotto verso la fine del § 3 (ved. l'Oss. 1ª del nº 3).

Se la superficie F è regolare, e quindi sopra essa ogni sistema continuo di curve appartiene totalmente ad un sistema lineare, il legame algebrico di cui parla il teor. VI, si ridurrà ad un legame lineare; sicchè sotto forma algebrica potremo enunciare quanto segue:

Detto ϱ il numero-base di una superficie regolare F, si fissino sulla F ϱ curve tali che non esista nessuna funzione razionale, i cui poli e i cui zeri siano complessivamente distribuiti soltanto lungo le ϱ curve fissate: allora, scelta comunque un' altra curva della F, esiste sempre una funzione razionale che non si annulla nè diviene infinita fuori delle $\varrho + 1$ curve considerate.

9. Si può riavvicinare il teor. VI ad un'ovvia proprietà delle serie di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.

Invero, fissato un punto di una data curva algebrica, ogni gruppo di n punti della curva è algebricamente legato al punto fissato, perchè questo punto, ripetuto n volte, sta in un medesimo sistema algebrico col dato gruppo di n punti.

Se la curva è razionale, il sistema algebrico di tutti i gruppi di n punti della curva, è lineare, e si ricade nella proprietà analoga a quella sopra rilevata per le superficie regolari.

Ma sulle curve non ha importanza la considerazione della base e del numero-base, che vale sempre 1.

10. Dimostriamo ora il

Teorema VII. *Se ϱ è il numero-base d'una superficie F, la condizione necessaria e sufficiente affinchè ϱ curve della superficie formino una base (cioè siano algebricamente distinte), è che sia diverso da zero il determinante relativo alle ϱ curve.*

Siano $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ le curve di una base e $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ le curve di un' altra base.

Avremo allora le relazioni:

$$\lambda_i\Gamma_i + \lambda_{1i}C_1 + \lambda_{2i}C_2 + \cdots + \lambda_{\varrho i}C_\varrho \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho)$$

donde si traggono le uguaglianze numeriche:

$$(18) \quad \begin{cases} \lambda_i n'_{ik} + \lambda_{1i}n_{1k} + \lambda_{2i}n_{2k} + \cdots + \lambda_{\varrho i}n_{\varrho k} = 0, & (k = 1, \cdots, \varrho), \\ \lambda_i \nu_{il} + \lambda_{1i}n'_{l1} + \lambda_{2i}n'_{l2} + \cdots + \lambda_{\varrho i}n'_{l\varrho} = 0, & (l = 1, \cdots, \varrho), \end{cases}$$

ove si è posto:

$$n_{ik} = [C_iC_k], \quad n'_{ik} = [\Gamma_iC_k], \quad \nu_{il} = [\Gamma_i\Gamma_l].$$

Il *determinante* della base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ è:

$$D = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1\varrho} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{\varrho 1} & n_{\varrho 2} & \cdots & n_{\varrho\varrho} \end{vmatrix};$$

ed il determinante della base $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho)$ è:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_{\varrho 1} & \nu_{\varrho 2} & \cdots & \nu_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Ora, in virtù delle (18) e della regola di moltiplicazione dei determinanti, si ha:

$$(19) \qquad (\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_\varrho)^2\Delta = \Lambda^2 D,$$

ove:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1\varrho} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{\varrho 1} & \lambda_{\varrho 2} & \cdots & \lambda_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}.$$

Dalla (19) si rileva facilmente che «se è nullo il determinante di una base, son nulli i determinanti di tutte le altre basi.»

Invero, nessuna delle $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho$ può esser nulla, perchè altrimenti le $C_1, \cdots, C_\varrho$ non sarebbero distinte; e quindi se fosse $D = 0$, sarebbe necessariamente $\Delta = 0$.

Viceversa, scambiando l'ufficio delle due basi, si vede che se fosse $\Delta = 0$, sarebbe di conseguenza $D = 0$.

Ora proviamo che si può sempre scegliere una base a cui spetti un determinante non nullo.

Infatti, quando si costruisce la base $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho$, si può cominciare a

scegliere una curva *del tutto* arbitraria della superficie; poi una curva che non sia legata algebricamente alla precedente, e così continuando. Possiamo dunque supporre che la prima curva scelta Γ_1, sia una sezione piana della superficie.

Allora gli ordini delle $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\varrho$ risulteranno rispettivamente uguali ai numeri $\nu_{11}, \nu_{12}, \cdots, \nu_{1\varrho}$, onde la matrice discriminante dell' aggruppamento $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho)$ sarà:

$$\left|\begin{array}{cccc} \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \cdots & \nu_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_{\varrho 1} & \nu_{\varrho 2} & \cdots & \nu_{\varrho\varrho} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1\varrho} \end{array}\right|.$$

Poichè questa matrice ha evidentemente la stessa caratteristica del determinante Δ, in forza del teor. II, si conclude che se fosse $\Delta = 0$, le curve $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\varrho$ sarebbero algebricamente legate, e quindi non potrebbero costituire una base.

Dunque è $\Delta \neq 0$, e quindi è anche diverso da zero il determinante D di ogni altra base.

Osservazione 1ª. — Poichè il 1° membro della (19) non è nullo, sarà anche $\Lambda \neq 0$; onde i determinanti D, Δ avranno lo stesso segno.

Si conclude che *i determinanti delle varie basi hanno tutti lo stesso segno.*

Osservazione 2ª. — Quando sia $\varrho = 1$, ogni curva della superficie F si potrà assumere come base, e il determinante relativo si ridurrà al grado virtuale della curva. Ne deriva che ogni curva della superficie avrà il grado virtuale diverso da zero, ed anzi positivo (Oss. 1ª), perchè sulla F esistono certamente curve col grado positivo. Dunque:

Se il numero-base di una superficie è uguale ad 1, *ogni curva della superficie ha il grado virtuale maggior di zero.*

§ 7.

Effetto di una trasformazione birazionale sulla base e sul numero-base.

11. Se una superficie F si muta in una superficie F' mediante una trasformazione birazionale che sia priva di punti fondamentali su entrambe le superficie, è ben chiaro che ogni base delle curve di F si muta in una base delle curve di F'; e viceversa.

Il numero-base rimarrà dunque invariato dopo una tale trasformazione.*)

---

*) Picard et Simart, t. II, pag. 242.

Supponiamo invece che nel passaggio da F ad F' s'introduca la curva eccezionale E', corrispondente al punto (semplice) E di F, senza peraltro che alcuna curva (eccezionale) di F si muti in un punto di F'; e diciamo $(C_1, \cdots, C_\varrho)$ le ϱ curve di una base della superficie F.

Nel caso che nessuna delle C passi per E, le curve $C_1', \cdots, C_\varrho'$ corrispondenti alle $C_1, \cdots, C_\varrho$, saranno irriducibili, al pari delle C, e nessuna di esse incontrerà la curva E'. Ogni curva D' di F', che non incontri la E', essendo la trasformata di una curva D di F non passante per E, risulterà algebricamente legata a $C_1', \cdots, C_\varrho'$. Se invece la curva D' incontra E', la curva composta $D' + E'$ sarà la trasformata di una curva D di F passante per E; onde si avrà un legame algebrico tra la curva $D' + E'$ e le curve $C_1', \cdots, C_\varrho'$, cioè un legame algebrico tra la D' e le curve $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$.

Nel caso in cui una delle C, e sia p. e. C_1, passi per E (colla molteplicità s), indicando con C_1' la trasformata di C_1, astrazion fatta dalla curva E' corrispondente ad E, e con $C_2', \cdots, C_\varrho'$ le trasformate di $C_2, \cdots, C_\varrho$, ogni curva D' di F' risulta algebricamente legata alle curve $sE' + C_1', \cdots, C_\varrho'$, cioè alle $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$.

Ad una conclusione analoga si perviene quando più curve C passino per E.

Si può ora vedere facilmente che, in ognuno dei due casi considerati, le curve $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$ sono algebricamente distinte, e quindi costituiscono una base sulla superficie F'. Cominciamo perciò dall' osservare che, in forza dell' ipotesi che la corrispondenza tra F, F' sia priva di punti fondamentali sulla F', la E' è una curva eccezionale di 1ª specie.*)

Nel 1° caso si ha dunque:

$$[E'C_i'] = 0 \ (i = 1, \cdots, \varrho), \quad [E'E'] = -1, \quad [C_i'C_k'] = [C_iC_k];$$

onde il determinante Δ' dell' aggruppamento $(E', C_1', \cdots, C_\varrho')$, si ottiene orlando il determinante Δ della base $(C_1, \cdots, C_\varrho)$ con una orizzontale e con una verticale, che hanno -1 per elemento comune e tutti gli altri elementi nulli. Sicchè risulta

$$\Delta' = -\Delta;$$

e poichè $\Delta \neq 0$, anche $\Delta' \neq 0$, e quindi (teor. II) le $(E', C_1', \cdots, C_\varrho')$ saranno algebricamente distinte.

---

*) Ricordo che una *curva eccezionale* dicesi di 1ª *specie*, quando con una trasformazione birazionale della superficie, la si può mutare in un punto semplice, senza che, necessariamente, qualche suo punto si muti in una curva; mentre dicesi di 2ª *specie* nel caso contrario. Cfr. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, (3), t. 6, 1901); n° 8.

Nel 2° caso si ha:

$$[E'C_1'] = s, \quad [E'C_i'] = 0 \ (i = 2, \cdots, \varrho), \quad [E'E'] = -1,$$

$$[C_1'C_1'] = [C_1C_1] - s^2,$$

e inoltre:

$$[C_i'C_k'] = [C_iC_k]$$

per $i, k = 1, \cdots, \varrho$, eccettuata la coppia $i = 1, k = 1$.

Dicendo ancora Δ' il determinante dell' aggruppamento

$$(E', C_1', \cdots, C_\varrho'),$$

verrà dunque:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -1 & s & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ s & [C_1C_1] - s^2 & [C_1C_2] & \cdots & [C_1C_\varrho] \\ 0 & [C_2C_1] & [C_2C_2] & \cdots & [C_2C_\varrho] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & [C_\varrho C_1] & [C_\varrho C_2] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = -\Delta,$$

e quindi le $E', C_1', \cdots, C_\varrho'$ saranno algebricamente distinte.

Si osservi infine che tra le $\varrho + 1$ curve di una base qualunque della superficie F', deve sempre esservi la curva eccezionale E', perchè altrimenti a quelle $\varrho + 1$ curve corrisponderebbero su F altrettante *curve* algebricamente distinte. Si conclude pertanto col

Teorema VIII. *Se la superficie F si muta birazionalmente in una superficie F', mediante una trasformazione che possegga e' punti fondamentali in punti semplici di F, e nessun punto fondamentale su F', il numero-base di F' supera di e' unità il numero-base ϱ di F, e, sulla F', tra le curve di una base qualunque vi sono sempre le e' curve eccezionali (di 1ª specie), corrispondenti ai punti fondamentali.*

Viceversa, se alle curve di F' che corrispondono birazionalmente alle curve di una base della F, si aggiungono le e' curve eccezionali, si ottiene una base sopra F', e tra i determinanti Δ, Δ' delle due basi si ha la relazione:

$$\Delta' = (-1)^{e'} \Delta.$$

In quest' enunciato abbiamo considerato il caso generale che nel passaggio da F ad F' s'introducano $e' \geqq 1$ curve eccezionali, perchè, se $e' > 1$, la trasformazione birazionale che intercede tra F ed F', si può evidentemente riguardare come prodotto di più trasformazioni birazionali, in ciascuna delle quali s'introduca una sola curva eccezionale.

Osservazione. — Il teorema VIII permette di passare subito alla considerazione di una corrispondenza birazionale che possegga $e' \geqq 1$ punti fondamentali su F ed $e \geqq 1$ punti fondamentali su F'; giacchè, indicando con Φ una superficie birazionalmente identica ad F, e sulla quale

gli e' punti fondamentali di F si siano trasformati in altrettante curve eccezionali (di 1ª specie), senza che alcuna curva eccezionale di F si sia trasformata in un punto, la corrispondenza birazionale tra F e F' può riguardarsi come prodotto delle corrispondenze tra F, Φ e Φ, F', prive di punti fondamentali sulla superficie Φ.

Abbiamo dunque tra i numeri-base ϱ, ϱ' di F, F' la relazione:

$$(20) \qquad \varrho + e' = \varrho' + e.\text{*)}$$

12. Il caso che ci resta da esaminare, in cui una trasformazione birazionale della F introduca una curva eccezionale di 2ª specie, si può presentare soltanto quando F sia riferibile ad una rigata (o, in particolare, ad una superficie razionale).**)

Ma in tal caso sussiste il teorema:

«Sopra una superficie F riferibile ad una rigata, la base è costituita da una generatrice (cioè da una curva razionale corrispondente ad una retta generatrice della rigata), da una curva unisecante le generatrici, e da quelle eventuali curve eccezionali di 1ª specie, che si staccano come parti dalle generatrici.» ***)

Sicchè l'introduzione di una curva eccezionale di 2ª specie, non modifica nè la *natura* della base, nè il valore del numero-base.

13. Riassumendo si può enunciare il

Teorema IX. *Il numero-base ϱ è un invariante relativo, cioè non s'altera per quelle trasformazioni birazionali che non introducono curve eccezionali di 1ª specie.*

Se e è il numero delle curve eccezionali (di 1ª specie) di una superficie non riferibile ad una rigata, il numero $\varrho - e$ è un invariante assoluto. Dunque, data una classe di superficie birazionalmente identiche, ϱ assume il valor minimo su quelle superficie della classe, che son prive di curve eccezionali di 1ª specie.

Per le superficie razionali e, più generalmente, per le superficie riferibili ad una rigata, il numero $\varrho - e$ non è un invariante assoluto, perchè nella trasformazione di uno o più punti in altrettante curve eccezionali di 1ª specie, si presenta talora qualche altra curva eccezionale di 1ª specie,

---

*) Cfr. Picard, *Sur une formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique* (Annales de l'École Normale (3), t. 21, 1905); nº 21.

**) Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali* . . .

***) Ved. il nº 14 della mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica* . . ., ove il teorema richiamato è enunciato sotto forma diversa (più espressiva). — Si noti che, se la rigata è irrazionale, ogni curva eccezionale di F è una generatrice (se di 2ª specie) o parte d'una generatrice (se di 1ª specie).

trasformata di una curva eccezionale di 2ª specie, che passi per alcuni punti fondamentali.

Tuttavia *anche per le superficie riferibili alle rigate, ϱ assume il valor minimo sulle superficie prive di curve eccezionali di* 1ª *specie:* e precisamente il valore 1 (sul piano) se la rigata è razionale, il valore 2 (sulla rigata) se la rigata è irrazionale.

A proposito del carattere d'invarianza del numero-base ϱ, ricorderò che ϱ è legato ad altri caratteri invarianti della superficie, dalla notevolissima *relazione di Picard**):

$$\varrho_0 = I + 4q - \varrho + 2,$$

ove ϱ_0 è il numero degl' integrali doppi di 2ª specie, appartenenti alla superficie, *I l'invariante di Zeuthen-Segre***), e $q\ (= p_g - p_a)$ l'irregolarità della superficie medesima.***)

Ad esempio per una superficie razionale l'invariante assoluto $I - \varrho$ vale -2, q vale 0, onde $\varrho_0 = 0$: com' è del resto evidente a priori.

Per una rigata irrazionale di genere p,

$$I = -4p, \quad \varrho = 2, \quad q = p,$$

onde risulta $\varrho_0 = 0$; cioè *una superficie riferibile ad una rigata è priva d'integrali doppi di* 2ª *specie.*†)

14. La considerazione della base dà luogo ad un altro invariante.

Risulta infatti dall' Osservazione con cui termina il nº 11 che, se le due superficie F, F' son riferite birazionalmente in guisa che e' punti semplici di F si mutino in altrettante curve eccezionali (di 1ª specie) di F', mentre e curve eccezionali (di 1ª specie) di F si mutano in altrettanti punti semplici di F', tra il determinante Δ di una base di F e il determinante Δ' della base *corrispondente* di F' (costituita dalle trasformate delle curve che dànno la base su F — astrazion fatta da quelle che si mutano in punti — coll' aggiunta delle curve eccezionali di F' corrispondenti agli e' punti fondamentali di F), passa la relazione:

(21) $$(-1)^e \Delta' = (-1)^{e'} \Delta.$$

*) Picard, *Sur une formule générale* . . ., nº 18.

**) Per la definizione di quest' invariante, ved. ad es. Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali* . . .; nº 6.

***) Veramente nella relazione originaria di Picard, in luogo del termine $4q$ c'è il termine $2r$, ove r è il numero degl' integrali semplici di 2ª specie appartenenti alla superficie. Dalle ricerche mie e dei sigg. Enriques e Castelnuovo risulta appunto la relazione:

$$r = 2q.$$

†) La contemporanea mancanza d'integrali semplici e d'integrali doppi di 2ª specie, basterà a caratterizzare le superficie razionali?

Fissiamo ora l'attenzione sulle basi di F e di F' alle quali spettano determinanti aventi il minimo valore assoluto.

Dalla (21) risulta che questi valori minimi, relativi alle due superficie, sono identici; onde si può enunciare il

Teorema X. *Il minimo valore assoluto dei determinanti delle varie basi che si possono costruire sopra una superficie algebrica, rimane immutato per qualunque trasformazione birazionale della superficie.*

Quest' invariante assoluto è un numero intero non inferiore ad 1 (Teor. VII). Sulle superficie razionali e sulle rigate vale precisamente 1.

§ 8.

Il teorema di Bézout sopra una superficie algebrica qualunque. Espressioni del grado e del genere di una curva tracciata sulla superficie.

15. Sul piano il teorema di Bézout dà il modo di calcolare il numero dei punti comuni a due curve algebriche qualunque, in funzione di caratteri (gli *ordini*) in cui non entra la considerazione simultanea delle due curve.

Sopra una superficie algebrica F, la questione analoga si può porre nei termini seguenti: Definire un sistema di caratteri di ogni singola curva algebrica della superficie, in guisa che il numero dei punti comuni a due curve di F, si esprima soltanto mediante i caratteri della superficie ed i caratteri definiti delle due curve; e assegnare l'effettiva espressione di quel numero.*)

Diciamo $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$ una base delle curve tracciate sulla superficie algebrica F, e C, D altre due curve qualunque della superficie, legate alla base dalle relazioni:

$$\lambda C + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_\varrho C_\varrho \equiv 0, \tag{22}$$

$$\mu D + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\varrho C_\varrho \equiv 0. \tag{23}$$

Dalle (22), (23) si traggono le uguaglianze numeriche:

$$\lambda\,[CD] + \lambda_1 [C_1 D] + \cdots + \lambda_\varrho [C_\varrho D] = 0,$$

$$\mu [C_i D] + \mu_1 [C_1 C_i] + \cdots + \mu_\varrho [C_\varrho C_i] = 0 \quad (i = 1, \cdots, \varrho).$$

Eliminando tra queste $\varrho + 1$ relazioni lineari, le quantità

$$[C_1 D], \cdots, [C_\varrho D],$$

*) Cfr. per l'ordine d'idee del testo la mia Memoria, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche*, ecc. (Memorie della R. Acc. di Torino, (2), t. 52, 1902); n° 26; nonchè l'altra mia Memoria citata, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica* ...

viene:

$$[CD] = \frac{1}{\lambda\mu} \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k [C_i C_k], \tag{24}$$

ove il sommatorio è esteso a tutte le disposizioni binarie con ripetizione degli indici $1, 2, \cdots, \varrho$.

Abbiamo dunque il

Teorema XI. *Sopra una superficie algebrica qualunque si abbiano due curve algebriche C, D, legate rispettivamente alla base $(C_1, C_2, \cdots, C_\varrho)$, secondo i numeri interi:*

$$(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\varrho), \quad (\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\varrho):$$

allora il numero dei punti comuni alle curve C, D è espresso dalla formola:

$$\frac{1}{\lambda\mu} \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k [C_i C_k] \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho).$$

In particolare sul piano, dicendo C_1 una retta, e C, D due curve qualunque di ordini rispettivi m, n, si hanno le relazioni:

$$C - mC_1 \equiv 0, \qquad D - nC_1 \equiv 0,$$

cioè le curve C, D son legate alla base (C_1) secondo i numeri $(1, -m)$, $(1, -n)$. Poichè $[C_1 C_1] = 1$, la (24) dà:

$$[CD] = mn,$$

che è l'ordinario teorema di Bézout.

Dalla (22) discendono pure le equazioni lineari omogenee nelle $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$:

$$\begin{aligned} \lambda[CD] + \lambda_1[C_1 D] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho D] &= 0, \\ \lambda[CC_1] + \lambda_1[C_1 C_1] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_1] &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda[CC_\varrho] + \lambda_1[C_1 C_\varrho] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_\varrho] &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando tra queste le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$, si ha

$$\begin{vmatrix} [CD] & [C_1 D] & \cdots & [C_\varrho D] \\ [C_1 C] & [C_1 C_1] & \cdots & [C_\varrho C_1] \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ [C_\varrho C] & [C_1 C_\varrho] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\Delta[CD] - \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][DC_k] = 0 \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho), \tag{25}$$

ove Δ è il determinante della base $(C_1, \cdots, C_\varrho)$, e Δ_{ik} è il complemento algebrico dell' elemento $[C_i C_k]$ nel determinante Δ. Poichè $\Delta \neq 0$ (Teor. VII), dalla (25) si trae:

$$[CD] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][DC_k] \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho), \tag{26}$$

e si più enunciare il

Teorema XII. *Se sopra una superficie F le curve $C_1, \cdots, C_\varrho$ costituiscono una base, il numero dei punti comuni a due curve algebriche qualunque C, D della superficie, è espresso dalla formola:*

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][DC_k] \quad (i, k = 1, \cdots, \varrho),$$

ove Δ è il determinante della base e Δ_{ik} è il complemento algebrico dell' elemento $[C_i C_k]$ nel determinante Δ.

In particolare sul piano, assumendo come base (C_1) una retta, si ha $\Delta = \Delta_{11} = 1$, onde risulta ancora:

$$[CD] = [CC_1][DC_1].$$

I ϱ numeri interi (positivi o nulli) $[CC_i]$ si possono chiamare, per analogia, *gli ordini della curva C sulla superficie F.*

16. Dalle formole (24), (26) si traggono facilmente due espressioni del grado virtuale di una curva C tracciata sopra una superficie F.

Invero, se la C appartiene ad un sistema lineare infinito (o ad un sistema continuo), assumendo come curva D un' altra curva del sistema, si ha:

$$[CC] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k [C_i C_k], \tag{24'}$$

$$[CC] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i,k} \Delta_{ik} [CC_i][CC_k]. \tag{26'}$$

Ma le stesse formole valgono anche se C è isolata, come si vede aggiungendo a C una curva E, tale che il sistema lineare $|D| = |C + E|$ risulti almeno ∞^1, ed osservando che per definizione:

$$[CC] = [CD] - [CE].$$

Dunque: *Il grado virtuale di una curva C, sulla quale non si assegnino punti base, viene espresso in funzione dei coefficienti della relazione che lega C alle curve della base, oppure in funzione degli ordini di C, mediante le formole* (24'), (26').

Se sulla C si assegna un punto base s-plo, il grado virtuale diminuisce di s^2 unità.

17. Valutiamo ora il genere virtuale della curva C, in funzione dei coefficienti λ o degli ordini di C. Dicendo $|E|$ un sistema lineare della superficie F ed $|E'|$ il sistema aggiunto ad $|E|$, è noto che la differenza $[CE'] - [CE]$ è indipendente dalla scelta del sistema $|E|$, e vale $2\pi - 2 - n$, ove π, n sono il genere e il grado virtuali della C. — Nel caso che sulla F esista il sistema canonico, $[CE'] - [CE]$ dà il numero complessivo delle intersezioni di C con una curva canonica e colle curve eccezionali di F.

Dalla (22), segando prima con E' e poi con E, e quindi sottraendo le uguaglianze numeriche che così si ottengono, si trae:

$$\lambda\Theta + \lambda_1\Theta_1 + \cdots + \lambda_\varrho\Theta_\varrho = 0, \tag{27}$$

ove si è posto:

$$\Theta = 2\pi - 2 - n, \qquad \Theta_i = 2\pi_i - 2 - n_{ii},$$

π_i, n_{ii} essendo il genere ed il grado della curva C_i.

Ricordando la (24'), dalla (27) si ricava la:

$$\pi = \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k[C_iC_k] - \frac{1}{2\lambda}(\lambda_1\Theta_1 + \cdots + \lambda_\varrho\Theta_\varrho) + 1 \tag{28}$$

Un' altra espressione di π si può ottenere eliminando le $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_\varrho$ tra la (27) e le equazioni lineari:

$$\lambda[CC_i] + \lambda_1[C_1C_i] + \cdots + \lambda_\varrho[C_\varrho C_i] = 0, \quad (i = 1, \cdots, \varrho).$$

Si ha, come condizione di coesistenza delle $\varrho + 1$ equazioni:

$$\begin{vmatrix} \Theta & \Theta_1 & \cdots & \Theta_\varrho \\ [CC_1] & [C_1C_1] & \cdots & [C_\varrho C_1] \\ [CC_2] & [C_1C_2] & \cdots & [C_\varrho C_2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [CC_\varrho] & [C_1C_\varrho] & \cdots & [C_\varrho C_\varrho] \end{vmatrix} = 0;$$

donde, mediante la (26'), si trae:

$$\pi = 1 + \frac{1}{2\Delta}\sum_{i,k}\Delta_{ik}[CC_k](\Theta_i + [CC_i]), \tag{29}$$

ove Δ, Δ_{ik} hanno il solito significato.

Se la C possiede punti multipli, e tra questi se ne *assegnano* tanti che *equivalgano* a d punti doppi, il genere virtuale $\bar{\pi}$ della C viene espresso dalla formola:

$$\bar{\pi} = \pi - d,$$

ove π è dato dalla (28) o dalla (29).

In particolare sul piano si ha la formola:

$$\bar{\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

che esprime il genere virtuale di una curva d'ordine n, sulla quale si assegnino d punti doppi.

Si conclude pertanto che: *Il genere virtuale d'una curva C, priva di punti base assegnati, è espresso in funzione dei caratteri della C, mediante le formole* (28), (29). *Se sulla C si assegnano d punti doppi, il genere virtuale diminuisce di d unità.*

Balme, 20 Settembre 1905.

Theorie der linearen Iteralgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Von

O. Spiess in Basel.

Ist $f(\xi)$ eine Funktion der Variablen ξ, so nenne ich die aus ihr durch $(n-1)$-malige Iteration entspringende Funktion, falls eine solche überhaupt existiert, das *Iterat n^{ter} Ordnung* oder kurz das n^{te} *Iterat* von $f(\xi)$. $f(\xi)$ selbst wird aufgefaßt als erstes, die Substitutionsvariable ξ als „nulltes“ Iterat. Wir kennzeichnen die Ordnung eines Iterats durch einen dem Funktionszeichen beigefügten unteren, *eingeklammerten* Index, also das n^{te} Iterat von $f(\xi)$ mit $f_{(n)}(\xi)$. Untere *nicht* eingeklammerte Indizes dienen wie gewöhnlich zur Nummerierung verschiedener Funktionen.

Eine Gleichung zwischen verschiedenen Iteraten einer Funktion, etwa

$$G(\xi, f(\xi), f_{(2)}(\xi), \cdots, f_{(n)}(\xi)) = 0 \tag{1}$$

nenne ich eine *Iteralgleichung (von der n^{ten} Ordnung).* Ein Hauptziel der gewöhnlichen Iterationsrechnung besteht darin, aus Gleichungen dieser Art die Funktion f zu bestimmen. Es liegt nun nahe, diese Aufgabe auf ein Problem der Differenzenrechnung zurückzuführen, für welches gewisse Methoden der Behandlung bereits ausgebildet sind. Gelingt es nämlich, eine Funktion $\varphi(x)$ zu finden, die die Differenzengleichung befriedigt

$$G(\varphi(x), \varphi(x+1), \varphi(x+2), \cdots, \varphi(x+n)) = 0, \tag{2}$$

so wird durch die beiden Gleichungen

$$\xi = \varphi(x), \quad \xi_1 = \varphi(x+1) \tag{3}$$

eine (nicht notwendig monogene) Funktion $\xi_1 = f(\xi)$ definiert, welche der Iteralgleichung (1) genügt. Denn es kann offenbar für jedes ganzzahlige k $\xi_k = \varphi(x+k)$ als k^{tes} Iterat von $\xi_1 = f(\xi)$ aufgefaßt und demnach mit $f_{(k)}(\xi)$ bezeichnet werden.

Gelingt es nun zu zeigen, daß zu jeder Lösung $f(\xi)$ von (1) eine Funktion $\varphi(x)$ existiert, die der Gleichung genügt

$$\varphi(x+1) = f(\varphi(x)) \tag{4}$$

und somit für jedes ganzzahlige k auch der Gleichung

$$\varphi(x+k) = f_{(k)}(\varphi(x)),$$

so folgt, daß $\xi = \varphi(x)$ die Gleichung (2) erfüllt, und daß es somit genügt, diese Gleichung allgemein aufzulösen.

Nun stößt aber die Aufgabe, die Existenz eines solchen $\varphi(x)$ nachzuweisen, meist auf unüberwundene Schwierigkeiten. So ist die Zuziehung der Differenzengleichung (2) zwar noch nützlich, doch bleibt es ungewiß, ob man durch ihre Vermittelung alle Lösungen von (1) erhält. Um zu befriedigenden Resultaten zu gelangen, ist es daher geraten, die Aufgabe etwas zu beschränken. Ferner ist es wünschenswert, die Iteralgleichung, statt mittels des Umwegs über die Differenzengleichung, durch direkte Methoden anzugreifen, die einen tieferen Einblick in die Natur solcher Probleme gewähren. In diesem Sinne werde ich im folgenden einen einfachen Fall behandeln, der ein gewisses Interesse besitzt, nämlich die allgemeine *lineare homogene* Iteralgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$f_{(n)}(\xi) + a_1 f_{(n-1)}(\xi) + a_2 f_{(n-2)}(\xi) + \cdots + a_{n-1} f(\xi) + a_n \xi = 0$$

und werde an ihr verschiedene Begriffe entwickeln, die auch für das Studium komplizierterer Iteralgleichungen maßgebend sind. Bevor ich indes diese spezielle Aufgabe in Angriff nehme, ist es nötig, einige allgemeine Betrachtungen vorauszuschicken.

§ 1.

Grundbegriffe. Litterale und funktionale Iteration.

A. Die Begriffe: Substitution, Iteration und Funktionalgleichung lassen zwei verschiedene Auffassungen zu, eine engere und eine weitere, die wohl auseinander zu halten sind. Seien zwei reguläre Potenzreihen vorgelegt

$$\mathfrak{R}(\xi-\alpha) = a_0 + a_1(\xi-\alpha) + a_2(\xi-\alpha)^2 + \cdots \quad \text{mit dem Konvergenzkreis A,}$$
$$\mathfrak{S}(\eta-\beta) = b_0 + b_1(\eta-\beta) + b_2(\eta-\beta)^2 + \cdots \quad \text{„ „ „ B,}$$

die wir als Elemente zweier analytischer Funktionen $f(\xi)$, $g(\eta)$ betrachten. Wird nun verlangt, man solle das Substitutionsprodukt $g(f(\xi))$ bilden für die Umgebung des Punktes α, so kann man zunächst so verfahren: Man setzt die Reihe $\mathfrak{R}$, so wie sie dasteht, in die Reihe $\mathfrak{S}$ an Stelle von η ein, und entwickelt die einzelnen Glieder nach Potenzen von $(\xi-\alpha)$. Konvergiert die so entstehende neue Reihe, die wir mit $\mathfrak{T}(\xi-\alpha)$ bezeichnen, so wird man sie als das gewünschte Resultat ansehen und also setzen

$$gf(\xi) = \mathfrak{T}(\xi-\alpha).$$

Da hierbei die eine Reihe *buchstäblich* in die andere substituiert worden ist, nennen wir diese Art von Substitution *litteral*.

Wie man sieht, konvergiert die Reihe $\mathfrak{T}$ dann und nur dann, wenn der dem Werte a_0 (dem „Mittelpunktwerte" der Reihe $\mathfrak{R}$) entsprechende Punkt ganz innerhalb des Konvergenzkreises B von $\mathfrak{S}$ liegt. Man kann also sagen: *Zwei beliebige Reihen geben im allgemeinen kein litterales Substitutionsprodukt, falls aber ein solches existiert, so ist es eindeutig durch die beiden Komponenten (bei festgesetzter Reihenfolge derselben) bestimmt.*

B. Es gibt aber noch eine zweite Methode, die Funktion $f = \mathfrak{R}(\xi - \alpha)$ in die Funktion $g = \mathfrak{S}(\eta - \beta)$ zu substituieren, wobei es gleichgültig ist, ob der Punkt a_0 innerhalb oder außerhalb des Konvergenzkreises B von $\mathfrak{S}$ liegt, wenn er nur noch zum Existenzbereiche der *Funktion* $g(\eta)$ gehört. Man verbinde nämlich die Punkte β und a_0 durch eine beliebige Linie L, und setze die Reihe $\mathfrak{S}$ längs L analytisch fort von β bis a_0, wodurch sie schließlich übergehen möge in die Reihe $\mathfrak{S}^*(\eta - a_0)$ mit dem Konvergenzkreise C. Man kann dann immer einen mit A konzentrischen Kreis A_1 bestimmen, so daß, wenn ξ alle Punkte innerhalb A_1 durchläuft,

$$\mathfrak{R} - a_0 = a_1(\xi - \alpha) + a_2(\xi - \alpha)^2 + \cdots$$

ganz innerhalb des Kreises C verbleibt. Setzt man also die Reihe $\mathfrak{R}$ an Stelle von η in $\mathfrak{S}^*(\eta - a_0)$ ein und entwickelt, so erhält man eine innerhalb A_1 konvergente Reihe $\mathfrak{T}(\xi - \alpha)$, die wir offenbar als Substitutionsprodukt von f in g bezeichnen dürfen. Diese ist übrigens durch die gegebenen Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt; denn je nach Wahl der Linie L erhält man aus $\mathfrak{S}$ durch Fortsetzung verschiedene Reihen in a_0, $\mathfrak{S}_1^*$, $\mathfrak{S}_2^*$, $\cdots$, aus denen wiederum verschiedene Reihen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\cdots$ hervorgehen, welche verschiedene Zweige der mehrdeutigen Funktion $gf(\xi)$ vorstellen. *Diese Art von Substitution, bei der eine Reihe nicht in die vorgelegte Reihe selbst, sondern in eine aus dieser durch Fortsetzung abgeleitete eingesetzt wird,* nenne ich nun *funktionale* Substitution. *Sie ist eine im allgemeinen vieldeutige Operation,* die z. B. immer möglich ist, wenn die Funktionen, die durch die beiden Reihen definiert sind, in der ganzen Ebene existieren.

C. Aus dem Gesagten ergibt sich von selbst die doppelte Auffassung einer Funktionalgleichung, wie z. B. der folgenden

$$g(f(\xi)) = \omega \cdot g(\xi). \tag{5}$$

Diese Gleichung werde in der Umgebung des Nullpunktes befriedigt durch die beiden Reihen $f = \mathfrak{R}(\xi)$, $g = \mathfrak{S}(\xi)$. Dann ist möglicherweise das Substitutionsprodukt $g(f(\xi))$ entstanden durch direktes Einsetzen von $\mathfrak{R}(\xi)$ in $\mathfrak{S}$, ist also $= \mathfrak{S}(\mathfrak{R}(\xi))$. Wir sagen dann, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ erfüllen die Gleichung *litteral.* Es ist aber auch möglich, daß das litterale Substitutionsprodukt gar nicht existiert oder wenigstens die Gleichung nicht befriedigt, sondern daß man erst $\mathfrak{S}(\xi)$ auf einem bestimmten Wege S nach

dem Punkte $\mathfrak{R}(0) = \alpha$ fortsetzen muß, und daß erst in die so entstehende Reihe $\mathfrak{S}^*(\xi - \alpha)$ das $\mathfrak{R}(\xi)$ zu substituieren ist. Die obige Gleichung sieht also dann so aus

$$\mathfrak{S}^*(\mathfrak{R}(\xi) - \alpha) = \omega\mathfrak{S}(\xi),$$

d. h. *der Buchstabe g auf den beiden Seiten von* (5) *bedeutet zwar dieselbe Funktion, aber nicht notwendig die gleiche Reihe, denselben Zweig.* Wir sagen in diesem Falle, die Gleichung werde *funktional* befriedigt.

D. Da unter dem Begriff der Substitution auch der der Iteration enthalten ist, so ist die Bedeutung von litteraler und funktionaler Iteration nach dem Obigen sofort einleuchtend. Eine Potenzreihe $\mathfrak{R}(\xi - \alpha)$ ist danach litteral iterierbar, wenn der Punkt $\mathfrak{R}(0)$ noch im Konvergenzgebiete von $\mathfrak{R}$ liegt. Soll das litterale Iterat dritter Ordnung existieren, so muß auch $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}(0) - \alpha) = \mathfrak{R}_{(2)}(0)$ in den Konvergenzkreis hineinfallen usf. Ein litterales Iterat beliebiger Ordnung ist durch die Reihe selbst eindeutig bestimmt.

Es interessieren uns nun besonders die Reihen, welche unbeschränkt litteral iterierbar sind, bei denen also die sämtlichen Punkte, die den Zahlen $\mathfrak{R}(0)$, $\mathfrak{R}_{(2)}(0)$, $\mathfrak{R}_{(3)}0, \cdots$ ad inf. entsprechen, in dem Konvergenzbezirke von $\mathfrak{R}(\xi - \alpha)$ liegen. Dahin gehören natürlich die unbeschränkt konvergenten Reihen. Aber auch unter den Reihen mit beschränktem Konvergenzbereich gibt es viele von dieser Eigenschaft, nur sieht man es ihnen meist nicht sofort an. Nur bei einer Klasse von Reihen ist die unbeschränkte Iterierbarkeit von vornherein garantiert, bei denen nämlich der Mittelpunkt des Konvergenzkreises ein Fixpunkt ist und die somit die Form haben

$$\mathfrak{R}(\xi - \alpha) = \alpha + a_1(\xi - \alpha) + a_2(\xi - \alpha)^2 + \cdots.$$

Man erkennt unmittelbar, daß beliebig viele solcher Reihen, von demselben Mittelpunkte α ineinander litteral substituiert, wieder eine Reihe von derselben Form ergeben, die in einem endlichen Kreise konvergiert, wenn dies bei den gegebenen Reihen der Fall ist. Ich nenne eine solche Reihe eine *Hauptreihe*. Mit ihr werden wir uns hauptsächlich zu beschäftigen haben.

E. Der litteralen Iteration steht gegenüber die funktionale. Um zu einer Reihe $f = \mathfrak{R}(\xi - \alpha) = a_0 + a_1(\xi - \alpha) + \cdots$ das zweite funktionale Iterat zu finden, hat man dieselbe auf allen möglichen Wegen bis zum Punkt $\mathfrak{R}(0) = a_0$ fortzusetzen und in die so erhaltenen Reihen

$$\mathfrak{R}^*(\xi - a_0), \quad \mathfrak{R}^{**}(\xi - a_0), \cdots$$

an Stelle von ξ das $\mathfrak{R}$ einzusetzen. Man erhält so für $f_{(2)}(\xi)$ eine Anzahl verschiedener Reihen $\mathfrak{R}_2(\xi - \alpha)$, $\mathfrak{R}_2^*(\xi - \alpha)$, $\mathfrak{R}_2^{**}(\xi - \alpha), \cdots$. Wird eine derselben, z. B. $\mathfrak{R}_2$ wieder fortgesetzt nach $\mathfrak{R}_2(0) = b_0$, und wird dann

wieder für ξ $\mathfrak{R}$ substituiert, so bekommt man Reihen für das dritte Iterat $f_{(3)}(\xi)$. Man erkennt so, daß die funktionale Iteration eine im allgemeinen mehrdeutige Operation ist, die jedenfalls unbeschränkt oft ausführbar ist, falls die gegebene Funktion in der ganzen Ebene existiert. *Wird nur schlechtweg von Iteration einer Funktion gesprochen, so ist damit stets die funktionale Iteration als die allgemeinere gemeint.*

F. Noch auf einen Umstand will ich aufmerksam machen, der bei Iterationsproblemen von Wichtigkeit ist. Man könnte glauben, es genüge, um die sämtlichen Entwicklungen von $f_{(2)}(\xi)$ zu erhalten, eine einzige zu kennen, aus der die übrigen durch Fortsetzung auf geschlossenen Wegen hervorgingen. Das ist aber nicht immer der Fall, da schon das zweite Iterat einer Funktion nicht mehr monogen zu sein braucht. Wird z. B. $f(\xi)$ durch die Gleichung definiert

$$f^2 - 2a\xi \cdot f + \xi^2 + 1 = 0,$$

so folgt für $f_{(2)}$ die Gleichung

$$f_{(2)}{}^2 - 2af \cdot f_{(2)} + f^2 + 1 = 0,$$

woraus durch Subtraktion sich ergibt

$$(f_{(2)} - \xi)(f_{(2)} + \xi - 2af) = 0,$$

d. h. das zweite Iterat der Funktion

$$f(\xi) = a\xi \pm \sqrt{1 + (a^2 - 1)\xi^2}$$

zerfällt in die beiden Funktionen

$$f_{(2)} = \xi \quad \text{und} \quad f_{(2)} = (1 - 2a^2)\xi \mp 2a\sqrt{1 + (a^2 - 1)\xi^2}.$$

Nur bei eindeutigen Funktionen sind die verschiedenen Iterate sicher monogen.

G. Nach diesen Erörterungen ist es nun möglich, die Frage nach der Auflösung einer Iteralgleichung

$$(1) \qquad G(\xi, f, f_{(2)}, \cdots, f_{(n)}) = 0$$

präziser zu formulieren als dies anfangs geschah. Wird funktionale Iteration und Substitution als die allgemeinere zugelassen, so wird folgendes gefordert: Man suche eine gewisse analytische Funktion $f(\xi)$, von der ein Zweig in der Umgebung eines regulären Punktes α durch eine reguläre Potenzreihe $\mathfrak{R}_1(\xi - \alpha)$ dargestellt sei. Durch funktionale Iteration derselben erhält man dann eine endliche eder unendliche Anzahl von Reihen $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2{}^*, \mathfrak{R}_2{}^{**}, \cdots$ welche die sämtlichen Zweige des zweiten Iterats $f_{(2)}$ vorstellen, ebenso Reihen $\mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_3{}^*, \mathfrak{R}_3{}^{**}, \cdots$ für $f_{(3)}$ usw.

Setzt man dann für $f(\xi)$ die Reihe $\mathfrak{R}_1$, für $f_{(2)}$ eine *bestimmte* der Reihen $\mathfrak{R}_2$, für $f_{(3)}$ eine *bestimmte* der Reihen $\mathfrak{R}_3$ usf. in die Gleichung (1) ein, so muß diese identisch erfüllt sein. Es ist also *für alle* ξ etwa

$$G(\xi, \mathfrak{R}_1(\xi-\alpha), \mathfrak{R}_2{}^*(\xi-\alpha), \cdots, \mathfrak{R}_n{}^{**}(\xi-\alpha)) = 0. \tag{6}$$

Dabei ist noch ein möglicher Umstand hervorzuheben. Lassen wir in der letzten identischen Gleichung ξ alle möglichen geschlossenen Wege beschreiben, aber so, daß $\mathfrak{R}_1$ wieder in sich selbst zurückkehrt, so ist es denkbar, daß die für $f_{(2)}$ und die höheren Iterate gesetzten Reihen nicht in sich übergehen, sondern daß etwa $\mathfrak{R}_2$ in $\mathfrak{R}_2{}^{**}, \cdots, \mathfrak{R}_n{}^{**}$ in $\mathfrak{R}_n{}^*$ übergeht, so daß also auch die folgende identische Gleichung besteht

$$G(\xi, \mathfrak{R}_1(\xi-\alpha), \mathfrak{R}_2{}^{**}(\xi-\alpha), \cdots, \mathfrak{R}_n{}^*(\xi-\alpha)) = 0. \tag{6a}$$

Es ist aber sogar denkbar, daß die Gleichung (1) noch durch eine andere Kombination der Reihen für $f_{(2)}, f_{(3)}, \cdots$ befriedigt wird, daß etwa

$$G(\xi, \mathfrak{R}_1(\xi-\alpha), \overline{\mathfrak{R}}_2(\xi-\alpha), \cdots, \overline{\mathfrak{R}}_n(\xi-\alpha)) = 0 \tag{6b}$$

ist, wo nun die Reihen $\overline{\mathfrak{R}}_2, \cdots, \overline{\mathfrak{R}}_n$ zwar auch Iterate von $\mathfrak{R}_1$ sind, wo aber die linke Seite nicht einfach aus der von (6) durch analytische Fortsetzung auf geschlossenem Weg kann erhalten werden. Solche zwei Auflösungen wie $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2{}^*, \cdots, \mathfrak{R}_n{}^{**})$ in (6) und $(\mathfrak{R}_1, \overline{\mathfrak{R}}_2, \cdots, \overline{\mathfrak{R}}_n)$ in (6a) werden wir alsdann als *verschieden* betrachten, obgleich beiden dieselbe Reihe $\mathfrak{R}_1$ zugrunde liegt. Hingegen fassen wir $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2{}^*, \cdots, \mathfrak{R}_n{}^{**})$ in (6) und $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2{}^{**}, \cdots, \mathfrak{R}_n{}^*)$ in (6a), die durch Fortsetzung auseinander entstehen, als äquivalent auf. Man sieht also, daß es bei diesen Problemen eventuell nicht genügt, die Funktion $f(\xi)$ anzugeben, sondern daß zur völligen Charakterisierung der Lösung noch die Angabe derjenigen Iterate von f gehört, die in die Gleichung eingesetzt dieselbe zur identischen machen.

H. Man erkennt aber auch, daß das so allgemein gefaßte Problem zur Zeit unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet. Eine Reihe funktional zu iterieren ist praktisch unausführbar. Wollen wir also die Aufgabe einer direkten Behandlung zugänglich machen, so müssen wir die Forderung hinzunehmen, daß nur *litterale* Substitutionen zugelassen werden. (Nur bei algebraischen Funktionen läßt sich auch die funktionale Iteration einigermaßen behandeln.) Man wird also eine Iteralgleichung etwa so zu lösen versuchen, daß man eine Reihe für $f(\xi)$ ansetzt, sie litteral iteriert und durch Einsetzen in die Gleichung Rekursionsformeln für die Koeffizienten bestimmt. Aber auch dies führt im allgemeinen zu keinem Ziel, da diese Rekursionsgleichungen unendlich viele Glieder besitzen. Dies tritt nur dann nicht ein, wenn die für $f(\xi)$ angenommene Reihe zu den oben erwähnten Hauptreihen gehört. Für die Zusammensetzung solcher Reihen gelten nämlich einfache Gesetze, so daß sich mit ihnen leicht rechnen läßt. Wir werden somit darauf geführt, das Problem der Gleichung (1) in der folgenden weit engeren Fassung zu formulieren:

Gesucht ist eine Hauptreihe $\mathfrak{R} = \alpha + a_1(\xi - \alpha) + \cdots$, *die mit ihren litteralen Iteraten die Iteralgleichung zur identischen macht.*

Eine solche Lösung werde ich fortan eine *Hauptlösung* nennen. Da eine beliebig gegebene Iteralgleichung im allgemeinen keine Hauptlösung besitzt, ergibt sich die weitere Aufgabe, *alle Iteralgleichungen von bestimmter Form anzugeben, die eine Hauptlösung zulassen.*

§ 2.

Funktionale Lösung der linearen Iteralgleichung mit konstanten Koeffizienten.

A. Nach diesen Erklärungen, die für allgemeine Probleme der Iterationsrechnung maßgebend sind, wende ich mich der schon genannten speziellen Aufgabe zu, die lineare homogene Iteralgleichung mit konstanten Koeffizienten zu lösen

$$f_{(n)} + a_1 f_{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} f + a_n \xi = 0. \tag{7}$$

Für unsere Untersuchung ist von Wichtigkeit die rationale Funktion

$$\mathfrak{g}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Die Gleichung

$$\mathfrak{g}(x) = 0 \tag{8}$$

nenne ich die *Grundgleichung* des Problems, und bezeichne ihre Wurzeln mit

$$\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{n-1}.$$

Verlangt man die allgemeinste (funktionale) Lösung von (7), so wird man nach den einleitenden Betrachtungen zu beweisen suchen, daß für jedes $f(\xi)$, das der Gl. (7) genügt, eine Funktion $\varphi(x)$ existiert, so daß

$$\varphi(x+1) = f(\varphi(x)).$$

Dann erfüllt nämlich $\varphi(x)$ die Gleichung

$$\varphi(x+n) + a_1 \varphi(x+n-1) + \cdots + a_n \varphi(x) = 0 \tag{9}$$

und die allgemeinste Lösung von (9) liefert die allgemeinste Lösung von (7) durch Elimination von x aus

$$\xi = \varphi(x), \quad f = \varphi(x+1). \tag{10}$$

Nun stößt aber der geforderte Existenzbeweis auf Schwierigkeiten, die mit den heutigen Hilfsmitteln wohl kaum zu überwinden sind. *Wir können also die Gleichung* (9) *zwar benutzen, um Lösungen von* (7) *zu bekommen. wir wissen aber nicht, ob wir so wirklich die allgemeinsten erhalten.*

Die Auflösung von (9) ist bekanntlich

(11) $$\varphi(x) = C_0\omega_0^x + C_1\omega_1^x + \cdots + C_{n-1}\omega_{n-1}^x,$$

falls ω, ω_1, $\cdots$ alle unter sich verschieden sind, oder

(11a) $$\begin{aligned}\varphi(x) = (C_0 + C_0'x + C_0''x^2 + \cdots)\omega_0^x + \cdots +\\ (C_k + C'_k x + C''_k x^2 + \cdots)\omega_k^x + \cdots,\end{aligned}$$

falls gewisse unter den Wurzeln von (8) zusammenfallen.

Darin bedeuten die Größen C Konstante, oder willkürliche Funktionen von x, die der einen Bedingung genügen;

$$C_k(x+1) = C_k(x).$$

B. Betrachten wir sie zunächst alle als Konstanten, so ist $\varphi(x)$ in allen Fällen eine ganze transzendente Funktion. Durch die erste der Gleichungen (10) wird dann x definiert als unendlich vieldeutige Funktion von ξ, die in der ganzen Ebene existiert. Sei ein Zweig derselben in der Nähe des regulären Punktes α dargestellt durch die Reihe

$$x = A_0 + A_1(\xi - \alpha) + A_2(\xi - \alpha)^2 + \cdots,$$

so liefert ihre Substitution in die zweite Gleichung (10) die Entwicklung

(12) $$f(\xi) = B_0 + B_1(\xi - \alpha) + B_2(\xi - \alpha)^2 + \cdots,$$

welche ein Element einer Lösung von (7) darstellt. Da die n Konstanten C_0, C_1, $\cdots$ willkürlich sind, so hängen auch die Koeffizienten B_k von willkürlichen Parametern ab, deren Anzahl aber nur $n-1$ ist. Angenommen nämlich, daß $\varphi(x)$ durch Gleichung (11) bestimmt ist, so ist klar, daß $\varphi(x)$ unverändert bleibt, wenn man gleichzeitig

$$x,\ C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_{n-1}$$

ersetzt durch

$$x - y,\ C_0\omega_0^y,\ C_1\omega_1^y,\ \cdots,\ C_{n-1}\omega_{n-1}^y,$$

worin y eine beliebige Größe ist. Folglich wird auch $f(\xi)$ durch diese Substitution nicht geändert. Betrachtet man also den Koeffizienten B_k als Funktion Φ von C_0, C_1, $\cdots$, C_n, so genügt Φ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(C_0 e^{\varrho_0 y}, C_1 e^{\varrho_1 y}, \cdots, C_{n-1}e^{\varrho_{n-1} y}) = 0$$

oder

$$C_0\varrho_0\frac{\partial\Phi}{\partial C_0} + C_1\varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial C_1} + \cdots + C_{n-1}\varrho_{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial C_{n-1}} = 0,$$

worin ϱ_0, ϱ_1, $\cdots$ die Hauptwerte der Logarithmen von ω_0, ω_1, $\cdots$ sind. Setzt man also (nach passender Auswahl eines Zweiges)

(13) $$t_1 = \frac{C_1^{\frac{1}{\varrho_1}}}{C_0^{\frac{1}{\varrho_0}}},\quad t_2 = \frac{C_2^{\frac{1}{\varrho_2}}}{C_0^{\frac{1}{\varrho_0}}},\quad \cdots,\quad t_{n-1} = \frac{C_{n-1}^{\frac{1}{\varrho_{n-1}}}}{C_0^{\frac{1}{\varrho_0}}},$$

wo jede der Größen t ein partikuläres Integral der obigen Differentialgleichung darstellt, so erkennt man, daß $f(\xi)$ in der Tat nur von den $n-1$ Parametern $t_1, \cdots, t_{n-1}$ abhängt. q. e. d. Wir können also den Satz aussprechen:

Satz 1. *Die allgemeine Gleichung* (7) *besitzt immer eine funktionale Lösung, die in der ganzen Ebene existiert und noch von* $n-1$ *willkürlichen Parametern abhängig ist.*

C. Diese Lösung ist indes nicht die einzige, die uns diese Methode liefert. Wählen wir nämlich für $C_0, C_1, \cdots$ bestimmte periodische Funktionen mit der Periode Eins, z. B. ganze Funktionen von $e^{2\pi i \alpha}$, so erhalten wir aus (10) durch dieselbe Überlegung unendlich viele weitere Lösungen. Leider gelingt es nicht, diese Abhängigkeit von den willkürlichen Funktionen $C_0(x)$, $C_1(x)$ usw. in der expliziten Darstellung von $f(\xi)$ formal zum Ausdruck zu bringen, ausgenommen in einem speziellen Falle. Falls nämlich die Koeffizienten $a_1, a_2, \cdots$ solche Werte haben, daß

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}} \qquad (k = 1, \cdots, n-1)$$

ist, mit anderen Worten, falls die Iteralgleichung (7) die Form hat

$$f_{(n)} - \xi = 0, \tag{14}$$

so hat die allgemeine Lösung von (9), falls noch $l_k = \psi_k(e^{2\pi i x})$ gesetzt wird, die Form

$$\varphi(x) = \psi_0(e^{2\pi i x}) + \psi_1(e^{2\pi i x}) e^{\frac{2\pi i}{n}x} + \cdots + \psi_{n-1}(e^{2\pi i x}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}(n-1)x},$$

d. h. $\varphi(x)$ ist gleich einer *willkürlichen* Funktion ψ von $e^{\frac{2\pi i}{n}x}$. Setzt man also $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \varepsilon$, so folgt aus den Gleichungen (10) durch Elimination von $e^{\frac{2\pi i}{n}x}$, daß $f(\xi)$ die Form hat

$$f(\xi) = \Phi(\varepsilon \cdot \overline{\Phi}(\xi)), \tag{15}$$

worin Φ eine beliebige Funktion und $\overline{\Phi}$ ihre Inverse ist. Das ist aber in der Tat die bekannte Darstellung einer allgemeinen zyklischen Funktion von der Periode n.

§ 3.

Algebraische Fälle.

Nachdem wir Lösungen der allgemeinen Gleichung (7) gefunden haben, die jedenfalls im allgemeinen unendlich-vieldeutige Funktionen sind, stellen wir uns nunmehr die Frage: „Gibt es vielleicht spezielle Gleichungen der Form (7), die *algebraische* Lösungen besitzen?“

Um diese Frage zu beantworten, haben wir nur zu untersuchen, ob man die Funktion $\varphi(x)$ des vorigen Paragraphen so spezialisieren kann, daß durch die Gleichungen (10)

$$\xi = \varphi(x), \quad f = \varphi(x+1)$$

eine algebraische Funktion definiert wird.

Nun kann man $\varphi(x), \varphi(x+1), \cdots, \varphi(x+n)$ auffassen als lineare Aggregate von n linear unabhängigen Funktionen, die im Fall, daß die Wurzeln ω_k alle verschieden sind, $\omega_0^x, \cdots, \omega_{n-1}^x$ lauten, im Falle zusammenfallender Wurzeln zum Teil die Form $x^\lambda \omega_k^x$ $(\lambda < n)$ haben. Man kann daher die n Gleichungen

$$\xi = \varphi(x), \quad f = \varphi(x+1), \cdots, f_{(n-1)} = \varphi(x+n-1)$$

nach diesen Funktionen auflösen und diese als lineare Aggregate von

$$\xi, f, \cdots, f_{(n-1)}$$

darstellen. Wird nun $f(\xi)$ algebraisch angenommen, so werden auch jene Aggregate algebraische Funktionen, die wir mit $\Phi_0(\xi), \cdots, \Phi_{n-1}(\xi)$ bezeichnen wollen, und man hat somit

$$\omega_0{}^x = \Phi_0(\xi), \cdots, x^\lambda \omega_k{}^x = \Phi_k(\xi), \cdots \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{16}$$

Nun sind $\Phi_0, \cdots, \Phi_{n-1}$ algebraisch und folglich besteht zwischen je zwei von ihnen, z. B. zwischen Φ_0 und Φ_k, eine algebraische Gleichung. Das Gleiche muß daher für die Exponentialfunktionen gelten, d. h. zwischen $\omega_0{}^x$ und jeder der $n-1$ anderen Funktionen muß eine algebraische Relation stattfinden. Dies ist aber bekanntlich nur dann möglich,

1. wenn keine Funktionen der Form $x^\lambda \omega_k^x$ (für $\lambda > 0$) vorkommen, wenn also für jedes k von 0 bis $n-1: \Phi_k = \omega_k^x$ gilt, und
2. wenn sämtliche Wurzeln $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ rationalzahlige Potenzen einer einzelnen unter ihnen sind.

Ist die letzte Bedingung erfüllt, so kann man immer eine Größe ω angeben (die entweder selbst eine der Zahlen ω_k ist oder eine Wurzel aus einer von ihnen), so daß man setzen kann

$$\omega_0 = \omega^{p_0}, \quad \omega_1 = \omega^{p_1}, \cdots, \omega_{n-1} = \omega^{p_{n-1}}, \tag{17}$$

wo nun $p_0, \cdots, p_{n-1}$ ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten.

Die beiden obigen Bedingungen sind aber nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Denn sind sie erfüllt, so nimmt $\varphi(x)$ die Gestalt an

$$\varphi(x) = C_0 \omega^{p_0 x} + C_1 \omega^{p_1 x} + \cdots + C_{n-1} \omega^{p_{n-1} x} = \psi(\omega^x), \tag{18}$$

worin

$$\psi(y) = C_0 y^{p_0} + C_1 y^{p_1} + \cdots + C_{n-1} y^{p_{n-1}} \tag{19}$$

gesetzt ist.

Hierin bedeuten $C_0, \cdots, C_{n-1}$ im allgemeinen Konstante, nur wenn ω gleich einer Einheitswurzel, etwa $= e^{\frac{2\pi i}{\nu}}$ ist, hat man darunter algebraische Funktionen von $\omega^{\nu x} = e^{2\pi i x}$ zu verstehen. Setzt man noch $\omega^x = y$, so sind $f(x)$ und diejenigen seiner Iterate, die der Differenzengleichung genügen, durch die Formeln definiert

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
\xi &= C_0 y^{p_0} + C_1 y^{p_1} + \cdots + C_{n-1} y^{p_{n-1}} = \psi(y)\\
f(\xi) &= C_0(\omega y)^{p_0} + C_1(\omega y)^{p_1} + \cdots + C_{n-1}(\omega y)^{p_{n-1}} = \psi(\omega y)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{(k)}\xi &= C_0(\omega^k y)^{p_0} + C_1(\omega^k y)^{p_1} + \cdots + C_{n-1}(\omega^k y)^{p_{n-1}} = \psi(\omega^k y).
\end{aligned}
$$

Die beiden ersten Gleichungen bestimmen $f(\xi)$ im allgemeinen als algebraische Funktion von ξ vom Rang Null, die noch von $n-1$ willkürlichen Parametern abhängt (vergl. § 2, (12), (13)). Nur wenn $\omega^\nu = 1$ ist und die $C_0, \cdots, C_{n-1}$ also als beliebige algebraische Funktionen von $\omega^{\nu x}$ betrachtet werden dürfen, erhalten wir je nach der Wahl dieser Funktionen unendlich viele verschiedene Lösungen $f(\xi)$, die aber alle zugleich zyklische Funktionen sind, wie man aus der letzten Formel (20) für $k = \nu$ unmittelbar erkennt.

Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen zusammen in den

Satz 2. *Soll unter den unendlich vielen Lösungen der Iteralgleichung* (7) *(die man mit Hilfe der Differenzengleichung erhält) eine algebraische vorkommen, die zudem keiner Iteralgleichung derselben Art von niedrigerer Ordnung genügt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die, daß die sämtlichen Wurzeln der zugehörigen Grundgleichung voneinander verschieden sind und sich als positiv- oder negativ-ganzzahlige Potenzen einer einzigen Größe darstellen lassen, daß die Grundgleichung also die Gestalt hat*

$$
(21)\qquad \mathfrak{g}(t) = (t - \omega^{p_0})(t - \omega^{p_1}) \cdots (t - \omega^{p_{n-1}}) = 0
$$

$(p_0, \cdots, p_{n-1} =$ pos. oder neg. ganze Z.).

Schließlich möge noch ein Beispiel Platz finden. Soll die Iteralgleichung zweiter Ordnung

$$
(22)\qquad f_{(2)}(\xi) + a_1 f(\xi) + a_2 \xi = 0
$$

eine algebraische Lösung besitzen, so muß nach Satz 2 die zugehörige Grundgleichung die Form haben

$$
y(x) = (x - \omega^{p_0})(x - \omega^{p_1}),
$$

d. h. es muß sein

$$
a_1 = -(\omega^{p_0} + \omega^{p_1}), \quad a_2 = \omega^{p_0 + p_1},
$$

hierin ist ω eine beliebige von 0 verschiedene Zahl, für die nicht zufällig $\omega^{p_0} = \omega^{p_1}$ oder $\omega^{p_1 - p_0} = 1$ wird. f wird dann mittels des Parameters y dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$
\xi = C_0 y^{p_0} + C_1 y^{p_1}, \quad f = C_0 \omega^{p_0} \cdot y^{p_0} + C_1 \omega^{p_1} y^{p_1}. \qquad (C_0, C_1 = \text{Konstanten})
$$

Eliminieren wir einmal y^{p_0}, das andere Mal y^{p_1}, setzen den Ausdruck

$$C_1^{p_0}(-C_0)^{-p_1}(\omega^{p_1}-\omega^{p_0})^{p_0-p_1}=t,$$

so kommt schließlich für $f(\xi)$ die algebraische Gleichung

$$(f-\omega^{p_0}\xi)^{p_0}-t(f-\omega^{p_1}\xi)^{p_1}=0, \tag{23}$$

worin t eine beliebige Größe, p_0, p_1 positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. So findet man für $p_0=2$, $p_1=1$, $t=2\tau$ als algebraische Lösung der Gleichung

$$f_{(2)}-(\omega^2+\omega)f+\omega^3\xi=0 \tag{24}$$

die Funktion

$$f(\xi)=\omega^2\xi+\tau\pm\sqrt{2(\omega^2-\omega)\tau\xi+\tau^2}. \tag{25}$$

Es folgt dann

$$\sqrt{2(\omega^2-\omega)\tau f(\xi)+\tau^2}=\pm\left[(\omega-1)\tau\pm\omega\sqrt{2(\omega^2-\omega)\tau\xi+\tau^2}\right],$$

woraus man erkennt, daß das zweite Iterat $f_{(2)}$ in zwei monogene Funktionen zerfällt, die ich durch $f_{(2)}^*$ und $f_{(2)}^{**}$ unterscheide. Nämlich es wird, wenn wir die Quadratwurzel in (25) kurz mit $\sqrt{}$ bezeichnen

$$\begin{aligned} f_{(2)}^* &= \omega^4\xi+(\omega^2+\omega)\tau\pm(\omega^2+\omega)\sqrt{} \\ f_{(2)}^{**} &= \omega^4\xi+(\omega^2-\omega)\tau\pm(\omega^2-\omega)\sqrt{}. \end{aligned} \tag{26}$$

Man sieht hieraus leicht, daß $f_{(2)}^*$ dasjenige Iterat von f ist, das die vorgelegte Gleichung (24) befriedigt. Das andere Iterat $f_{(2)}^{**}$ aber genügt mit f zusammen der Iteralgleichung

$$f_{(2)}-(\omega^2-\omega)f-\omega^3\xi=0. \tag{27}$$

Die Funktion f genügt also zwei verschiedenen Iteralgleichungen derselben Ordnung. Während z. B. für die Wurzel einer algebraischen Gleichung stets *eine einzige* Gleichung von niedrigstem Grad existiert, der jene genügt, und die dann irreduzibel heißt, so kann die Lösung einer Iteralgleichung der betrachteten Form sehr wohl *mehrere* solcher Gleichungen von derselben Ordnung befriedigen und doch keiner Gleichung von niedrigerer Ordnung Genüge leisten.

§ 4.

Litterale Lösung der linearen Iteralgleichung.

Zu ganz anderen Ergebnissen gelangt man, wenn man, was von nun an durchweg angenommen wird, die funktionale Iteration und Substitution ausschließt und im Sinne von § 1, H der vorgelegten Iteralgleichung durch

eine Hauptreihe und deren litterale Iterate zu genügen sucht. Wir stellen uns also in diesem Abschnitte die *Aufgabe, alle Iteralgleichungen der Form*

$$(7) \qquad f_{(n)} + a_1 f_{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} f + a_n \xi = 0$$

aufzustellen, die eine Hauptlösung zulassen, und diese selbst explizite zu entwickeln.

Anders gefaßt kann man das Problem auch so formulieren:

Man soll alle Hauptreihen angeben von der Eigenschaft, daß zwischen einer endlichen Anzahl ihrer Iterate eine lineare Relation besteht.

Es wird sich das interessante Resultat ergeben, daß diese Hauptreihen (von einem speziellen Falle abgesehen) *algebraische* Funktionen darstellen.

A. Es ist praktisch, lineare Aggregate von Iteraten durch gewisse Operationssymbole zu bezeichnen. Wird, wie bisher, unter $\mathfrak{g}(x) = 0$ die Grundgleichung von (7) verstanden, so schreibe ich für die linke Seite von (7) kurz

$$\mathfrak{g}(\dot{f})\xi$$

und nenne das Operationszeichen $\mathfrak{g}(\dot{f}) = a_0(\dot{f})^n + a_1(\dot{f})^{n-1} + \cdots + a_n$ ein *(ganzes rationales) Funktional n^{ten} Grades.* Das Symbol $(\dot{f} + h)$ heißt ein *lineares Funktional,* das Resultat seiner Anwendung auf eine Funktion $\Phi(\xi)$ soll den Ausdruck $\Phi(f) + h \cdot \Phi(\xi)$ bedeuten. Für die Zusammensetzung solcher Funktionale gelten dieselben formalen Regeln wie für die Multiplikation rationaler Funktionen, z. B. ist

$$\begin{aligned}(\dot{f} + h)(\dot{f} + k)\Phi(\xi) &= (\dot{f} + h)(\Phi(f) + k\Phi(\xi)) = ((\dot{f})^2 + (h + k)(\dot{f}) + hk)\Phi(\xi) \\ &= \Phi(f_{(2)}) + (h + k)\Phi(f) + hk\Phi(\xi),\end{aligned}$$

weshalb wir die Worte Multiplikation, Produkt, Teiler usf. auch hierfür gebrauchen. Mit Hilfe der Wurzeln ω_k kann man also die vorgelegte Iteralgleichung in der Form schreiben

$$\mathfrak{g}(\dot{f})\xi = (\dot{f} - \omega_0)(\dot{f} - \omega_1) \cdots (\dot{f} - \omega_{n-1})\xi = 0,$$

d. h. man kann ihre linke Seite auffassen als durch sukzessive Anwendung der linearen Funktionale $(\dot{f} - \omega_k)$ auf ξ enstanden, oder kurz als Produkt dieser Funktionale.

B. Betrachten wir einen Augenblick die nicht homogene Gleichung

$$(28) \qquad \mathfrak{g}(\dot{f})\xi = c = \text{constans}.$$

Denken wir uns dieselbe durch eine Hauptreihe $R(\xi) = \alpha + b_1(\xi - \alpha) + \cdots$ befriedigt, so folgt für $\xi = \alpha$ und folglich auch $R_{(k)}(\alpha) = \alpha$

$$(29) \qquad \alpha\mathfrak{g}(1) = \alpha(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c.$$

Setzt man ferner $\xi + \alpha$ für ξ und führt an Stelle von R eine Reihe S

ein mittels der Beziehung $R(\xi + \alpha) - \alpha = S(\xi)$, so hat man zunächst $R_{(k)}(\xi + \alpha) = \alpha + S_{(k)}(\xi)$ und somit die transformierte Gleichung

$$\mathfrak{g}(\dot{R})(\xi + \alpha) = \mathfrak{g}(\dot{S})\xi + \alpha\mathfrak{g}(1) = c.$$

Wegen der vorhergehenden Gleichung ist daher

$$\mathfrak{g}(\dot{S})\xi = 0,$$

d. h. *die Lösung der nicht-homogenen Gleichung* (28) *läßt sich auf die der homogenen Gleichung* (7) *zurückführen.* Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn

$$\mathfrak{g}(1) = 0 \quad \text{und} \quad c \neq 0$$

ist, in welchem Falle (28) keine Hauptlösung besitzt. Wir betrachten also nur noch die homogene Gleichung (7). Es gilt dann

(29) $$\alpha \cdot \mathfrak{g}(1) = 0.$$

Hieraus folgt im allgemeinen $\alpha = 0$, d. h. $R(\xi)$ hat die Form

$$b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots.$$

Nur falls zufällig $\mathfrak{g}(1) = 0$ ist, bleibt α unbestimmt, d. h. mit $R(\xi)$ ist dann auch

$$S(\xi) = \alpha + R(\xi - \alpha)$$

Lösung der Gleichung.

C. Jede Wurzel ω_k der Grundgleichung liefert offenbar in der Funktion

$$f = \omega_k \cdot \xi$$

eine Lösung des Problems. Diese Lösungen heißen die *trivialen.* Künftig soll unter „Hauptlösung" oder auch nur „Lösung" stets eine nichttriviale Hauptreihe verstanden werden.

D. Ist $R(\xi)$ eine Lösung von $\mathfrak{g}(\dot{f}) = 0$, so ist für jede Zahl c auch

$$S(\xi) = \frac{1}{c} R(c\xi)$$

eine solche; denn es folgt für jedes n

$$S_{(n)}(\xi) = \frac{1}{c} R_{(n)}(c\xi)$$

und somit wegen $\mathfrak{g}(\dot{R}) = 0$ auch

$$\frac{1}{c}\mathfrak{g}(\dot{R})(c\xi) = \mathfrak{g}(\dot{S})\xi = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

Es folgt daraus, daß die Hauptlösung $R(\xi)$, falls sie existiert, mindestens *einen* willkürlichen Parameter enthält. Sie kann aber auch mehrere enthalten, $t_1, t_2, \cdots, t_\lambda$, über deren Form wir dann eine Aussage machen können. Denn da mit $R = b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots + b_k\xi^k + \cdots$ zugleich

$$S = \frac{R(c\xi)}{c} = b_1\xi + \cdots + b_k c^{k-1}\xi^k + \cdots$$

Lösung ist, so müssen die Koeffizienten von S aus den entsprechenden in R durch eine Änderung der Parameter erzeugt werden können. *Es muß folglich allgemein b_k eine homogene Funktion $(k-1)^{\text{ten}}$ Grades von $t_1, \cdots, t_\lambda$ sein, oder wenigstens auf diese Form gebracht werden können.*

E. Im folgenden betrachten wir an Stelle der Iteralgleichung (7) die etwas allgemeinere

$$(30)\qquad \mathfrak{g}(\dot f)\Phi(\xi) = \Phi(f_{(n)}) + a_1\Phi(f_{(n-1)}) + \cdots + a_{n-1}\Phi(f) + a_n\Phi(\xi) = 0.$$

Hierin bedeutet $\Phi(\xi)$ eine *gegebene* Potenzreihe von ξ ohne konstantes Glied, die wir die *Basis* der Gleichung nennen. Auch (30) heißt eine *lineare Iteralgleichung (von der Basis Φ)*, und $\mathfrak{g}(t) = 0$ ihre *Grundgleichung*. Eine Hauptreihe, die sie löst, schreiben wir meist in der Form

$$R(\xi) = \omega\xi + b_1\xi^2 + b_2\xi^3 + \cdots, \qquad \omega \neq 0$$

worin ω für b_0 steht, weil dieser erste Koeffizient eine ausgezeichnete Rolle spielt; er heißt „der *Multiplikator* der Reihe".

Von diesen Hauptreihen werde ich nun eine Reihe von Hilfssätzen beweisen und hebe zunächst einige leicht einzusehende Eigenschaften hervor. Verschiedene konvergente Hauptreihen ineinander substituiert geben wieder eine konvergente Hauptreihe. Insbesondere existieren mit $R(\xi)$ die sämtlichen Iterate $R_{(2)}, R_{(3)}, \cdots$, deren Multiplikatoren die sukzessiven Potenzen des Multiplikators von $R(\xi)$ sind. Ferner existiert die Umkehrung der Reihe R, die wir mit $\overline{R}(\xi)$ bezeichnen. Jede Reihe der Form $\Phi = e_0\xi^\mu + e_1\xi^{\mu+1} + \cdots$ ist die μ^{te} Potenz einer Hauptreihe $\mathsf{H}(\xi)$, die Umkehrung der Funktion Φ entsteht daher, indem man in der inversen Hauptreihe $\overline{\mathsf{H}}(\xi)$, $\xi^{\frac{1}{\mu}}$ für ξ einsetzt, d. h. es ist $\overline{\Phi}(\xi) = \overline{\mathsf{H}}(\xi^{\frac{1}{\mu}})$, wenn $\Phi(\xi) = \mathsf{H}^\mu(\xi)$ ist.

Diese Bemerkung genügt, um von der Gleichung (30) eine Lösung angeben zu können. Hat darin $\Phi(\xi)$ die Form $e_0\xi^\mu + \cdots$, und ist ω_k eine Wurzel von $\mathfrak{g}(t)$, so bilde man mit Hilfe der inversen Funktion $\overline{\Phi}$ die Reihe

$$R(\xi) = \overline{\Phi}(\omega_k \cdot \Phi(\xi)) = \omega_k^{\frac{1}{\mu}}\xi + \frac{e_1(\omega_k^{\frac{1}{\mu}} - \omega_k^{\frac{2}{\mu}})}{\mu e_0}\xi^2 + \cdots$$

(welche wegen der Vieldeutigkeit von $\omega_k^{\frac{1}{\mu}}$ eigentlich μ Reihen vertritt). $R(\xi)$ ist dann eine Hauptlösung von (30), wie unmittelbar einleuchtet. Sie befriedigt aber bereits die Iteralgleichung erster Ordnung

$$(\dot R - \omega_k)\Phi(\xi) = 0.$$

Wir bezeichnen alle diese Lösungen als *trivial* und schließen sie künftig aus, wenn von einer Lösung die Rede ist.

F. Für das Rechnen mit Hauptreihen gelten nun die folgenden Sätze:

Lemma 1. *Ist* $\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi = 0$ *und* $\mathfrak{h}(\dot{f})$ *ein ganzes Funktional, so ist auch*

$$\mathfrak{h}(\dot{R})\,\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi = 0.$$

Beweis. Ist zunächst R eine beliebige Hauptreihe, so ist

$$\mathfrak{g}(\dot{R})\,\Phi(\xi) = \Phi_1(\xi)$$

eine ganze Potenzreihe. Soll nun $\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi$ identisch verschwinden, so müssen alle Koeffizienten von Φ_1 gleich Null sein. Dann verschwinden aber auch die Koeffizienten der folgenden Reihen

$$\Phi_1(R(\xi)) = (\dot{R})\Phi_1 = (\dot{R})\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi, \cdots, \Phi_1(R_{(n)}(\xi)) = (\dot{R})^n\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi, \cdots$$

und somit ist auch jedes lineare Aggregat derselben identisch gleich Null, wie der Satz behauptet. —

Infolge dieses Satzes kann man auf zwei Funktionale $\mathfrak{g}(\dot{R})$, $\mathfrak{h}(\dot{R})$ den Euklidischen Algorithmus anwenden zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers $\mathfrak{T}(\dot{R})$ und beweist so:

Lemma 2. *Ist zugleich* $\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi = 0$ *und* $\mathfrak{h}(\dot{R})\Phi = 0$ *und* $\mathfrak{T}(\dot{R})$ *der größte gemeinsame Teiler von* $\mathfrak{g}(\dot{R})$, $\mathfrak{h}(\dot{R})$, *so ist auch* $\mathfrak{T}(\dot{R}) = 0$.

Unter allen Gleichungen der Form (30), die zur selben Basis Φ gehören und die von einer gewissen Reihe $R(\xi)$ befriedigt werden, gibt es eine von niedrigster Ordnung. Diese sowohl wie das sie erzeugende Funktional nennen wir *irreduzibel in bezug auf R über der Basis* Φ. Umgekehrt, ist eine Gleichung gegeben und genügt $R(\xi)$ derselben, aber keiner anderen von niedrigerer Ordnung und derselben Basis, so heißt R eine *primitive* Lösung, andernfalls eine imprimitive. Den Zusatz „über der Basis Φ“ lassen wir in den folgenden Sätzen der Kürze halber weg. Man beweist dann wie in der Algebra:

Lemma 3. *Ist* $\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi = 0$ *und* $\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi = 0$, *und* $\mathfrak{g}_0$ *irreduzibel in bezug auf R, so ist* $\mathfrak{g}(\dot{R})$ *durch* $\mathfrak{g}_0(\dot{R})$ *teilbar. Ist die Ordnung von* $\mathfrak{g}$ *niedriger als die von* $\mathfrak{g}_0$, *so müssen alle Koeffizienten von* $\mathfrak{g}$ *verschwinden.*

Lemma 4. *Ist* $(\dot{R}-h)\Phi(\xi) = 0$ *für* $R = \omega\xi + \cdots$, $\Phi = e_0\xi^\mu + \cdots$, *so muß notwendig*

$$h = \omega^\mu$$

sein.

Denn ordnet man die linke Seite der Gleichung nach ξ und bemerkt, daß dann alle Koeffizienten, insbesondere der erste, verschwinden müssen, so ergibt sich unmittelbar der Satz.

Im folgenden haben wir häufig zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ω eine Einheitswurzel ist oder nicht, so gleich in dem wichtigen

Lemma 5. *Wenn* $\frac{\omega^\mu - 1}{\omega - 1} \neq 0$ *ist, so kann die Gleichung*

$$(31) \qquad (\dot{R}-1)\,\Phi(\xi) = 0 \quad \textit{oder} \quad \Phi(R) = \Phi(\xi)$$

nur so bestehen, daß entweder $R = \xi$, *oder* $\Phi =$ *constans ist.*

Die vorige Gleichung wird offenbar durch $R = \xi$ oder $\Phi =$ const. befriedigt. Nimmt man aber an, $R(\xi) = \omega\xi + b_k\xi^{k+1} + \cdots$, wo $b_k \neq 0$ ist, und Φ als wirkliche Funktion, so gibt das Lemma 4 als notwendige Bedingung $\omega^\mu = 1$. Aber die Annahme $\omega = 1$ führt auf einen Widerspruch, denn substituiert man R in (31) und entwickelt nach Taylor, so ergibt sich

$$0 = \Phi(\xi + b_k\xi^{k+1} + \cdots) - \Phi(\xi) = \Phi'(\xi)(b_k\xi^{k+1} + \cdots) + \frac{\Phi''(\xi)}{2}(b_k\xi^{k+1} + \cdots)^2 + \cdots,$$

was wegen $b_k \neq 0$, $\Phi' \neq 0$ nicht möglich ist. Also *kann* in der Tat höchstens im Fall $\frac{\omega^\mu - 1}{\omega - 1} = 0$ eine nichttriviale Lösung von (31) existieren. Daß dies bei passend gewählter Basis Φ wirklich eintritt, werden wir weiter unten nachweisen.

Lemma 6. *Ist* $\omega = \varepsilon$, $\varepsilon^\nu = 1$ *und* $(\dot{R} - \varepsilon^\mu)\Phi(\xi) = 0$, *so ist* $R(\xi)$ *eine zyklische Funktion von der Periode* ν, *d. h. es ist* $R_{(\nu)} = \xi$.

Denn aus $\Phi(R) = \varepsilon^\mu\Phi(\xi)$ folgt $\Phi(R_{(2)}) = \varepsilon^{2\mu}\Phi(\xi), \cdots$ und schließlich $\Phi(R_{(\nu)}) = \varepsilon^{\nu\lambda}\Phi = \Phi$; da nun der Multiplikator von $R_{(\nu)}$ gleich $\varepsilon^\nu = 1$, und Φ eine wirkliche Funktion, so folgt nach Lemma 5

$$R_{(\nu)} = \xi.$$

Lemma 7. *Aus* $(\dot{R} - h)^n\Phi = 0$ *folgt* $(\dot{R} - h)\Phi = 0$.

Beweis. *Erster Fall:* $\omega = \varepsilon$, $\varepsilon^\nu = 1$.

Falls $R(\xi)$ die angenommene Gleichung befriedigt, gibt es einen *kleinsten* Exponenten $\lambda \leqq n$, für den auch $(\dot{R} - h)^\lambda\Phi = 0$ ist. Man hat zu zeigen, daß $\lambda = 1$ ist. Zunächst ergibt sich, wie bei Lemma 4, $(\varepsilon^\mu - h)^\lambda = 0$ oder $h = \varepsilon^\mu$. Die Funktion $\Phi_1(\xi) = (\dot{R} - \varepsilon^\mu)^{\lambda-1}\Phi(\xi)$ ist dann nicht identisch gleich Null, und kann sich (wegen $R(0) = 0$, $\Phi(0) = 0$) auch nicht auf eine von Null verschiedene Konstante reduzieren. Aus der angenommenen Gleichung

$$(\dot{R} - \varepsilon^\nu)^\lambda\Phi = (\dot{R} - \varepsilon^\mu)\Phi_1 = 0$$

darf man also nach Lemma 6 schließen, daß $R_{(\nu)} = \xi$ ist. Daraus folgt, daß auch $\Phi(R_{(\nu)}) = \Phi(\xi)$ oder $(\dot{R}^\nu - 1)\Phi(\xi) = 0$ ist. Nun haben die Funktionale $(\dot{R}^\nu - 1)$ und $(\dot{R} - \varepsilon^\mu)^\lambda$ den größten gemeinsamen Teiler $(\dot{R} - \varepsilon^\mu)$, also folgt nach Lemma 2, daß $(\dot{R} - \varepsilon^\mu)\,\Phi = 0$ d. h. daß $\lambda = 1$ ist. q. e. d.

Zweiter Fall: ω keine Einheitswurzel.

Durch Substitution von $R = \omega\xi + b_1\xi^2 + \cdots$ in $\Phi = e_\mu\xi^\mu + \cdots$ findet man

$$(\dot{R} - h)\Phi = \Phi(R) - h\Phi(\xi) = e_\mu^{(1)}\xi^\mu + e_{\mu+1}^{(1)}\xi^{\mu+1} + \cdots,$$

d. h. durch Anwendung der Operation $(\dot{R}-h)$ auf eine Reihe Φ gehen die Koeffizienten e_k derselben über in Größen $e_k^{(1)}$, die aus den alten nach folgendem Bildungsgesetz entstehen:

(32) $$e_\mu^{(1)} = (\omega^\mu - h)e_\mu, \cdots, e_k^{(1)} = (\omega^k - h)e_k + p_{k,1}e_{k-1} + \cdots + p_{k,k-\mu}e_\mu$$

worin die $p_{k,\lambda}$ aus den b_k zusammengesetzt sind. Durch n-malige Anwendung des Funktionals $(\dot{R}-h)$ entsteht somit

$$(\dot{R}-h)^n\Phi = \sum_\mu^\infty e_k^{(n)}\xi^k,$$

wobei $e_k^{(\nu)}$ ebenso aus $e_k^{(\nu-1)}$ entsteht wie $e_k^{(1)}$ aus e_k. Man kann dann mittels der Formeln (32) allgemein $e_k^{(\nu)}$ ausdrücken durch $e_\mu^{(1)}, \cdots, e_k^{(1)}$ und erhält ein ähnliches System wie (32), nur mit andern Koeffizienten

(33) $$e_\mu^{(n)} = (\omega^\mu - h)^{n-1}e_\mu^{(1)}, \cdots, e_k^{(n)} = (\omega^k - h)^{n-1}e_k^{(1)} + p_{k,1}^{(n-1)}e_{k-1}^{(1)} + \cdots + p_{k,k-\mu}^{(n-1)}e_\mu^{(1)},$$

Nun ist nach Annahme $e_k^{(n)} = 0$ für alle $k \geqq \mu$, und wir haben zu zeigen, daß dann auch alle $e_k^{(1)} = 0$ sind. Zunächst ergibt sich $(\omega^\mu - h)^n = 0$, also $h = \omega^\mu$ und somit auch $e_\mu^{(1)} = 0$ (siehe (32)). Angenommen es sei schon bewiesen, daß $e_\mu^{(1)} = 0$, $e_{\mu-1}^{(1)} = 0, \cdots, e_{k-1}^{(1)} = 0$ ist, so folgt aus der letzten Formel (33) $(\omega^k - \omega^\mu)^{n-1}e_k^{(1)} = 0$. Da ω aber keine Einheitswurzel ist so kann der Faktor von $e_k^{(1)}$ nicht Null sein, also muß $e_k^{(1)} = 0$ sein, w. z. b. w.

Lemma 8. *Ist* $\mathfrak{g}(t) = (t-\omega_0)^{\alpha_0}(t-\omega_1)^{\alpha_1}\cdots(t-\omega_\nu)^{\alpha_\nu}$ wo $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_\nu$ *unter sich verschieden sind, und setzt man*

$$\bar{\mathfrak{g}}(t) = (t-\omega_0)(t-\omega_1)\cdots(t-\omega_\nu),$$

so befriedigt jede Hauptlösung $R(\xi)$ *von*

$$\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi = 0$$

auch die Gleichung

$$\bar{\mathfrak{g}}(\dot{R})\Phi = 0.$$

Beweis. Man setze $\mathfrak{g}(\dot{R}) = (\dot{R}-\omega_0)^{\alpha_0}\mathfrak{g}_0(\dot{R})$ und $\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi)$. Wir dürfen dann voraussetzen, daß $\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi$ nicht identisch $= 0$ ist; denn sonst knüpfen wir die ganze Betrachtung an diese Gleichung an und erkennen zugleich, daß, wenn der Satz für diese gilt, er auch für die gegebene Gleichung richtig ist. Aus dieser letzteren, die man nun schreiben kann $(\dot{R}-\omega_0)^{\alpha_0}\Phi_0 = 0$ folgt nach Lemma 7 $(\dot{R}-\omega_0)\Phi_0 = (\dot{R}-\omega_0)\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi = 0$. Setzen wir weiter

$$(\dot{R}-\omega_0)\mathfrak{g}_0(\dot{R}) = (\dot{R}-\omega_0)(\dot{R}-\omega_1)^{\alpha_1}\mathfrak{g}_1(\dot{R}) \quad \text{und} \quad (\dot{R}-\omega_0)\mathfrak{g}_0(\dot{R}) = \Phi_1,$$

so schließt man ebenso, daß auch $(\dot{R}-\omega_0)(\dot{R}-\omega_1)\mathfrak{g}_1(\dot{R})\Phi = 0$ ist. Indem man so fortfährt, erhält man den behaupteten Satz.

H. Ist also eine Iteralgleichung der betrachteten Form vorgelegt, so

kann man zunächst aus dem erzeugenden Funktional die mehrfachen Faktoren weglassen und kommt so zu einer Gleichung niedrigerer Ordnung, die dieselben Hauptlösungen besitzt wie die gegebene Gleichung. Sie heiße die *reduzierte* Gleichung und werde wieder mit $\mathfrak{g}(\dot f)\Phi = 0$ bezeichnet. Eine Hauptlösung R derselben kann dann primitiv oder unprimitiv sein. Im letzteren Fall genügt R primitiv einer Gleichung niedrigerer Ordnung, deren Funktional ein Faktor von $\mathfrak{g}(\dot f)$ ist (Lemma 3), und umgekehrt ist jede Lösung einer Gleichung, die zu einem Faktor von $\mathfrak{g}(\dot f)$ gehört, eine imprimitive Lösung der gegebenen Gleichung (Lemma 1). Es genügt also, um alle Lösungen zu finden, die primitiven Lösungen jeder Gleichung bestimmen zu können, wenn solche überhaupt existieren. Das Kennzeichen hierfür liefert nun der folgende

Satz 3. *Soll die Iteralgleichung* $\mathfrak{g}(\dot f)\Phi(\xi) = 0$, *wo* $\Phi = c_\mu \xi^\mu + \cdots$ *gegeben ist, eine Hauptreihe* $R = \omega\xi + b_1\xi^2 + \cdots$ *zur primitiven Lösung haben, so ist notwendig und hinreichend, daß die Wurzeln der Grundgleichung unter sich verschieden und positiv-ganzzahlige Potenzen der* μ^{ten} *Wurzel einer bestimmten unter ihnen sind, daß also*

$$\mathfrak{g}(t) = (t-\omega_0)\left(t-\omega_0^{\frac{p_1}{\mu}}\right)\cdots\left(t-\omega_0^{\frac{p_{n-1}}{\mu}}\right) \tag{34}$$

ist.

Beweis. Angenommen

$$\mathfrak{g}(\dot f)\Phi = (\dot f-\omega_0)\cdot\;\cdot(\dot f-\omega_{n-1})\Phi = 0 \tag{35}$$

habe die primitive Hauptlösung R (sei also in bezug auf R irreduzibel), so setze man

$$\frac{1}{\mathfrak{g}'(\omega_\lambda)}\cdot\frac{\mathfrak{g}(t)}{t-\omega_\lambda} = \mathfrak{g}_\lambda(t) \text{ und } \mathfrak{g}_\lambda(\dot R)\Phi(\xi) = \Phi_\lambda(\xi) \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{36}$$

Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{g}(\dot R)$ müssen (Lemma 8) die Wurzeln ω_λ unter sich verschieden sein, und aus demselben Grund kann keine der n Funktionen Φ_λ identisch gleich Null sein (auch nicht gleich einer Konstanten, da $\Phi_\lambda(0) = 0$ ist). Die gegebene Iteralgleichung läßt sich somit auf n Arten in die Form bringen

$$\Phi_\lambda(R(\xi)) = \omega_\lambda\Phi(\xi) \quad (\lambda = 0, \cdots, n-1). \tag{37}$$

Hierin hat Φ_λ jedenfalls die Form $\Phi_\lambda = e_\lambda\xi^{p_\lambda} + \cdots$ und somit ist (nach Lemma 4)

$$\omega_\lambda = \omega^{p_\lambda}. \tag{38}$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{g}(\dot R)\Phi = 0$ folgt aber durch Entwicklung der linken Seite und Nullsetzen der Koeffizienten

$$\mathfrak{g}(\omega^\mu) = 0$$

d. h. einer der Exponenten p_λ, etwa p_0, muß gleich μ sein. Man hat also

(39) $$\omega = \omega_0^{\frac{1}{\mu}}$$

und folglich $\omega_\lambda = \omega_0^{\frac{p_\lambda}{\mu}}$, womit gezeigt ist, daß die Bedingung (34) tatsächlich notwendig ist.

J. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird der Multiplikator ω einer etwaigen Hauptlösung durch (39) μ-deutig bestimmt. Führt man ihn ein, so nimmt die Gleichung (35) die Gestalt an

(40) $$\mathfrak{g}(\dot{f})\Phi = (\dot{f}-\omega)(\dot{f}-\omega^{p_1})\cdots(\dot{f}-\omega^{p_{n-1}})\Phi = 0.$$

Daß diese Gleichung stets eine primitive Hauptlösung besitzt, zeigen wir, indem wir dieselbe explizite aufstellen. Die Gleichungen (37) nehmen jetzt die Form an

(41) $$\Phi_0(R) = \omega^\mu \Phi_0(\xi),\ \Phi_1(R) = \omega^{k_1}\Phi_1(\xi), \cdots, \Phi_{n-1}(R) = \omega^{k_{n-1}}\Phi_{n-1}(\xi).$$

Durch Elimination von ω erhält man hieraus die $n-1$ Gleichungen

(42) $$\frac{[\Phi_\lambda(R)]^\mu}{[\Phi_0(R)]^{p_\lambda}} = \frac{[\Phi_\lambda(\xi)]^\mu}{[\Phi_0(\xi)]^{p_\lambda}} \qquad (\lambda = 1, \cdots, n-1).$$

Darin sind Zähler und Nenner jedes Bruches Potenzreihen, die beide mit $\xi^{\mu p_\lambda}$ beginnen, ihr Quotient ist also eine reguläre Reihe $\psi_\lambda = c_\lambda + c_\lambda{}'\xi + \cdots$, die für $\xi = 0$ nicht verschwindet, und für die also die Relation besteht

$$\psi_\lambda(R) = \psi_\lambda(\xi).$$

Nunmehr haben wir zwei Fälle zu unterscheiden und getrennt zu behandeln.

Erster Fall: ω ist keine Einheitswurzel.

K. Dann muß sich nach Lemma 5 ψ_λ auf eine Konstante c_λ reduzieren, wir erhalten also aus (42)

$$[\Phi_\lambda(\xi)]^\mu = c_\lambda[\Phi_0(\xi)]^{p_\lambda}$$

oder nach (36)

(43) $$[\mathfrak{g}_1(\dot{R})\Phi]^\mu = c_\lambda[\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi]^{p_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \cdots, n-1).$$

Nun sind $\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi, \cdots, \mathfrak{g}_{n-1}(\dot{R})\Phi$ lineare Aggregate von $\Phi(\xi), \Phi(R), \cdots, \Phi(R_{(n-1)})$, etwa

$$\mathfrak{g}_\lambda(\dot{R})\Phi = q_{1,\lambda}\Phi(R_{(n-1)}) + q_{2,\lambda}\Phi(R_{(n-2)}) + \cdots + q_{n,\lambda}\Phi(\xi).$$

Danach stellen die Formeln (43) $n-1$ algebraische Gleichungen zwischen den n Funktionen $\Phi(\xi), \cdots, \Phi(R_{(n-1)})$ vor. Durch Elimination von $\Phi(R_{(2)}) \cdots \Phi(R_{(n-1)})$ gewinnt man daher eine Endgleichung, die nur noch $\Phi(\xi)$ und $\Phi(R)$ enthält. Speziell für $n = 2$ besteht das System (43) von vornherein aus einer einzigen Gleichung zwischen $\Phi(R)$ und $\Phi(\xi)$, die so lautet

(44) $$[\Phi(R) - \omega^\mu\Phi(\xi)]^\mu = c[\Phi(R) - \omega^{p_1}\Phi(\xi)]^{p_1}.$$

Es ist also $\Phi(R)$ eine algebraische Funktion von $\Phi(\xi)$, und zwar wollen wir noch zeigen, daß sich $\Phi(R)$ und $\Phi(\xi)$ als rationale Funktionen eines Parameters y darstellen lassen. Man setze

$$(45)\qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi(\xi) = y^\mu, & \text{so folgt aus (43)} \\ \mathfrak{g}_\lambda(\dot{R})\Phi(\xi) = c_\lambda^{\frac{1}{\mu}}\, y^{p_\lambda} = t_\lambda y^{p_\lambda} & (\lambda = 1, \cdots, n-1). \end{cases}$$

Nun gelten für die Funktionen $\mathfrak{g}_\lambda(t)$ (vgl. ihre Definition (36)) die Relationen

$$(46)\qquad \sum_{\lambda=0}^{n-1} \omega_\lambda^k \mathfrak{g}_\lambda(t) = t^k \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1); \quad \omega_\lambda = \omega^{p_\lambda},$$

mit deren Hilfe man aus (45) das Formelsystem erhält

$$(47)\qquad \begin{aligned} \Phi(\xi) &= y^\mu + t_1 y^{p_1} + \cdots + t_{n-1} y^{p_{n-1}} = \psi(y), \\ \Phi(R) &= (\omega y)^\mu + t_1(\omega y)^{p_1} + \cdots + t_{n-1}(\omega y)^{p_{n-1}} = \psi(\omega y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi(R_{(k)}) &= (\omega^k y)^\mu + t_1(\omega^k y)^{p_1} + \cdots + t_{n-1}(\omega^k y)^{p_{n-1}} = \psi(\omega^k y) \\ &\qquad (k = 0, 1, \cdots n-1). \end{aligned}$$

L. Durch die beiden ersten Gleichungen ist $\Phi(R)$ als algebraische Funktion nullten Ranges von $\Phi(\xi)$ bestimmt. Löst man die Gleichungen nach ξ resp. R auf (wobei man sich erinnere, daß $\Phi(\xi)$ mit ξ^μ beginnt), so erhält man zunächst, wenn $\Phi = \varphi^\mu$, $\psi = \chi^\mu$ gesetzt wird, $\varphi(\xi) = \varepsilon\chi(y)$, $\varphi(R) = \varepsilon'\chi(\omega y)$, $\varphi(R_{(2)}) = \varepsilon''\chi(\omega^2 y) \cdots$, wo unter $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \cdots$, μ^{te} Einheitswurzeln verstanden sind. Da φ, χ als Hauptreihen eindeutig umkehrbar sind, folgert man

$$\xi = \overline{\varphi}(\varepsilon\chi(y)) = S_\varepsilon(y);\ R = \overline{\varphi}(\varepsilon'\chi(\omega y)) = S_{\varepsilon'}(\omega y);\ R_{(2)} = \overline{\varphi}(\varepsilon''\chi(\omega^2 y)) = S_{\varepsilon''}(\omega^2 y); \cdots$$

und hieraus $R = \overline{\varphi}\,\varepsilon' \cdot \chi\omega \cdot \overline{\chi}\varepsilon^{-1} \cdot \varphi$. Durch Iteration ergibt sich

$$R_{(2)} = \overline{\varphi}\varepsilon'\chi\omega\overline{\chi}\varepsilon^{-1}\varepsilon'\chi\omega\overline{\chi}\varepsilon^{-1}\varphi,$$

was nur dann die Form $\overline{\varphi}\varepsilon''\chi\omega\overline{\chi}\varepsilon^{-1}\varphi$ haben kann, wenn man $\varepsilon' = \varepsilon$ nimmt. Damit wird $R = S_\varepsilon(\omega y)$ oder

$$(48)\qquad R(\xi) = S_\varepsilon(\omega\overline{S}_\varepsilon(\xi)) = \omega\xi + b_1\xi^2 + \cdots$$

worin die Koeffizienten b_k von ε abhängen. Durch Iteration folgt

$$R_{(k)}(\xi) = S_\varepsilon(\omega^k\overline{S}_\varepsilon(\xi)) \quad \text{und} \quad \Phi(R_{(k)}) = \psi(\omega^k\overline{S}_\varepsilon(\xi)) = \psi(\omega^k y),$$

womit *erstens* bewiesen ist, daß die durch die letzte Gleichung (47) definierte Reihe $R_{(k)}$ auch wirklich das litterale Iterat der Reihe (48) ist, sowie *zweitens*, daß diese Gleichung (47) für jeden ganzzahligen Wert von k besteht (auch für negative, wenn unter $R_{(-k)}$ das k^{te} Iterat von $\overline{R}$ verstanden wird).

M. Die Gleichungen (47) lehren noch das interessante Resultat, daß die den μ Werten von ε entsprechenden Reihen $R(\xi)$ algebraische Funktionen darstellen, sobald die Basis Φ algebraisch ist. Speziell also in dem Fall der Iteralgleichung (30) ($\Phi = \xi$, $\mu = 1$) ist $R(\xi)$ eine algebraische Funktion vom Range Null, deren Entwicklung leicht angegeben werden kann. Man braucht nur aus $y = \xi - (t_1 y^{p_1} + \cdots + t_{n-1} y^{p_{n-1}})$ nach der Formel von Lagrange $\psi(\omega y) = R(\xi)$ zu berechnen, so findet man die konvergente Reihe

$$(49)\quad R(\xi) = \omega\xi + (\omega^{p_1} - \omega)\, t_1 \xi^{p_1} + \cdots + (\omega^{p_{n-1}}\,\omega) t_{n-1} \xi^{p_{n-1}} + \cdots$$
$$\cdots + \xi^k \sum_{0}^{n-1} {}_{\nu}\, p_\nu t_\nu \quad\cdot \sum_{(\alpha)}^{(p_1-1)\alpha_1 + \cdots + (p_{n-1}-1)\alpha_{n-1} = k - p_\nu} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \frac{(k-1+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})!}{k!\,\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!} + \cdots.$$

Setzt man noch hierin $t_1 = \tau_1^{p_1 - 1}, \cdots, t_{n-1} = \tau_{n-1}^{p_{n-1}-1}$, so werden die Koeffizienten in den neuen Parametern homogen, was mit der Bemerkung in D. übereinstimmt.

Wir fassen die letzten Resultate zusammen in den Satz

Satz 4. *Die Iteralgleichung n^{ter} Ordnung*

$$(\dot f - \omega^\mu)(\dot f - \omega^{p_1}) \cdots (\dot f - \omega^{p_{n-1}})\Phi = 0$$

in der ω keine Einheitswurzel und $\Phi = e_\mu \xi^\mu + \cdots$ ist, besitzt μ Hauptreihen $R(\xi) = \omega\xi + \cdots$, die noch $n-1$ willkürliche Parameter $t_1, \cdots, t_{n-1}$ enthalten, zu primitiven Lösungen. Dieselben sind Zweige algebraischer Funktionen, wenn Φ algebraisch ist.

Zusatz. *Besteht zwischen einer endlichen Zahl von Iteraten einer Hauptreihe, deren erster Koeffizient keine Einheitswurzel ist, eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten, so stellt die Hauptreihe eine algebraische Funktion vom Range Null dar.*

Zweiter Fall: $\omega = \varepsilon$, $\varepsilon^\nu = 1$.

N. In diesem Fall kann man nicht schließen, daß der Quotient ψ_λ in (42) einer Konstanten gleich sein muß, da es wirkliche Funktionen geben kann, die die Substitution $R(\xi)$ erlauben. Wir nennen eine Reihe $J = c\xi^k + \cdots$, für die $J(R(\xi)) = J(\xi)$ gilt, eine *Invariante* von R. Im folgenden denken wir uns die Invarianten immer ohne konstantes Glied ($J(0) = 0$), und gelegentlich den ersten Koeffizienten $= 1$ gesetzt, was ja frei steht. Aus Lemma 4 folgt, daß der Exponent des ersten Gliedes in $J(\xi)$ ein ganzzahliges Vielfaches von ν sein muß. Ist $k = \varrho \cdot \nu$, so heißt ϱ die *Ordnung* der Invariante. Eine Invariante der Ordnung 1 heißt *Hauptinvariante.* Es gilt dann

Lemma 9. *Eine Invariante der Ordnung ϱ ist die ϱ^{te} Potenz einer Hauptinvariante.*

Denn zunächst ist $J_1 = \xi^{\varrho\nu} + \cdots$ jedenfalls die ϱ^{te} Potenz einer ganzen Reihe $J(\xi)$, die mit ξ^ν beginnt. Aus $J_1(R) = J_1(\xi)$ folgt dann $J(R) = \eta J(\xi)$, wo $\eta^\varrho = 1$ ist. Da aber wegen $\varepsilon^\nu = 1$ die linke Seite mit ξ^ν beginnt, muß $\eta = 1$ sein, d. h. $J = J_1^{\frac{1}{\varrho}}$ ist Hauptinvariante von R.

Es ist klar, daß jede ganze Funktion*) einer Invariante wieder eine Invariante ist. Umgekehrt gilt das

Lemma 10. *Jede Invariante von R ist eine ganze Funktion einer beliebigen Hauptinvariante.*

Beweis. Ist $J = \xi^\nu + \cdots$ eine Hauptinvariante,

$$J_1 = c_{\varrho,0}\xi^{\varrho\nu} + c_{\varrho,1}\xi^{\varrho\nu+1} + \cdots + c_{\varrho_\varkappa,\lambda}\xi^{\varrho_\varkappa\nu+\lambda} + \cdots \qquad (\lambda < \varrho_\varkappa \nu)$$

eine andere Invariante, so ist auch die Reihe $J_1 - c_{\varrho,0}J^\varrho$ invariant, beginnt also notwendig mit einem Glied $c_{\varrho_1,0}\xi^{\varrho_1\nu} + \cdots$. Ebenso ist $J_1 - c_{\varrho,0}J^\varrho - c_{\varrho_1,0}J^{\varrho_1}$ invariant, muß also mit $c_{\varrho_2,0}\xi^{\varrho_2\nu}$ beginnen. Fährt man so fort, so erhält man schließlich für J_1 die endliche oder unendliche Reihe

$$J_1(\xi) = c_{\varrho,0}J^\varrho + c_{\varrho_1,0}J^{\varrho_1} + \cdots + c_{\varrho_\varkappa,0}J^{\varrho_\varkappa} + \cdots \tag{50}$$

deren Konvergenz einleuchtet. — Die Kenntnis einer einzigen Invariante liefert mithin alle andern.

O. Es sei nun $R(\xi) = \varepsilon\xi + \cdots$ eine primitive Hauptlösung der Gleichung (35), dann gelten wie im Fall I die Gleichungen (41), in denen wir ε für ω schreiben. Indem man beide Seiten jener Gleichungen in die ν^{te} Potenz erhebt, erkennt man, daß die Funktionen

$$\Phi_0^\nu,\ \Phi_1^\nu, \cdots, \Phi_{n-1}^\nu$$

Invarianten von R sind von den Ordnungen $\mu, p_1, \cdots, p_{n-1}$. Nach Lemma 9 ist dann $\Phi_0^{\frac{\nu}{\mu}}$ eine Hauptinvariante, durch die sich die übrigen Invarianten nach Lemma 10 als ganze Funktionen ausdrücken lassen. Setzt man also die Hauptreihe $\Phi_0^{\frac{1}{\mu}} = y$ oder $\Phi_0^{\frac{\nu}{\mu}} = y^\nu$, so müssen sich die Funktionen $\Phi_\lambda^\nu = [\mathfrak{g}_\lambda(\dot{R})\Phi]^\nu$ in der Form darstellen lassen

$$[\Phi_\lambda(\xi)]^\nu = [\mathfrak{g}_\lambda(\dot{R})\Phi]^\nu = y^{p_\lambda \nu}(C_{\lambda,0} + C_{\lambda,1}y^\nu + C_{\lambda,2}y^{2\nu} + \cdots) = y^{p_\lambda\nu}\,\mathsf{H}_\lambda(y^\nu)$$
$$(\lambda = 1, \cdots, n-1).$$

Zieht man die ν^{te} Wurzel und schreibt $F_\lambda(x)$ für $\sqrt[\nu]{\mathsf{H}_\lambda(x)}$, wo also F_λ eine reguläre Reihe mit konstantem Anfangsglied vorstellt, so hat man

$$\mathfrak{g}_0(\dot{R})\Phi = y^\mu,\ \mathfrak{g}_1(\dot{R})\Phi = F_1(y^\nu)y^{p_1}, \cdots, \mathfrak{g}_{n-1}(\dot{R})\Phi = F_{n-1}(y^\nu)y^{p_{n-1}}. \tag{51}$$

---

*) Unter einer ganzen Funktion ist wie immer in diesem Paragraphen eine endliche oder unendliche reguläre Potenzreihe von ξ verstanden.

Hieraus erhält man mittels der Formeln (46) das System

$$
(52)\quad
\begin{aligned}
\Phi(\xi) &= y^\mu + F_1(y^\nu)\cdot y^{p_1} + \cdots + F_{n-1}(y^\nu)\cdot y^{p_{n-1}} = \psi(y), \qquad \varepsilon^\nu = 1\\
\Phi(R) &= (\varepsilon y)^\mu + F_1(y^\nu)\cdot(\varepsilon y)^{p_1} + \cdots + F_{n-1}(y^\nu)\cdot(\varepsilon y)^{p_{n-1}} = \psi(\varepsilon y),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Phi R_{(k)} &= (\varepsilon^k y)^\mu + F_1(y^\nu)\cdot(\varepsilon^k y)^{p_1} + \cdots + F_{n-1}(y^\nu)\cdot(\varepsilon^k y)^{p_{n-1}} = \psi(\varepsilon^k y).
\end{aligned}
$$

Durch die beiden ersten Gleichungen sind wie bei Fall I μ Hauptreihen R bestimmt, die man mit Hilfe der Hauptreihe $\bar{\Phi}(\psi(y)) = S_\varepsilon(y)$ auf die Form bringen kann

$$
(53)\qquad R(\xi) = S_\varepsilon(\varepsilon\cdot \bar{S}_\varepsilon(\xi)).
$$

Umgekehrt aber sieht man ein, daß, wenn $F_1, \cdots, F_{n-1}$ *beliebige* reguläre Potenzreihen bedeuten, jede aus den beiden Gleichungen bestimmte Reihe (53) der gegebenen Iteralgleichung genügt. Denn zunächst folgt $R_{(k)} = S_\varepsilon(\varepsilon^k \bar{S})$ und $\Phi(R_{(k)}) = S(\psi(\varepsilon^k y))$ für jedes k und da sich die Funktionen $F_\lambda(y^\nu)$ in bezug auf die Substitution εy wie Konstante verhalten, schließt man unmittelbar, daß

$$
\mathfrak{g}(\dot{R})\Phi = \Phi(R_{(n)}) + a_1\Phi(R_{(n-1)}) + \cdots + a_n\Phi(\xi) \equiv 0
$$

wird.

P. Das System (52) geht aus (47) offenbar dadurch hervor, daß man $t_1, \cdots, t_{n-1}$ nicht als Konstanten, sondern als willkürliche Funktionen von y^ν betrachtet. Die Hauptlösung hängt also von $n-1$ willkürlichen Funktionen ab, ist also im allgemeinen auch bei algebraischem Φ nicht algebraisch, sondern nur dann, wenn mit Φ auch $F_1, \cdots, F_{n-1}$ algebraisch sind. Man kann übrigens in (52) auch das erste Glied y^μ mit einer Funktion $F_0(y^\nu)$ multiplizieren, ohne indes dadurch eine allgemeinere Lösung für R zu erhalten. Denn man braucht dann nur einen neuen Parameter z zu definieren durch die Gleichung $y^\mu F(y^\nu) = z^\mu$, so nimmt jede Gleichung für $\Phi R_{(k)}$ die Gestalt (52) an.

Aus (53) oder schon aus (41) für $\omega = \varepsilon$ nach Lemma 6 ergibt sich

$$
R_{(\nu)} = \xi,
$$

d. h. *jede Lösung einer linearen Iteralgleichung (bei beliebiger Basis), deren erster Koeffizient eine Einheitswurzel ist, ist eine zyklische Funktion.*

Die allgemeinste zyklische Hauptreihe erhält man aus (52) für $\nu = n$, $\mu = 1$, $p_1 = 2, \cdots, p_{n-1} = n$, $\Phi = \xi$, indem man die beiden ersten Gleichungen in der vorhin besprochenen Weise umformt

$$
\begin{aligned}
\xi &= F_0(y^n)\cdot y + F_1(y^n)\cdot y^2 + \cdots + F_{n-1}(y^n)y^n = F(y),\\
R(\xi) &= F_0(y^n)\cdot \varepsilon y + F_1(y^n)(\varepsilon y)^2 + \cdots + F_{n-1}(y^n)y^n = F(\varepsilon y),
\end{aligned}
$$

in der bekannten Form

$$R(\xi) = F \varepsilon \overline{F}(\xi),$$

wo nun $F(\xi)$ eine beliebige reguläre Potenzreihe bedeutet. — Wir fassen die letzten Resultate wieder in einen Satz zusammen:

Satz 5. *Die Iteralgleichung* $(\dot{f} - \varepsilon^{\mu})(\dot{f} - \varepsilon^{p_1}) \cdots (\dot{f} - \varepsilon^{p_{n-1}})\Phi(\xi) = 0$, $(\varepsilon^{\nu} = 1)$ *hat unendlich viele primitive Hauptlösungen, unter denen, falls* Φ *algebraisch ist, unendlich viele algebraische vorkommen. Jede ihrer Lösungen ist eine zyklische Funktion von der Periode* ν.

Zusatz. *Jede zyklische Hauptreihe hat eine und folglich unendlich viele Invarianten.*

Denn ist $R = \varepsilon\xi + \cdots$ und $R_{(\nu)} = \xi$, so ist offenbar das Produkt

$$\xi \cdot R \cdot R_{(2)} \cdots R_{(\nu-1)} = \xi^{\nu} + \cdots$$

eine Hauptinvariante.

Beispiel: Für $R(\xi) = \xi + 1 - \sqrt{1 + 4\xi} = -\xi + 2\xi^2 - 4\xi^3 + \cdots$ ist $1 + 4R = (2 - \sqrt{1 + 4\xi})^2$, also folgt $+\sqrt{1 + 4R} = 2 - \sqrt{1 + 4\xi}$ und $R_{(2)} = \xi$.

Hieraus schließt man sofort $R_{(2)} + R = R + \xi$, d. h. es ist

$$J(\xi) = R(\xi) + \xi = 2\xi + 1 - \sqrt{1 + 4\xi} = 2\xi^2 - 4\xi^3 + \cdots$$

eine Invariante von R.

Q. Gehen wir wieder auf den allgemeinen Fall zurück. Wir haben bisher nur die primitiven Lösungen der reduzierten Gleichung (40) behandelt. Um die imprimitiven Lösungen zu erhalten, hat man vom Funktional $\mathfrak{g}(\dot{f})$ auf alle möglichen Arten einen (nicht linearen) Faktor $\mathfrak{h}(\dot{f})$ abzutrennen und dann die Gleichung $\mathfrak{h}(\dot{f})\Phi = 0$ zu lösen. Wir scheiden hiervon noch diejenigen Gleichungen aus, deren Funktionale den Faktor $(\dot{f} - \omega^{\mu})$ enthalten; denn ihre Hauptlösungen kann man einfach aus denen von $\mathfrak{g}(\dot{f})\Phi = 0$ erhalten, indem man in der Gl. (49) (resp. (52)) gewisse der Größen t_{λ} (resp. F_{λ}) gleich Null setzt, und sie sind daher als partikuläre Lösungen ohne besonderes Interesse. Die übrigen Gleichungen $\mathfrak{h}(\dot{f})\Phi = 0$ haben nur dann eine Lösung, wenn das Funktional $\mathfrak{h}$ der Bedingung (34) (Satz 3) genügt. Ist dies der Fall, so erhält man Hauptlösungen, deren Multiplikatoren gewisse Potenzen von ω sind. Man findet so z. B., daß die Gleichung vierter Ordnung

$$(\dot{f} - \omega)(\dot{f} - \omega^2)(\dot{f} - \omega^4)(\dot{f} - \omega^8)\xi = 0$$

außer der primitiven Lösung noch zwei imprimitive besitzt, deren Entwicklungen mit $\omega^2\xi + \cdots$ resp. $\omega^4\xi + \cdots$ beginnen.

R. Hiermit haben wir die zu Beginn des Paragraphen gestellte Aufgabe selbst für den Fall einer beliebigen Basis Φ völlig erledigt. Wir fassen die Hauptresultate für den ursprünglich allein angenommenen Fall $\Phi = \xi$ in folgender Weise zusammen:

Resultat. *Eine lineare Iteralgleichung mit konstanten Koeffizienten hat im allgemeinen keine Hauptlösung.*

Soll eine solche existieren, so ist notwendig und hinreichend, daß unter den Wurzeln der zugehörigen Grundgleichung eine Gruppe von n Wurzeln vorkommt, die ganzzahlige Potenzen einer bestimmten (ω) *unter ihnen sind. Es kann mehrere solcher Gruppen geben. Zu jeder Gruppe gehört eine Iteralgleichung, die reduziert heißt. Die Hauptlösungen der vorgelegten Iteralgleichung sind gegeben durch die Gesamtheit der Lösungen dieser reduzierten Gleichungen.*

Eine reduzierte Iteralgleichung n^{ter} Ordnung hat im allgemeinen nur eine primitive Hauptlösung, die $n-1$ willkürliche Parameter enthält, und eine algebraische Funktion vom Range Null darstellt. Nur wenn ω eine ν^{te} Einheitswurzel ist ($\nu \neq 1$), *hängt die primitive Hauptlösung von $n-1$ willkürlichen Potenzreihen ab. Es gibt also dann unendlich viele Hauptlösungen (algebraische wie transzendente), die aber alle zugleich zyklische Funktionen von der Periode ν sind.*

S. Wie man sieht, sind die so gefundenen Hauptreihen, soweit sie algebraisch sind, unter den algebraischen Lösungen des § 3, (21) enthalten (was nicht selbstverständlich ist, da wir nicht bewiesen haben, daß es keine anderen algebraischen Lösungen gibt als die, welche mit Hilfe der Differenzengleichung gefunden werden; vergl. die Bemerkung nach Formel (10)).

Man kann das Problem von § 4 etwas erweitern, indem man auch gewisse Reihen mit negativen oder gebrochenen Exponenten zuläßt. Man bemerkt leicht, daß auch die Reihen der folgenden Form

$$\omega\xi + \frac{b_1}{\xi} + \frac{b_2}{\xi^2} + \cdots \quad \text{und} \quad \omega\xi + b_1\xi^{\frac{1}{\nu}} + b_2\xi^{\frac{2}{\nu}} + \cdots$$

bei litteraler Iteration wieder auf Reihen derselben Form führen und überhaupt alle wesentlichen Eigenschaften der Hauptreihen besitzen. Man wird daher passend auch diese Reihen als (absteigende) Hauptreihen bezeichnen und die bisher betrachteten als aufsteigende Hauptreihen davon unterscheiden. Man kann dann die Methode dieses Paragraphen fast wörtlich auf diese erweiterten Reihen anwenden und findet wieder als Hauptlösung einer Iteralgleichung (30) ein System analog (47) resp. (52), worin nur $\mu, p_1, \cdots, p_{n-1}$ zum Teil auch gebrochene oder negative Zahlen bedeuten können. Auch diese sind noch in den Lösungen von Formel (21) enthalten.

Endlich kann man dieselben Prinzipien verwerten beim Studium von simultanen Iteralgleichungen zwischen Funktionen mehrerer Variabelen z. B. der folgenden

$$a_0 R_{(2)} + b_0 S_{(2)} + a_1 R + b_1 S + a_2 \xi + b_2 \eta = 0 \quad (R_{(2)} = R(R,S),\ S_{(2)} = S(R,S))$$
$$c_0 R_{(2)} + d_0 S_{(2)} + c_1 R + d_1 S + c_2 \xi + d_2 \eta = 0$$

und kann diese durch Hauptreihen mehrerer Variablen, also hier

$$R = \alpha\xi + \beta\eta + p_{1,}\xi^2 + \cdots, \quad S = \gamma\xi + \delta\eta + q_{1,}\xi^2 + \cdots$$

zu befriedigen versuchen, worauf wir ein andermal näher eingehen werden.*)

*) Das in diesem Aufsatze behandelte Problem findet sich (in Comptes Rendus 125) von Leméray in einer kurzen Note erwähnt und seine formale Lösung durch Zurückführung auf eine Differenzengleichung angedeutet. Iteralgleichungen allgemeiner Art sind in größeren Aufsätzen behandelt von Grévy (Ann. de l'Éc. Norm. sup. 1894, Tome XI, und Bull. d. l. Soc. Math. d. Fr. 25, 26), doch unter ganz anderem Gesichtspunkte, indem gerade die Funktionen, deren Iterate in den Gleichungen auftreten, als bekannt vorausgesetzt und gewisse akzessorische Funktionen, wie etwa in unserem Beispiele die Basis Φ, gesucht sind. Vergl. auch die Arbeiten von Leau (Ann. d. l. Fac. d. Sc. d. Toulouse 11, 12) über Funktionalgleichungen und von Pincherle über Operationen, bei welchen Autoren sich weitere Literatur angegeben findet. Soweit ich bei der wenigen mir zur Verfügung stehenden Literatur beurteilen kann, dürfte der wesentliche Inhalt des § 4 neu sein. Vergl. noch meine Dissertation „Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung" (Mitteilungen d. Nat. forsch. Ges., Bern 1901).

Sur la généralisation du problème de Dirichlet.

(Première partie.)

Par

Serge Bernstein à St. Pétersbourg.

On rencontre souvent en physique et en géométrie le problème suivant:

Déterminer une fonction continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur d'un contour C, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles du type elliptique $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ *et prenant sur le contour C une succession de valeurs déterminée.*

Nous appellerons ce problème *problème de Dirichlet de première espèce,* ou bien si aucune confusion n'est possible, tout simplement *problème de Dirichlet.*

J'ai indiqué dans ma Thèse*) une méthode paramétrique qui ramène ce problème à celui du prolongement analytique. La question importante est de reconnaître dans quels cas ce prolongement est possible. Dans ce travail nous nous proposons de développer cette théorie qui est une combinaison des deux méthodes fondamentales de l'analyse: celle des approximations successives et du prolongement analytique. Notre idée première consiste, en effet, à reconnaître 1° que le problème de Dirichlet est possible dans un cas particulier simple, 2° que s'il est possible dans un cas il est, en général, possible dans des cas suffisamment approchés et 3° qu'on peut par des déformations continues passer ainsi de proche en proche du contour simple au contour donné.

Dans cette première partie je m'occupe exclusivement du cas où $F = 0$ est de la forme $r + t = f(xyzpq)$. Les principaux résultats ont été communiqués à l'Académie Française des Sciences le 24 octobre 1904 et le 29 mai 1905.

*) Mathematische Annalen t. 59.

I.

Généralités.

1. Soit $F(xy)$ une fonction de deux variables réelles. Faisons le changement de variables $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$. Nous supposons qu'on ait:

$$F(xy) = F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta) = \sum_0^\infty A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

le développement trigonométrique étant absolument et uniformément convergent. On sait que pour qu'il en soit ainsi *il suffit* que F admette des dérivées partielles du premier ordre finies. Nous adopterons dans la suite les notations suivantes. On posera $|F(xy)|'_\varrho = \sum_0^\infty |A_n(\varrho)| + |B_n(\varrho)|$;

on posera également $|F(xy)|_R = \sum_0^\infty \max. |A_n| + \max. |B_n|$ à l'intérieur du cercle C de rayon R; on dira de plus que $|F(xy)|_R$ est le *module trigonométrique* de $F(xy)$ à l'intérieur du cercle C. J'attire l'attention sur la différence essentielle qu'il y a entre la notion que nous venons d'introduire et celle de la norme qui a joué un rôle important dans ma Thèse.

Ceci posé, nous commencerons par établir une proposition qui nous sera d'une certaine utilité dans la suite et qui d'ailleurs est assez intéressante en elle-même, puisqu'elle est une généralisation naturelle d'une propriété fondamentale des fonctions harmoniques.

2. Théorème. *Soit z une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

f étant analytique. Si z est finie ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur d'un contour analytique C; si de plus sur ce contour elle se réduit à une fonction analytique de l'arc, elle peut être prolongée analytiquement à l'extérieur du contour.

Il suffit manifestement de démontrer notre théorème en supposant le contour circulaire. D'autre part en remarquant que la fonction harmonique qui sur un contour circulaire C est analytique, peut être prolongée analytiquement à l'extérieur, on peut sans restreindre la généralité se borner au cas où z s'annulle sur C. Il est clair enfin que notre proposition sera établie, dès que nous aurons reconnu que la dérivée dans la direction de la normale $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ est une fonction analytique de l'angle θ tout le long de la circonférence C. A cet effet, considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = F(xy) = \sum_0^\infty A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

On sait, d'après M. Picard, que la solution z qui s'annulle sur C peut être développée en série trigonométrique:

$$z = \sum_0^\infty C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta,$$

où

$$C_0 = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho,$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2nC_n &= \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}}\, d\varrho - \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho, \\ 2nD_n &= \varrho^n \int_R^\varrho \frac{B_n}{\varrho^{n-1}}\, d\varrho - \frac{1}{\varrho^n} \int_0^\varrho B_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R B_n \varrho^{n+1} d\varrho \end{aligned}$$

et en différentiant

$$2\, \frac{dC_n}{d\varrho} = \varrho^{n-1} \int_R^\varrho \frac{A_n d\varrho}{\varrho^{n-1}} + \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho.$$

On en déduit facilement:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \left|\frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}\right|_R &= \sum_1^\infty n \left\{ \left|\frac{C_n}{\varrho}\right|_R + \left|\frac{D_n}{\varrho}\right|_R \right\} < \lambda\, |F(xy)|_R, \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\varrho \partial \theta^2}\right|_R &= \sum_1^\infty n^2 \left\{ \left|\frac{C_n}{\varrho}\right|_R + \left|\frac{D_n}{\varrho}\right|_R \right\} < \lambda\, |F(xy)|_R, \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho \partial \theta}\right|_R &= \sum_0^\infty n \left\{ \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|_R + \left|\frac{dD_n}{d\varrho}\right|_R \right\} < \lambda\, |F(xy)|_R \end{aligned}$$

λ étant un nombre fini pour toute valeur finie de R. On voit qu'ici les choses se passent d'une façon beaucoup plus simple que dans ma thèse où le but poursuivi était tout différent. Les inégalités (3) étant établies, revenons à l'équation (1) en introduisant les coordonnées polaires. Il vient:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \varphi \left(\varrho \theta z \frac{\partial z}{\partial \varrho} \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} \right)$$

$$= \sum_0^\infty a_n \left(\varrho z \frac{\partial z}{\partial \varrho} \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} \right) \cos n\theta + b_n \left(\varrho z \frac{\partial z}{\partial \varrho} \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} \right) \sin n\theta.$$

Désignons $\frac{\partial^n z}{\partial \theta^n}$ par z_n. On a alors successivement:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial \theta^2} = \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial z}{\partial \varrho}} \frac{\partial z_1}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}} \frac{\partial z_1}{\varrho \partial \theta}$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z_n}{\partial \theta^2} = \frac{d^n \varphi}{d\theta^n}.$$

D'où, en tenant compte des inégalités (3):

$$(4) \qquad \begin{aligned} |z_{n+1}|_R &< \lambda R \left|\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}\right|_R < h \left|\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}\right|_R, \\ \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\varrho \partial \theta}\right|_R &< \lambda \left|\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}\right|_R < h \left|\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}\right|_R, \\ \left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial \varrho}\right|_R &< \lambda \left|\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}\right|_R < h \left|\frac{d^n \varphi}{d\theta^n}\right|_R. \end{aligned}$$

Or nous pouvons construire une fonction $\psi\left(\theta, z + \frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}\right)$ telle que les dérivées partielles d'ordre quelconque de cette fonction pour $\theta = z + \frac{\partial z}{\partial \varrho} + \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta} = 0$ soient supérieures au module trigonométrique à l'intérieur du cercle C de la dérivée partielle correspondante de φ. Et par conséquent, en vertu des inégalités (4), la solution u de l'équation $\frac{du}{d\theta} = h\psi(\theta, u)$ qui s'annulle pour $\theta = 0$ aura sa dérivée d'ordre n supérieure à $\left|\frac{\partial z_n}{\partial \varrho}\right|_R$. Le module trigonométrique d'une fonction ne pouvant être inférieur à la fonction, la série de puissances de θ qui représente u est une série majorante de $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ considérée comme fonction de θ. Le théorème est donc établi. On voit qu'au fond notre raisonnement est identique à celui que Cauchy a introduit dans la science sous le nom du calcul des limites. Nous aurons encore une fois à l'appliquer, mais d'abord il nous faut établir certaines inégalités importantes. Dans ce but nous démontrerons le lemme suivant.

3. Lemme. *Soit une équation linéaire*

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(xy)\frac{\partial z}{\partial x} + b(xy)\frac{\partial z}{\partial y} + c(xy)z = 0 \qquad (c \leqq 0)$$

où a, b, c sont des fonctions admettant des modules trigonométriques finis. Il est possible de fixer un cercle C de rayon R suffisamment petit, mais bien déterminé, tel que l'équation (5) *admette une solution prenant une succession continue quelconque de valeurs sur la circonférence C. Cette solution s'obtiendra par la méthode des approximations successives et vérifiera les inégalités:*

$$(6)\qquad |z|_\varrho < \frac{KM}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_\varrho < \frac{KM}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_\varrho < \frac{KM}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

où K est un nombre fixe et M le maximum de la valeur absolue de z sur C.

Examinons d'abord le cas où l'équation (5) se réduit à l'équation de Laplace. On aura alors

$$z = \sum_0^\infty [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta]\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n$$

où A_n et B_n sont les coefficients de Fourier qui satisfont à l'inégalité

$$\sum_0^\infty [A_n^2 + B_n^2] < 2M^2.$$

Deux cas peuvent se présenter: ou bien

$$(7)\qquad \sum_0^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}(|A_n| + |B_n|) < 2M$$

ou bien

$$|A_n| < \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}\, M.$$

D'où il résulte que

$$(7^{\text{bis}})\qquad |z|_\varrho < \sum_0^\infty \{|A_n| + |B_n|\}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n + \frac{2M}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où A_n et B_n vérifient l'inégalité (7), puisque

$$\sum_0^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} z^n = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, en désignant $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$ par c_n, il est aisé de vérifier les inégalités:

$$\frac{1}{2n+1} > c_n^2 > \frac{1}{4n} \quad \text{et} \quad 2nc_n\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Et, par conséquent, des inégalités (7) et (7^{bis}) résulte immédiatement la première des inégalités (6). Un raisonnement*) identique nous conduirait aux deux autres.

---

*) On vérifiera d'ailleurs d'une façon générale la remarque suivante qui peut être utile dans bien des cas. Soient deux séries à termes positifs convergentes pour $\varrho < 1$

$$\Sigma(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + \cdots + a_n\varrho^n + \cdots,\quad S(\varrho) = b_0 + b_1\varrho + \cdots b_n\varrho^n + \cdots;$$

Les inégalités (6) étant ainsi établies pour les fonctions harmoniques, appliquons à l'équation (5) la méthode des approximations successives. Nous sommes donc conduits à examiner l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(xy)$$

où l'on a:

$$|f(xy)|_\varrho < \frac{A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous allons montrer que la solution qui s'annulle sur la circonférence C de rayon R satisfait aux inégalités

$$(8) \qquad |z|_\varrho < \frac{\lambda R A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_\varrho < \frac{\lambda R A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_\varrho < \frac{\lambda R A}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

λ étant un nombre fixe.

En effet, reprenons les formules (2) où nous supposons

$$|A_n|_\varrho < \frac{a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

a_n étant un nombre positif tel que $\sum_0^\infty a_n = A$. Nous avons à examiner les deux intégrales:

$$I = \int_0^\varrho \frac{a_n \varrho^{n+1}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} d\varrho \quad \text{et} \quad I_1 = \int_\varrho^R \frac{a_n \varrho^{1-n}}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right) d\varrho.$$

La première donne immédiatement:

$$|I|_\varrho < \frac{a_n}{\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\varrho^{n+2}}{n+2}.$$

La seconde peut être transformée successivement de la façon suivante:

---

si $S(\varrho) > \lambda_n b_n \varrho^n$, on a: $\Sigma(\varrho) \cdot S(\varrho) > \lambda_0 a_0 b_0 + \lambda_1 a_1 b_1 \varrho^2 + \cdots + \lambda_n a_n b_n \varrho^{2n} + \cdots$. Dans le cas, où $S(\varrho) = \frac{1}{(1-\varrho)^m}$, on peut prendre $\lambda_n = n$, quel que soit m.

$$I_1 = \int_\varrho^R \frac{a_n\left(1+\frac{\varrho}{R}+\cdots+\frac{\varrho^{2n-1}}{R^{2n-1}}\right)d\varrho}{\varrho^{n-1}\left[1-\frac{\varrho}{R}\right]^{\frac{1}{2}}} = a_n\frac{2R}{\varrho^{n-1}}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\varrho}{R}+\cdots\right)$$

$$+\,2a_nR\int_\varrho^R\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho^{n-1}}+\frac{1}{\varrho^{n-2}R}+\cdots+\frac{\varrho^n}{R^{2n-1}}\right)d\varrho.$$

D'où:

$$|I_1|_\varrho < \frac{4a_nR}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2na_nR\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{R^{n-1}}.$$

Et par conséquent, on a:

$$|2nC_n|_\varrho < \frac{a_n\varrho^2}{n+2}\cdot\frac{\left(1-\frac{\varrho^{2n}}{R^{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4a_n\varrho R}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} + 2na_n\varrho R\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\varrho^{n-1}}{R^{n-1}}.$$

En remarquant enfin que:

$$n\frac{\varrho^n}{R^n} < \frac{1}{1-\frac{\varrho}{R}}$$

on a:

$$(9)\qquad |2nC_n|_\varrho < \frac{hR^2a_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où h est une constante. Et pareillement:

$$(9^{\text{bis}})\qquad \left|\frac{dC_n}{d\varrho}\right|_\varrho < \frac{2Ra_n}{(n+2)\left(1-\frac{\varrho}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6Ra_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} < \frac{hRa_n}{\left(1-\frac{\varrho}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des inégalités (9) et (9^{bis}) on déduit facilement les inégalités (8).

En reprenant maintenant le raisonnement connu de M. Picard on arrive immédiatement à vérifier le lemme annoncé dans toute sa généralité.

On vérifiera de même l'exactitude des inégalités (8) et (6), si à la place d'un cercle on prend un anneau limité par deux circonférences concentriques de rayons R et R_1 suffisamment rapprochés*). Je ne referai pas un calcul tout semblable à celui qu'on vient de parcourir; je me

*) L'épaisseur de l'anneau ne dépend que des coefficients a, b, c de l'équation (5).

bornerai à indiquer les formules (2^{bis}) qui doivent remplacer les formules (2) dans cette discussion:

$$(2^{\text{bis}}) \qquad 2n[R_1^{2n} - R^{2n}]\, C_n = \left[\varrho^{n+1} - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}}\right] \int_R^{\varrho} A_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^n} - \varrho^n\right] d\varrho$$

$$+ \left[\varrho^{n+1} - \frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}}\right] \int_{\varrho}^{R_1} A_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^n} - \varrho^n\right] d\varrho.$$

et une formule analogue pour D_n.

4. Cela étant, donnons à l'équation (5) un second membre

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = d \qquad (c \leqq 0)$$

et soit N le module trigonométrique de d à l'intérieur d'un cercle C de rayon R (sur la grandeur duquel nous ne faisons aucune hypothèse). Je dis que *la solution z qui s'annulle sur C vérifie les inégalités*

$$(10) \qquad |z|_R < \lambda N, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_R < \lambda N, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_R < \lambda N,$$

λ étant un nombre indépendant de N, fini, lorsque R est fini.

Ces inégalités (10) sont très importantes, puisque c'est sur elles uniquement que va reposer la démonstration du lemme fondamental de cette théorie. Le moyen le plus simple pour les établir est d'appliquer le procédé alterné de M. Picard*). En effet, nous pouvons décomposer le cercle donné en un nombre limité d'anneaux concentriques et un petit cercle auxquels seront applicables les inégalités (6). En introduisant une nouvelle circonférence dans chacun des anneaux on verra facilement que le procédé de M. Picard est applicable et que des inégalités (6) et (8) résultent les inégalités (10). Arrivons donc à la démonstration du lemme fondamental.

5. Lemme. *Soit z une solution de l'équation*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \geqq 0\right)$$

dont les dérivées premières admettent des modules trigonométriques finis à l'intérieur d'un cercle C. Soit d'autre part une fonction $\varphi(\theta)$ dont la dérivée première admet un développement trigonométrique absolument convergent. On peut dans ces conditions déterminer un nombre α tel que, pour $|\varepsilon| < \alpha$, l'équation (1) *admette une solution u dont les dérivées premières ont leurs modules trigonométriques finis et qui sur la circonférence C se réduit à $z + \varepsilon\varphi(\theta)$.*

---

*) É. Picard, „Sur la généralisation du problème de Dirichlet", Acta Mathematica, t. XXV.

Posons a priori

$$u = z(xy) + \varepsilon z_1(xy) + \frac{\varepsilon^2}{2} z_2(xy) + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} z_n(xy) + \cdots \tag{11}$$

et cherchons à déterminer successivement $z_i = \dfrac{\partial^i u}{\partial \varepsilon^i}$ de sorte que u satisfasse identiquement à l'équation (1) et que sur la circonférence C on ait $z_1 = \varphi(\theta)$, $z_2 = z_n = 0$. Pour déterminer z_1 on aura l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} z_1 = 0$$

et successivement:

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \dfrac{\partial z_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \dfrac{\partial z_2}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} z_2 = A_1 \\ & \dfrac{\partial^2 z_3}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_3}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \dfrac{\partial z_3}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \dfrac{\partial z_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} z_3 = A_2 \\ (12) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \dfrac{\partial z_n}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \dfrac{\partial z_n}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial z} z_n = A_{n-1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où A_i ne dépend que des z_k, $\dfrac{\partial z_k}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z_k}{\partial y}$ avec $k \leqq i$.

En appliquant les inégalités (10) on obtient:

$$|z_1|_R < \mu M, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_R < \mu M, \quad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_R < \mu M,$$

où μ est un nombre fixe indépendant de $\varphi(\theta)$ et M la somme de la série des modules des coefficients du développement trigonométrique de $\varphi'(\theta)$. Les A_i ont donc leurs modules trigonométriques finis et on a d'une façon générale:

$$|z_n|_R < \lambda\,|A_{n-1}|_R, \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right|_R < \lambda\,|A_{n-1}|_R, \quad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right|_R < \lambda\,|A_{n-1}|_R. \tag{13}$$

Or l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \frac{\partial z_n}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_n + A_{n-1}$$

est la dérivée n^e totale de $f\left(xyu \dfrac{\partial u}{\partial x} \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ par rapport à ε, lorsque $\varepsilon = 0$.

Nous pouvons par conséquent appliquer le calcul des limites de Cauchy de la façon suivante. Considérons l'équation auxiliaire*)

$$v = \mu M \varepsilon + \lambda F(v) \tag{14}$$

où $F(v)$ est une fonction analytique de v telle que

$$F(0) = F'(0) = 0,\ F^{(n)}(0) > \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^i \partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^k \partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^l} \right|_R \qquad (i + k + l = n \geqq 2).$$

L'équation (14) nous donne manifestement v en fonction de ε

$$v = \mu M \varepsilon + \frac{1}{2} a_2 \varepsilon^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} \varepsilon^n + \cdots$$

où

$$a_n > |z_n(xy)|_R, \quad a_n > \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right|_R, \quad a_n > \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right|_R.$$

La série (11) converge, par conséquent, pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Or du moment qu'il en est ainsi il est évident que u satisfait à l'équation (1) avec les conditions aux limites voulues. La proposition est donc établie.

Remarque. Il est clair que si f ne contenait pas les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, il suffirait pour que le lemme soit exact de supposer le module trigonométrique de z fini et la série $\varphi(\theta)$ absolument convergente.

II.

Cas où le problème de Dirichlet est possible.

6. Nous pouvons aborder maintenant le problème de Dirichlet.

Problème de Dirichlet. *Déterminer une fonction z analytique satisfaisant à l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \geqq 0\right) \tag{1}$$

et se réduisant sur une circonférence C de rayon R à une fonction de l'angle θ, $F(\theta)$, telle que le développement trigonométrique de $F'(\theta)$ soit absolument convergent.

Nous admettrons les deux points suivants faciles à vérifier: 1° La solution z (si elle existe) est entièrement déterminée par les conditions du

---

*) La fonction $F(v) = F\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ qui ressemble à une fonction majorante en diffère essentiellement, puisque nous ne supposons aucunement qu'un même développement de Taylor soit valable pour f lorsque z et ses dérivées prennent des valeurs finies quelconques. Nous supposons, en effet, seulement que f n'a pas de singularités réelles finies.

problème; 2° une solution z (sur la nature de laquelle on ne sait rien) dont les dérivées premières admettent des modules trigonométriques finis est analytique.

Supposons que pour une raison ou une autre on sache que l'équation (1) admette une solution qui sur le contour se reduit à une fonction $\Phi(\theta)$ jouissant des propriétés exigées par le lemme fondamental. La marche que nous devons suivre est toute indiquée. Nous savons que le problème est possible si au lieu de $\Phi(\theta)$ nous prenons la fonction

$$F(\theta, \alpha) = \Phi(\theta) + \alpha[F(\theta) - \Phi(\theta)]$$

pourvu que le module de α soit suffisamment petit. La solution $u(xy\alpha)$ se trouve être une fonction analytique de α et en remarquant que

$$F(\theta, 1) = F(\theta)$$

on voit que la question de la possibilité du problème de Dirichlet se trouve ramenée à celle de la possibilité du prolongement analytique de $u(xy\alpha)$ le long du segment 01. C'est de cette dernière question que nous allons nous occuper. Supposons que la solution existe tant que $\alpha < \alpha_0$. Que pouvons-nous en conclure pour $\alpha = \alpha_0$? Soit $\alpha_1 < \alpha_0$ et $\alpha_2 < \alpha_0$ deux nombres très voisins, de sorte que $|\alpha_2 - \alpha_1| < \beta$. Soient u_1 et u_2 les deux solutions correspondantes. La différence $u_2 - u_1 = \delta$ vérifiera manifestement une équation linéaire de la forme:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + a\frac{\partial \delta}{\partial x} + b\frac{\partial \delta}{\partial y} + c\delta = 0 \tag{15}$$

avec $c \leqq 0$. Par conséquent, $\delta = u_2 - u_1$ ne peut avoir ni maxima ni minima; de sorte que si M est le module maximum de $F(\theta) - \Phi(\theta)$, on aura, pour toute valeur de x et y, $|u_2 - u_1| < \beta M$. Donc, si α tend vers α_0, u tend uniformément vers une limite u_0. Mais, c'est tout ce que nous pouvons dire dans le cas général: les dérivées premières pourront croître indéfiniment et au point $\alpha = \alpha_0$ nous ne serons plus dans les conditions exigées par le lemme fondamental. Pour qu'il en soit ainsi, pour que nous puissions affirmer que le point α_0 n'est pas un point singulier, il suffira d'indiquer une limite supérieure pour les modules trigonométriques de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ quel que soit $\alpha < \alpha_0$. Dans ces conditions, en effet, en prenant α' suffisamment voisin de α_0, nous serons assurés que le cercle de convergence du développement de u suivant les puissances de $(\alpha - \alpha')$ comprendra à son intérieur le point α_0 qui dès lors ne saurait être singulier.

7. Examinons d'abord le cas simple, où f ne contient pas les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ce cas a été étudié d'une façon plus ou moins complète

par d'autres méthodes, mais je crois que la méthode paramétrique conduit au résultat le plus facilement.

En effet, d'après la remarque faite à la fin du premier chapitre nous n'avons pas à nous préoccuper dans ce cas des modules trigonométriques de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$; il suffit d'avoir une limite supérieure du module trigonométrique de u. Or cela est facile. D'après le raisonnement général du paragraphe précédent, on a

$$|u| < N + M\alpha_0$$

où $|u|$ désigne la valeur absolue de u et N la valeur absolue maxima de $\Phi(\theta)$. Soit alors A le maximum de la valeur absolue de $f(xyu)$. En appliquant la formule de Green on a

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\int Gf(xyu)\,dx\,dy + H(xy)$$

de laquelle on déduit:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < kA + B, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < kA + B,$$

G étant la fonction ordinaire de Green, H la fonction harmonique qui prend les mêmes valeurs que u sur la circonférence C, k un nombre fixe et B le maximum de la série des modules des coefficients du développement trigonométrique de $F_\theta'(\theta, \alpha)$. Du moment qu'on connaît les limites supérieures de $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ on a sans difficulté une limite supérieure du module trigonométrique de u. La possibilité du problème de Dirichlet sous la restriction indiquée au commencement de ce chapitre est donc démontrée. Or nous verrons plus loin et très simplement que grâce au théorème établi au début, on peut affirmer l'existence d'une solution au moins régulière dans tout le plan; par conséquent le problème de Dirichlet dans ce cas particulier est résolu sans restriction.

Passons maintenant au cas plus général.

8. Théorème. *Si dans l'équation* (1) *la fonction analytique*

$$f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ne croît pas plus rapidement que les deuxièmes puissances de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, *lorsque celles-ci croissent indéfiniment, le problème de Dirichlet admet toujours une solution.*

Pour fixer les idées nous supposerons que f est un polynome du second degré en $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Nous adopterons les notations:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Commençons par limiter supérieurement l'inclinaison du plan tangent à la surface S_α sur le bord B. Nous verrons que ce n'est qu'en ce point de la démonstration que la condition que f soit du second degré en p et en q joue un rôle vraiment essentiel. Il suffira, en effet, de limiter supérieurement p au point P du bord B dont les coordonnées sont $x = -R$, $y = 0$, $z = z_0$, q ayant une valeur donnée q_0. Soit, pour fixer les idées, $p > 0$. Donnons-nous un contour fermé B' tangent en P au contour B et *situé entièrement au-dessus de la surface* S_α. Il est clair que la surface S' satisfaisant à l'équation (1) qui passera par B' aura $p' > p$ au point P. Or faisons le changement de fonction et de variables de façon à considérer x comme fonction de y et z. Un calcul élémentaire montre que l'équation (1) prend la forme:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - 2\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\partial x}{\partial z}F\left(xyz\,\frac{\partial x}{\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial z}\right) \tag{16}$$

où F est un polynome du second degré en $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}$.

On voit immédiatement que l'équation (16) admet la solution $x = \varphi(y)$ quelle que soit φ. En d'autres termes, l'équation (16) ou *l'équation* (1) *admet comme solutions tous les cylindres à génératrice verticale.* Cette remarque d'ailleurs ne suppose pas f analytique. Mais pour en tirer des conséquences rigoureuses nous sommes obligés d'introduire cette hypothèse.*) L'équation (16) admettra alors une solution analytique passant par la droite $x + R = z - z_0 - q_0 y = 0$, avec $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{p'}$ le long de cette droite. De plus, si $A > q_0 > B$ et $p' > c > 0$, on pourra fixer un nombre positif suffisamment petit b tel que si

$$|z - z_0| < (A + 1)b, \quad |y| < b \tag{17}$$

on a:

$$|x| < M, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial z}\right| < M, \quad \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| < M; \quad \left|\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right| < M; \quad \left|\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z}\right| < M.$$

De sorte que, d'après l'équation (16), on peut fixer un nombre k, tel que les inégalités (17) entraînent

$$-k\frac{\partial x}{\partial z} < \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} < k\frac{\partial x}{\partial z}. \tag{18}$$

D'où

$$\frac{1}{p'}e^{-ku} < \frac{\partial x}{\partial z} < \frac{1}{p'}e^{ku} \tag{19}$$

en désignant par u l'accroissement de z pour y fixe.

---

*) Cette hypothèse a d'ailleurs déjà joué un rôle important puisqu'elle est à la base de notre démonstration du lemme fondamental.

D'où encore, en posant $x + R = x_1$:

$$1 - e^{-ku} < kp'x_1 < e^{ku} - 1.$$

Et enfin

$$\frac{1}{k}\log(1 + kp'x_1) < u < -\frac{1}{k}\log(1 - kp'x_1). \tag{20}$$

Prenons maintenant comme *bord B' de cette surface S' le contour qui a comme projection sur le plan des xy l'arc de la circonférence C situé à gauche d'une corde $x_1 = c^{te}$ et cette corde elle-même.* Nous choisissons en outre cette corde de façon qu'on ait:

$$\frac{1}{k}\log(1 - kp'x_1) = -b. \tag{21}$$

On sera alors assuré que sur le bord B'

$$\frac{1}{k}\log(1 + kp'x_1) < u. \tag{20^{bis}}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer p' par la condition que le bord B' soit au-dessus de la surface S_α. Pour ce qui concerne la partie du bord qui se projette sur la circonférence C, ça ne présente pas de difficulté; mais pour celle qui se projette suivant la corde une explication supplémentaire et nécessaire. Nous nous bornerons à considérer le point où $y = 0$, le raisonnement étant identique dans tous les cas. Considérons une surface S_{α_1} de la même famille voisine de S_α de sorte que

$$|F(\theta, \alpha_1) - F(\theta, \alpha)| < \varepsilon.$$

Si p_1 est la limite supérieure de la dérivée première sur S_{α_1}, l'accroissement de z_1, lorsque x_1 varie de 0 à x_1, sera inférieur à $p_1 x_1$. Par conséquent, l'accroissement de z sur la surface S_α sera au plus égal à $p_1 x_1 + 2\varepsilon$. En vertu de l'inégalité (20^{bis}), il suffira donc qu'on ait:

$$p_1 x_1 + 2\varepsilon < \frac{1}{k}\log(1 + kp'x_1).$$

En tenant compte de (21) cette condition se transforme en:

$$kp_1 x_1 + 2k\varepsilon < \log(2 - e^{-kb}).$$

Or, posons par exemple:

$$\varepsilon = \frac{\log(2 - e^{-kb})}{4k}. \tag{22}$$

Il en résultera:

$$p' > 2p_1 \frac{1 - e^{-kb}}{\log(2 - e^{-kb})}. \tag{23}$$

On a ainsi la certitude *qu'il suffit que p' satisfasse à l'inégalité* (23) *pour que le point en question de la surface S' soit au-dessus du point correspondant de la surface S_α*. D'une façon générale on arrivera par le même procédé à fixer une limite supérieure pour p:

$$p < p' = Lp_1.$$

9. ε étant d'après (22) un nombre déterminé, on voit qu'en effectuant un nombre *fini* de fois la même opération on obtiendra une limite supérieure des dérivées premières; pourvu toutefois que de la connaissance des dérivées p et q sur les bords on puisse tirer une limite supérieure des dérivées premières à l'intérieur. Il nous faut donc éclaircir ce point.

Considérons l'expression

$$v = p \cos\lambda + q \sin\lambda,$$

λ étant un paramètre variant de 0 à π. Il est évident que la connaissance de v pour deux valeurs différentes de λ nous détermine p et q. Cela étant, proposons-nous de déterminer une limite supérieure du maximum du module de v. On aura manifestement:

$$r \cos\lambda + s \sin\lambda = s \cos\lambda + t \sin\lambda = 0.$$

D'autre part en différentiant l'équation (1), il vient:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s$$
$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t.$$

D'où pour v maximum ou minimum:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v \frac{\partial f}{\partial z} + \cos\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\lambda \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{24}$$

$\frac{\partial f}{\partial z}$ étant positif on voit qu'*en général* pour v très grand le second membre aura le signe de v et par conséquent v ne pourra avoir ni un maximum positif très grand, ni un minimum négatif considérable. Pourtant, si on ne veut pas laisser de côté des cas particuliers importants, une étude plus détaillée s'impose. Écrivons f sous sa forme explicite:

$$f = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F,$$

où A, B, C, D, E, F sont des fonctions analytiques de x, y, z. La condition $\frac{\partial f}{\partial z} \geqq 0$ entraîne manifestement

$$\delta = A_z' C_z' - (B_z')^2 \geqq 0.$$

Le cas qui exige une discussion est celui, où

$$\delta = 0.$$

Alors on aura évidemment aussi $D_z' = E_z' = 0$ Et de plus, si on ne peut rien tirer de l'équation (24) pour une succession continue de valeurs de λ, c'est qu'on a aussi

$$A_z' = B_z' = C_z' = 0.$$

On pourrait même montrer que le seul cas où on ne peut rien dire de v quel que soit λ est celui, où toutes ces égalités sont remplies identiquement. Mais nous allons indiquer un artifice qui est applicable dans tous les cas.

Soit M le module maximum de A, B, C. Il est clair que si nous prenons comme fonction inconnue la fonction $z = \alpha z_1$, dans l'équation en z_1 le module maximum des coefficients correspondants A_1, B_1, C_1 sera αM. En choisissant α suffisamment petit, nous pouvons donc réduire ce maximum autant qu'il nous plaira. Posons pour fixer les idées

$$\alpha M < \frac{1}{8} \tag{25}$$

et opérons sur la nouvelle fonction z_1 que nous désignerons par z. Soit $a - 1$ son module maximum. Si nous posons

$$z + a = e^u,$$

la fonction u sera toujours positive. Cela étant, formons l'équation à laquelle satisfait u.

On aura:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-u} f - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

Un calcul semblable à celui que nous avons fait tout à l'heure montre que si en un certain point $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ est maximum, l'inégalité suivante doit être vérifiée:

$$\left\{e^{-u} f - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left[f_z' + \frac{\partial u}{\partial x} f_p' + \frac{\partial u}{\partial y} f_q' - e^{-u} f\right] \tag{26}$$
$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial x} f_x' + \frac{\partial u}{\partial y} f_y'\right] \leqq 0.$$

Or, lorsque $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ devient très grand, le premier membre de l'inégalité (26) aura le signe de la somme des termes du quatrième degré en $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, si cette somme ne s'annulle que pour $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Écrivons donc cette somme

$$S = w^2 + (2 - 3e^{-u})\overset{2}{f}w + e^{-2u}\overset{2}{f}{}^2 + w\overset{2}{f}{}'_z$$

où $\overset{2}{f}$ est la somme des termes du second degré en $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ de f.

Or en remarquant que $w\overset{2}{f}{}'_z$ ne peut être que positif ou nul et en tenant compte de l'inégalité (25), on a

$$S > \frac{1}{2} w^2.$$

w peut donc être limité supérieurement. On en déduit de même facilement une limite supérieure pour p et q à l'intérieur d'un contour, lorsqu'on en a une sur le bord. Il résulte donc de la discussion faite dans ces deux paragraphes *qu'on peut limiter a priori p et q sur une surface analytique S_{α_0} de la famille pourvu que l'équation* (1) *admette une solution quel que soit* $0 < \alpha \leqq \alpha_0$.

10. Nous nous proposons d'en déduire une limite supérieure des modules trigonométriques de p et q. Cette fois notre raisonnement sera indépendent du dégre de f. Posons

$$z = z_1 + H,$$

H étant la fonction harmonique qui sur C prend les mêmes valeurs que z. On aura

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

et, d'après ce qui précède, on peut assigner une limite supérieure au second membre. On a souvent attiré l'attention sur ce fait que tandis qu'on peut en tirer (par la formule de Green) une limite supérieure de la fonction et de ses dérivées premières, on ne peut certainement pas en déduire une limite supérieure pour les dérivées secondes. Nous serions donc privés du moyen ordinaire (mais grossier) pour trouver les modules trigonométriques des dérivées premières. Nous allons montrer que néanmoins *ces modules trigonométriques peuvent être limités supérieurement pourvu qu'on suppose (ce qui a bien lieu actuellement) que le second membre est fini et intégrable.*

En effet, considérons la solution z_1 qui s'annulle sur C de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 z_1}{\partial \theta^2} = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

Le second membre étant borné et intégrable, intégrons les deux membres par rapport à θ; en posant $u_1 = \int_0^\theta z_1\, d\theta$ on a:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial u_1}{\partial \theta^2} = a + A_0\theta + \sum_1^\infty \frac{A_n}{n}\sin n\theta - \frac{B_n}{n}\cos n\theta$$

$$= a + a_0\theta + \sum_1^\infty a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

où a est une fonction de ϱ facile à déterminer qui d'ailleurs disparaîtra dans la suite des calculs. En effet, la fonction u_1 qui s'annulle sur C se présente aussi sous la forme

$$u_1 = c + c_0\theta + \sum_1^\infty c_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

les formules (2) subsistant entièrement. Après différentiation par rapport à θ, c (qui seul dépend de a) disparaît ainsi que le terme linéaire qui se réduit à une constante par rapport à θ. Par contre

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta\, \partial \varrho} = \frac{\partial z_1}{\partial \varrho}$$

ont en vertu des formules (2) leurs modules trigonométriques finis, puisque $\sum_0^\infty |a_n| + |b_n|$ est finie.

Donc $p = \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}$ *et* $q = \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y}$ *ont leurs modules trigonométriques finis. Par conséquent, quel que soit* α *nous sommes dans des conditions où le lemme fundamental est applicable. Le problème de Dirichlet est donc possible pour une fonction quelconque* $F(\theta)$ *sur la circonférence* C*, s'il est possible pour une fonction déterminée* $\Phi(\theta)$ *sur cette même circonférence.*

Or il est aisé de montrer, en vertu du théorème 2 qu'il est *toujours possible.* En effet, soit C une circonférence pour laquelle le problème de Dirichlet est possible. En prenant pour $F(\theta)$ une fonction analytique, on sera certain que la solution correspondante peut être prolongée et par conséquent il existe un cercle C_1 de rayon plus grand pour lequel le problème de Dirichlet sera possible $F_1(\theta)$ étant une fonction déterminée; il le sera donc aussi pour une fonction quelconque et, en répétant ce raisonnement autant de fois qu'on le veut, on voit que *le problème de Dirichlet est toujours possible sous les conditions énoncées au* § 8.

11. Il sera peut-être utile que nous indiquions un sujet de recherches important. Il se rattache au théorème 2 que nous venons d'utiliser. Ainsi, si les données sur le contour sont analytiques on peut affirmer que la surface S qui satisfait au problème peut être prolongée à l'extérieur. La question qui se pose est de savoir dans quels cas ce prolongement peut se faire indéfiniment sans singularités, dans quels cas la surface n'aura

comme singularités réelles que des points isolés. Dans le cas des fonctions harmoniques la réponse est aisée: on sait que si la fonction se réduit à une fonction entière de l'arc θ sur un cercle, elle n'a pas de singularités à distance finie; on a le même critère évident pour décider de l'existence de lignes singulières réelles. Dans le cas général, on n'a plus la ressource de ramener l'étude d'une fonction de deux variables à celle d'une fonction d'une seule variable complexe. Pourtant les critères sont probablement souvent analogues; pour la démonstration rigoureuse on devra approfondir la question de la propagation des singularités le long des caractéristiques.

Dans la deuxième partie de ce travail nous nous occuperons des équations de la forme $Ar + 2Bs + Ct = 0$ et en particulier de celle des surfaces minima.*)

---

*) Comptes Rendus, 2 octobre 1905.

Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Erster Teil.

Es sei

$$f(x) = a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \cdots + a_{2k}$$

eine ganze rationale Funktion $2k^{\text{ten}}$ Grades von x mit rationalen Zahlenkoeffizienten. Diese Funktion sei definit, d. h. es sei für alle reellen x

$$f(x) \geqq 0;$$

anders ausgedrückt, es sei

$$a_0 > 0$$

und $f(x)$ habe entweder keine reelle Wurzel oder jede reelle Wurzel in gerader Vielfachheit. Dann folgt aus der Zerlegung von $f(x)$ in Linearfaktoren ohne weiteres eine Darstellung von $f(x)$ als Summe von zwei Quadraten ganzer rationaler Funktionen von x mit reellen Koeffizienten. Denn wenn $f(x)$ r Paare reeller gleicher Wurzeln*) und s Paare konjugiert-komplexer Wurzeln**) besitzt, so erhält man durch Zusammenfassung aller Linearfaktoren in drei Klassen***) eine Zerlegung

$$f(x) = f_1^2(x)\,(f_2(x) + f_3(x)i)\,(f_2(x) - f_3(x)i),$$

wo $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ reelle Koeffizienten haben und $f_1(x)$ den Grad r, $f_2(x) + f_3(x)i$ den Grad s besitzt, und hieraus folgt weiter

$$f(x) = f_1^2(x)\,(f_2^2(x) + f_3^2(x)) = (f_1(x) f_2(x))^2 + (f_1(x) f_3(x))^2 = g_1^2(x) + g_2^2(x).$$

Die Zahlenkoeffizienten in $g_1(x)$ und $g_2(x)$ sind reell, brauchen aber nicht rational zu sein.

Eine Darstellung von $f(x)$ durch Quadrate rationalzahliger Funktionen

---

*) Eine 2α-fache reelle Wurzel wird dabei als α Paare gleicher Wurzeln aufgefaßt. Es kann auch $r = 0$ sein.

**) Ein Paar α-facher konjugiert-komplexer Wurzeln wird dabei als α einfache Paare angesehen. s kann auch $= 0$ sein.

***) Hierbei kommt jeder reelle Linearfaktor in die erste Klasse, und jedes Paar konjugiert-komplexer Linearfaktoren wird auf die beiden anderen Klassen verteilt.

hat zuerst Herr Hilbert*) angegeben. Er hat nämlich bewiesen, daß $f(x)$ stets als Quotient zweier Summen von Quadraten der verlangten Art darstellbar ist.

Darauf habe ich**) den weitergehenden Satz bewiesen: „Jede definite ganze rationale Funktion von x mit rationalen Zahlenkoeffizienten läßt sich als Summe von Quadraten darstellen, so daß die sämtlichen Basen dieser Quadrate ganze rationale Funktionen von x mit rationalen Koeffizienten sind."

In einer späteren Arbeit***) habe ich die Frage aufgeworfen und für die kleinsten Werte von $n = 2k$ in Angriff genommen: Für jeden Grad n diejenige Zahl $N = N(n)$ zu bestimmen, welche durch folgende beiden Eigenschaften charakterisiert ist:

1) Jede definite Funktion†) n^{ten} Grades läßt sich in N Quadrate zerlegen.

2) Nicht jede definite Funktion n^{ten} Grades läßt sich in $N-1$ Quadrate zerlegen.

Ich bewies a. a. O., daß

$$N(0) = 4,$$
$$N(2) = 5,$$
$$N(4) \leqq 6$$

ist.

Alsdann zeigte Herr Fleck††), an meine Methode zur Diskussion der biquadratischen Funktion anknüpfend, daß

$$N(4) = 5$$

ist.

Trotzdem nun $N(4)$ nicht größer ist als $N(2)$, würde man wohl erwarten, daß $N(n)$ mit n über alle Grenzen wächst. Merkwürdigerweise gilt†††) jedoch der allgemeine Satz, dessen Herleitung den Gegenstand des ersten Teiles der vorliegenden Arbeit bildet:

„Jede definite ganze Funktion n^{ten} Grades von x mit rationalen Zahlenkoeffizienten läßt sich als Summe von acht Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen von x darstellen."

---

*) „Grundlagen der Geometrie", Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig, 1899, S. 82—85.

**) „Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate", Mathematische Annalen, Bd. 57, 1903, S. 53–64.

***) „Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate", Archiv der Mathematik und Physik, 3te Reihe, Bd. 7, 1904, S. 271—277.

†) Im ersten Teile dieser Arbeit ist durchweg nur von ganzen rationalzahligen Funktionen die Rede, ohne daß dies immer besonders bemerkt wird.

††) „Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen", Archiv der Mathematik und Physik, 3te Reihe, Bd. 10, 1906, S. 23—38.

†††) Es sei gleich hier der Leser auf S. 278, Z. 17—25 aufmerksam gemacht.

Mit anderen Worten, es ist stets

$$N(n) \leqq 8,$$

also

$$\limsup_{n=\infty} N(n) \leqq 8,$$

und, da offenbar*)

$$N(n) \leqq N(n+2)$$

ist, so existiert

$$\lim_{n=\infty} N(n)$$

und ist $\leqq 8$**). Welche der vier Zahlen $N = 5, 6, 7, 8$ die Eigenschaft hat, daß jedes $f(x)$ in N Quadrate, aber nicht jedes in $N-1$ Quadrate zerlegbar ist, muß vorläufig dahingestellt bleiben.

Um nun den oben ausgesprochenen Satz über die Zerlegbarkeit von $f(x)$ in acht Quadrate zu beweisen, nehme ich zunächst $f(x)$ irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen an. Darauf wird dann der allgemeine Fall leicht zurückführbar sein. Wenn die definite Funktion $f(x)$ irreduzibel ist, so hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

keine mehrfachen Wurzeln, also keine reelle Wurzel, und bestimmt daher einen algebraischen Zahlkörper n^{ten} Grades, der mit sämtlichen konjugierten Körpern imaginär ausfällt. Daraus folgt, wie Herr Hilbert***) gezeigt hat, daß $f(x)$ in der Form darstellbar ist

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1 + \{\varphi(x)\}^2 + \{\psi(x)\}^2 + \{\chi(x)\}^2 + \{\varrho(x)\}^2}{f_1(x)},$$

wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $\varrho(x)$ ganze rationalzahlige Funktionen höchstens $n-1^{\text{ten}}$ Grades sind, also $f_1(x)$ eine definite Funktion höchstens $n-2^{\text{ten}}$ Grades.

Es sei zunächst angegeben, wie Herr Hilbert zur Gleichung (1) gelangt. Er benutzt folgenden Satz ohne genauere Ausführung seines Beweises, der erhebliche Schwierigkeiten bietet und wesentlich auf Herrn Hilberts Theorie der relativquadratischen Zahlkörper†) beruht:

---

*) Denn wenn die definite Funktion n^{ten} Grades $f(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$ $(a_0 > 0)$ nicht in $N(n) - 1$ Quadrate zerlegbar ist, so ist offenbar die definite Funktion $n+2^{\text{ten}}$ Grades $x^2 f(x) = a_0 x^{n+2} + \cdots + a_n x^2$ gleichfalls nicht in $N(n) - 1$ Quadrate zerlegbar.

**) Mit anderen Worten, für alle hinreichend großen n hat $N(n)$ einen und denselben Wert, der $\leqq 8$ ist.

***) l. c., S. 84—85.

†) „Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 6, 1899, S. 88—94; „Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers", Mathematische Annalen, Bd. 51, 1899, S. 1—127; „Über die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper", Nachrichten der Königlichen

„Jede total positive Zahl eines algebraischen Zahlkörpers, d. h. jede Zahl des Körpers, deren konjugierte Werte in den reellen konjugierten Körpern positiv sind, *läßt sich als Summe von vier Quadraten gewisser Zahlen des Körpers darstellen*".*)

Im vorliegenden Falle sind alle durch die Gleichung

$$f(x)=0 \tag{2}$$

bestimmten Körper imaginär; jede Zahl des Körpers $k(\vartheta)$, wo ϑ eine Wurzel von (2) ist, ist also total positiv; daher gibt es insbesondere für -1 eine Zerlegung

$$-1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze oder gebrochene Zahlen in $k(\vartheta)$ sind. Diese sind als ganze rationalzahlige Funktionen $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$, $\chi(\vartheta)$, $\varrho(\vartheta)$ von ϑ darstellbar, deren Grad $\leqq n-1$ ist. Aus

$$1+\{\varphi(\vartheta)\}^2+\{\psi(\vartheta)\}^2+\{\chi(\vartheta)\}^2+\{\varrho(\vartheta)\}^2=0$$

folgt, da $f(x)$ irreduzibel ist, daß die ganze rationalzahlige Funktion

$$F(x)=1+\{\varphi(x)\}^2+\{\psi(x)\}^2+\{\chi(x)\}^2+\{\varrho(x)\}^2$$

durch $f(x)$ teilbar ist:

$$F(x)=f(x)f_1(x),$$

und dies liefert die Gleichung (1).

Nachdem nun Herr Hilbert auf diesem Wege die Gleichung (1) erhalten hat, zieht er daraus durch vollständige Induktion die Folgerung: Es sei schon bewiesen, daß jede definite Funktion $n-2^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Grades als Quotient zweier Quadratsummen darstellbar ist. Dann gilt dies nach (1) für jede irreduzibele definite Funktion n^{ten} Grades, also für jede definite Funktion n^{ten} Grades (da, wie leicht gezeigt wird, jede reduzibele definite Funktion, abgesehen von einem konstanten Faktor, ein Quadrat ist oder als Produkt eines Quadrates**) und einer oder mehrerer irreduzibler definiter Funktionen niedrigeren Grades darstellbar ist).

Ich lege den folgenden Schlüssen auch die Gleichung (1) zugrunde, schließe jedoch folgendermaßen weiter: Es ist, wenn

$$\alpha_1(x)=1,\quad \alpha_2(x)=\varphi(x),\quad \alpha_3(x)=\psi(x),\quad \alpha_4(x)=\chi(x),\quad \alpha_5(x)=\varrho(x),$$
$$\alpha_6(x)=0,\quad \alpha_7(x)=0,\quad \alpha_8(x)=0$$

gesetzt wird,

Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1898, S. 370—399 und Acta mathematica, Bd. 26, 1902, S. 99—131.

*) Diesen Satz erwähnt Herr Hilbert auch in seinem Artikel „Theorie der algebraischen Zahlkörper" in der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", Bd. 1, S. 696.

**) welches eventuell $=1$ ist.

(3) $$f(x)=\frac{\alpha_1^2(x)+\alpha_2^2(x)+\alpha_3^2(x)+\alpha_4^2(x)+\alpha_5^2(x)+\alpha_6^2(x)+\alpha_7^2(x)+\alpha_8^2(x)}{f_1(x)},$$

(4) $$\alpha_1^2(x)+\cdots+\alpha_8^2(x)=f(x)f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ kleineren Grad hat als $f(x)$*).

Nun dividiere ich, wenn $f_1(x)$ nicht konstant ist, jede der acht Basen im Zähler von (3) durch $f_1(x)$; dies ergibt ein Gleichungssystem

(5) $$\begin{cases}\alpha_1(x)=q_1(x)f_1(x)+\beta_1(x),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \alpha_8(x)=q_8(x)f_1(x)+\beta_8(x),\end{cases}$$

wo $\beta_1(x),\cdots,\beta_8(x)$ geringeren Grad haben als $f_1(x)$. $\beta_1(x),\cdots,\beta_8(x)$ sind nicht sämtlich $=0$, da sonst

$$f(x)=f_1(x)\,(q_1^2(x)+\cdots+q_8^2(x)),$$

also $f(x)$ reduzibel wäre.**)

Aus (4) und (5) folgt modulo f_1

$$\beta_1^2+\cdots+\beta_8^2\equiv\alpha_1^2+\cdots+\alpha_8^2=ff_1\equiv 0,$$

also

(6) $$\beta_1^2+\cdots+\beta_8^2=f_1f_2,$$

wo f_2 eine ganze rationalzahlige definite Funktion ist, die geringeren Grad hat als f_1 und nicht identisch verschwindet.

Nun besteht die bekannte Identität

(7) $$\begin{aligned}&(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2+\alpha_6^2+\alpha_7^2+\alpha_8^2)\,(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2+\beta_5^2+\beta_6^2\\&\qquad\qquad+\beta_7^2+\beta_8^2)\\
&=(\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4+\alpha_5\beta_5+\alpha_6\beta_6+\alpha_7\beta_7+\alpha_8\beta_8)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3+\alpha_5\beta_6-\alpha_6\beta_5+\alpha_7\beta_8-\alpha_8\beta_7)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2+\alpha_5\beta_7-\alpha_6\beta_8-\alpha_7\beta_5+\alpha_8\beta_6)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1-\alpha_5\beta_8-\alpha_6\beta_7+\alpha_7\beta_6+\alpha_8\beta_5)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_5-\alpha_2\beta_6-\alpha_3\beta_7+\alpha_4\beta_8+\alpha_5\beta_1+\alpha_6\beta_2+\alpha_7\beta_3-\alpha_8\beta_4)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_6+\alpha_2\beta_5+\alpha_3\beta_8+\alpha_4\beta_7-\alpha_5\beta_2+\alpha_6\beta_1-\alpha_7\beta_4-\alpha_8\beta_3)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_7-\alpha_2\beta_8+\alpha_3\beta_5-\alpha_4\beta_6-\alpha_5\beta_3+\alpha_6\beta_4+\alpha_7\beta_1+\alpha_8\beta_2)^2\\
&+(-\alpha_1\beta_8+\alpha_2\beta_7-\alpha_3\beta_6-\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4+\alpha_6\beta_3-\alpha_7\beta_2+\alpha_8\beta_1)^2.\end{aligned}$$

Diese Identität wende ich auf die vorliegende Bedeutung der Zeichen

*) Mit anderen Worten, ich benutze gar nicht den Hilbertschen Satz

$$-1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

in vollem Umfange, sondern nur die eventuell leichter zu beweisende Tatsache, daß sich -1 im Körper $k(\vartheta)$ als Summe von *sieben* Quadratzahlen darstellen läßt.

**) Übrigens ist hier $\beta_1(x)=1$; doch habe ich für die in der Folge notwendige Wiederholung des Schlußverfahrens die Begründung des Textes angegeben.

$\alpha_1, \cdots, \beta_8$ an, d. h. ich multipliziere die Gleichungen (4) und (6) und stelle das Produkt nach (7) als Summe von acht Quadraten dar. Die Betrachtung der Basen dieser acht Quadrate zeigt, daß jede derselben durch f_1 teilbar ist; z. B. ist modulo f_1

$$\begin{aligned}&\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4+\alpha_5\beta_5+\alpha_6\beta_6+\alpha_7\beta_7+\alpha_8\beta_8\\ &\equiv \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\alpha_5^2+\alpha_6^2+\alpha_7^2+\alpha_8^2=ff_1\equiv 0,\\ &-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3+\alpha_5\beta_6-\alpha_6\beta_5+\alpha_7\beta_8-\alpha_8\beta_7\\ &\equiv -\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1+\alpha_3\alpha_4-\alpha_4\alpha_3+\alpha_5\alpha_6-\alpha_6\alpha_5+\alpha_7\alpha_8-\alpha_8\alpha_7=0.\end{aligned}$$

Wenn daher die Basen mit $\gamma_1 f_1, \cdots, \gamma_8 f_1$ bezeichnet werden, so sind $\gamma_1, \cdots, \gamma_8$ ganze rationalzahlige Funktionen, und man erhält

$$\begin{aligned}(\gamma_1 f_1)^2+\cdots+(\gamma_8 f_1)^2&=ff_1^2f_2,\\ \gamma_1^2+\cdots+\gamma_8^2&=ff_2,\\ f&=\frac{\gamma_1^2+\cdots+\gamma_8^2}{f_2},\end{aligned}$$

wo f_2 kleineren Grad hat als f_1.

Ist dieser Grad noch nicht 0, so wiederhole man dasselbe Verfahren. Man gelangt alsdann schließlich zu einer Gleichung

$$f=\frac{\delta_1^2+\cdots+\delta_8^2}{c},$$

wo c eine positive Konstante ist, $\delta_1(x), \cdots, \delta_8(x)$ ganze rationale Funktionen vom Grade $\leqq \frac{n}{2}$.*) Daraus folgt, wenn die ganzen rationalzahligen Funktionen $\frac{\delta_1}{c}, \cdots, \frac{\delta_8}{c}$ mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_8$ bezeichnet werden,

$$f=c\left(\left(\frac{\delta_1}{c}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\delta_8}{c}\right)^2\right)=c(\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_8^2).$$

Da nun die Zahl c in vier Quadrate zerlegbar ist**), so ergibt sich

$$f(x)=(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+0^2+0^2+0^2+0^2)\,(\varepsilon_1^2(x)+\cdots+\varepsilon_8^2(x)),$$

also durch Anwendung von (7)

$$f(x)=g_1^2(x)+g_2^2(x)+g_3^2(x)+g_4^2(x)+g_5^2(x)+g_6^2(x)+g_7^2(x)+g_8^2(x).$$

Nachdem nun die Zerlegbarkeit in acht Quadrate für irreduzibele definite Funktionen bewiesen ist, so folgt sie leicht für alle definiten Funktionen. Denn jede definite reduzible Funktion ist von der Gestalt

---

*) Mindestens eine derselben hat natürlich den Grad $\frac{n}{2}$.

**) Mit dem bekannten Beweise dieses Bachet-Lagrangeschen Satzes hat das ganze Verfahren große Ähnlichkeit.

$$f(x) = c(F(x))^2 F_1(x) F_2(x) \cdots F_\varrho(x),$$

wo $F_1(x), \cdots, F_\varrho(x)$ definit und irreduzibel sind; da nach dem Obigen die Faktoren $F_1(x), \cdots, F_\varrho(x)$ in je acht Quadrate zerlegbar sind, so ergibt die wiederholte Anwendung der Identität (7), daß $f(x)$ als Summe von acht Quadraten darstellbar ist.

Bekanntlich hat Herr Hurwitz*) bewiesen, daß für $\nu > 8$ (und $\nu = 3, 5, 6, 7$) das Produkt zweier Summen von ν Quadraten nicht als Summe von ν Quadraten darstellbar ist. Das Gelingen des Nachweises, daß $f(x)$ in eine feste (von n unabhängige) Anzahl von Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen zerlegbar ist, ist also nur dem glücklichen Umstand zu verdanken, daß durch den Hilbertschen Satz die Zerlegbarkeit von -1 in sieben Quadrate gewährleistet ist. Würde man z. B. nur beweisen können, daß -1 stets in acht Quadrate zerlegbar ist, so würde das oben eingeschlagene Verfahren überhaupt keine von n unabhängige obere Schranke für die Anzahl der zur Darstellung von $f(x)$ erforderlichen Quadrate ergeben**).

Es ist nun sehr zu wünschen, daß Herr Hilbert den Beweis seines Satzes veröffentlicht. Der Satz scheint mir dadurch noch an Bedeutung gewonnen zu haben, daß er die Erledigung unseres nur auf rationale Zahlen bezüglichen Problems nach sich zieht.

Die im Vorangehenden auseinandergesetzte Methode gestattet also, für jeden Körper, in welchem -1 als Summe von sieben Zahlenquadraten darstellbar ist, das zugehörige $f(x)$ als Summe von acht Quadraten ganzer rationalzahliger Funktionen darzustellen; nach Herrn Hilbert gilt dies also für jedes definite $f(x)$. Ich mache aber besonders darauf aufmerksam, daß die obige Reduktionsmethode in allen Fällen, für welche -1 in drei Quadrate zerlegt werden kann, sogar die Zerlegbarkeit von $f(x)$ in vier Quadrate ergibt; man braucht ja nur auf die Gleichung

$$f(x) = \frac{\alpha_1{}^2(x) + \alpha_2{}^2(x) + \alpha_3{}^2(x) + \alpha_4{}^2(x)}{f_1(x)}$$

dieselben Schlüsse anzuwenden wie oben auf (3) und dabei fortwährend von der Identität

*) „Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1898, S. 309—316.

**) Der Hilbertsche Satz, daß -1 stets in vier Quadrate zerlegbar ist, ergibt nicht mehr als die bloße Kenntnis, daß -1 in sieben Quadrate zerlegbar ist; das Produkt zweier Summen von je fünf Quadraten kann ja mit Sicherheit nur als Summe von acht Quadraten dargestellt werden.

$$(8)\quad (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2) = (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4)^2$$
$$+(-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3)^2+(-\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_4+\alpha_3\beta_1+\alpha_4\beta_2)^2$$
$$+(-\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_4\beta_1)^2$$

Gebrauch zu machen*).

Es ist vielleicht von Interesse, für eine spezielle Klasse von Körpern in elementarer Weise die Zerlegbarkeit von -1 in vier Quadrate darzutun. Ich verdanke meinem Freunde J. Schur einen solchen Nachweis für den Kreisteilungskörper der m^{ten} Einheitswurzeln ($m \geqq 3$) und teile hier diesen Beweis in unwesentlich modifizierter Form mit.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann m als ungerade Primzahl oder $=4$ angenommen werden. Denn wenn der Nachweis hierfür erledigt ist, so ergibt sich für jedes $m \geqq 3$, falls p einen ungeraden Primfaktor von m bezw. die Zahl 4 (für $m = 2^\varrho$) bezeichnet, im Körper der p^{ten} Einheitswurzeln eine Zerlegung

$$-1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

und diese ist gleichzeitig eine Zerlegung im Körper der m^{ten} Einheitswurzeln.

Es handelt sich also, da offenbar im Körper der 4^{ten} Einheitswurzeln

$$-1 = i^2 = \alpha^2$$

ist, nur um den durch die Gleichung

$$f(x) = 1 + x + \cdots + x^{p-1} = 0$$

bestimmten Körper, wo p eine ungerade Primzahl ist.

1) p habe die Form $8\nu+3$ oder $8\nu+5$. Dann ist

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{p}\right) = -1 \pmod p,$$

also

$$2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = hp.$$

Nun ist

$$(1+x+\cdots+x^{p-1})(1+x^p+x^{2p}+\cdots+x^{(h-1)p})$$
$$= 1+x+\cdots+x^{p-1}+x^p+\cdots+x^{hp-1}$$
$$= 1+x+\cdots+x^{2^{\frac{p-1}{2}}-1}+x^{hp-1}$$
$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^{\frac{p-1}{2}-1}}\right)+x^{hp-1},$$

also, wenn für x eine Wurzel ϑ von $f(x)=0$ eingesetzt wird,

*) Daß analog für jeden Körper, in welchem -1 Quadratzahl ist, d. h. welcher die Zahl i enthält, $f(x)$ in zwei Quadrate zerlegt werden kann, ist trivial.

$$0 = (1+\vartheta)(1+\vartheta^2)(1+\vartheta^4)\cdots\left(1+\vartheta^{2^{\frac{p-1}{2}-1}}\right)+\vartheta^{-1},$$

also, da

$$\vartheta = \vartheta^{p+1} = \left(\vartheta^{\frac{p+1}{2}}\right)^2$$

ist und jeder der $\frac{p-1}{2}$ Faktoren des Produktes eine Summe von zwei Quadraten ist,

$$0 = \alpha^2 + \beta^2 + \vartheta^{-1},$$

$$-\vartheta^{-1} = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$-1 = (\alpha^2+\beta^2)\vartheta = (\alpha^2+\beta^2)\left(\vartheta^{\frac{p+1}{2}}\right)^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2;$$

-1 ist also in zwei Quadrate zerlegbar und folglich nach meinen allgemeinen Bemerkungen auf S. 278—279 $f(x)$ in vier Quadrate*).

2) Die ungerade Primzahl p sef beliebig. Dann läßt sich jedenfalls eine Primzahl q so bestimmen, daß q die Form $8\nu+3$ hat und daß q Nichtrest modulo p ist. Dann ist

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q}{p}\right) = -1 \pmod{p},$$

also

$$q^{\frac{p-1}{2}} + 1 = hp,$$

$$(9)\quad (1+x+\cdots+x^{p-1})(1+x^p+\cdots+x^{(h-1)p}) = 1+x+\cdots+x^{hp-1}$$

$$= 1+x+\cdots+x^{q^{\frac{p-1}{2}}-1}+x^{hp-1}$$

$$= (1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})(1+x^q+x^{2q}+\cdots+x^{(q-1)q})\cdots$$

$$\cdots\left(1+x^{q^{\frac{p-1}{2}-1}}+x^{2q^{\frac{p-1}{2}-1}}+\cdots+x^{(q-1)q^{\frac{p-1}{2}-1}}\right)+x^{hp-1}.$$

Nun ist nach 1)

$$1+x+x^2+\cdots+x^{q-1} = F_1^2(x)+\cdots+F_4^2(x),$$

---

*) Übrigens folgt für $p=8\nu+3$ die Zerlegbarkeit von $f(x)$ in vier Quadrate und ebenso für $p=8\nu+7$ die Zerlegbarkeit von $f(x)$ in fünf Quadrate direkt daraus, daß bekanntlich für $p\equiv 3$ (mod. 4)

$$4f(x) = 4\,\frac{x^p-1}{x-1} = X_1^2 + pX_2^2$$

ist, wo X_1 und X_2 ganze ganzzahlige Funktionen von x sind. Denn, da für $p=8\nu+3$ bezw. $p=8\nu+7$ eine Gleichung $p=a^2+b^2+c^2$ bezw. $p=a^2+b^2+c^2+d^2$ besteht, so ist $f(x)$ in vier bezw. fünf Quadrate zerlegbar. Nur der Fall $p=8\nu+1$ ist schwieriger zu behandeln, etwa wie oben unter 2) im Anschluß an die Mitteilungen von Herrn Schur, wobei der Dirichletsche Satz von der arithmetischen Progression angewendet wird.

also

$$1 + x^q + x^{2q} + \cdots + x^{(q-1)q} = F_1^2(x^q) + \cdots + F_4^2(x^q) = G_1^2(x) + \cdots + G_4^2(x),$$

. . . .

$$1 + x^{q^{\frac{p-1}{2}-1}} + x^{2q^{\frac{p-1}{2}-1}} + \cdots + x^{(q-1)q^{\frac{p-1}{2}-1}} = F_1^2\left(x^{q^{\frac{p-1}{2}-1}}\right) + \cdots + F_4^2\left(x^{q^{\frac{p-1}{2}-1}}\right)$$
$$= K_1^2(x) + \cdots + K_4^2(x).$$

Daher hat nach (8) die rechte Seite von (9) die Gestalt einer Summe von vier Quadraten plus x^{hp-1}. Setzt man nun in (9) für x eine Wurzel ϑ der Gleichung

$$f(x) = 0$$

ein, so ergibt sich

$$0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \vartheta^{-1},$$
$$-1 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\left(\vartheta^{\frac{p+1}{2}}\right)^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2.$$

Zweiter Teil.

Die im ersten Teil angewendete Reduktionsmethode führt auch in der Theorie der definiten ganzen rationalen Funktionen zweier Variabeln

$$f(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \cdots + a_{0n}y^n$$

mit beliebigen reellen Zahlenkoeffizienten zu einem neuen Resultat. Bisher ist darüber folgendes bekannt.

Herr Hilbert*) hat zuerst den Nachweis der merkwürdigen Tatsache geführt, daß $f(x, y)$ im allgemeinen nicht als Summe von Quadraten ganzer rationaler Funktionen von x und y mit reellen Koeffizienten darstellbar ist. Später hat Herr Hilbert**) bewiesen, daß sich $f(x, y)$ stets als Quotient zweier solcher Quadratsummen darstellen läßt. Er beweist zu diesem Zwecke — unter Anwendung der Theorie der Abelschen Funktionen — zunächst den Satz***): „Jede beliebige ternäre definite Form†) F von der n^{ten} Ordnung ist in der Gestalt darstellbar

$$F = \frac{\Phi^2 + \Psi^2 + X^2}{H}, \tag{10}$$

wo Φ, Ψ, X Formen mit reellen Koeffizienten von der $n - 2^{\text{ten}}$ Ordnung sind und H die $n - 4^{\text{te}}$ Ordnung besitzt."

*) „Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten", Mathematische Annalen, Bd. 32, 1888, S. 342—350.

**) „Über ternäre definite Formen", Acta mathematica, Bd. 17, 1893, S. 169—197.

***) l. c., S. 196.

†) D. h. jede definite ganze rationale homogene Funktion dreier Variabeln.

Aus (10) schließt nun Herr Hilbert weiter: H ist eine definite Form, läßt sich also in der Gestalt

$$\frac{\Phi_1^2 + \Psi_1^2 + X_1^2}{H_1}$$

darstellen, wo $n-8$ der Grad von H_1 ist. Die Wiederholung dieser Schlußweise führt schließlich zu einem Bruch, dessen Nenner eine positive Konstante oder eine quadratische definite Form ist. Da letztere eine Summe von Formenquadraten ist, so ergibt sich durch Ausführung der Multiplikationen für F eine Darstellung als Quotient von zwei Quadratsummen

$$f = \frac{\Phi_1^2 + \cdots + \Phi_p^2}{\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_\varrho^2}. \tag{11}$$

Jede definite ternäre Form oder, was dasselbe besagt, jede definite Funktion zweier Variabeln ist also als Quotient von zwei Quadratsummen darstellbar.

Dies Hilbertsche Resultat läßt sich ohne Mühe dahin ergänzen, daß $f(x, y)$ als Quotient zweier Summen von je vier Quadraten darstellbar ist; denn es werden stets Summen von je drei, also von je vier Quadraten miteinander multipliziert, und es greift die Identität (8) Platz. Aus

$$f(x, y) = \frac{\Phi_1^2 + \cdots + \Phi_4^2}{\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_4^2} \tag{12}$$

kann man noch schließen:

$$f(x, y) = \frac{(\Phi_1^2 + \cdots + \Phi_4^2)(\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_4^2)}{(\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_4^2)^2} = \frac{\Psi_1^2 + \cdots + \Psi_4^2}{\Psi^2}. \tag{13}$$

Aber damit ist nicht viel gewonnen. Sowohl in (11), als auch in (12) und (13) wachsen die Grade der auftretenden Funktionen in bezug auf jede Variable sehr an; sie haben die Größenordnung n^2.

Nun schließe ich aber, von (10) ausgehend, anders weiter und werde — unter der Voraussetzung, daß in der definiten Funktion n^{ten} Grades $f(x, y)$ das Glied mit y^n nicht den Koeffizienten Null hat*) — zu folgendem Satz gelangen:

„$f(x, y)$ läßt sich als Summe von vier Quadraten

$$f = \psi_1^2 + \cdots + \psi_4^2$$

darstellen, wo $\psi_1, \cdots, \psi_4$ ganze rationale Funktionen von y mit rationalen reellen Funktionen von x als Koeffizienten sind.“

---

*) Durch eine ganze lineare Transformation der Variabeln läßt sich bekanntlich bei einer Funktion mehrerer Variabeln stets erreichen, daß der Grad in jeder Variabeln gleich dem Grade der Funktion ist.

Dieser Satz ist offenbar richtig für Funktionen 0^{ten} und 2^{ten} Grades. Denn für

$$f(x, y) = c$$

ist

$$f(x, y) = (\sqrt{c})^2;$$

für

$$f(x, y) = A_0(x)y^2 + A_1(x)y + A_2(x),$$

wo nach Voraussetzung A_0 eine positive Konstante und für alle reellen x

$$A_1^2(x) - 4A_0(x)A_2(x) \leqq 0$$

ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A_0(x)\left(y + \frac{A_1(x)}{2A_0(x)}\right)^2 + \frac{4A_0(x)A_2(x) - A_1^2(x)}{4A_0(x)} \\ &= (ay + \varphi_1(x))^2 + \varphi_2^2(x) + \varphi_3^2(x) \\ &= \psi_1^2(x, y) + \psi_2^2(x, y) + \psi_3^2(x, y). \end{aligned}$$

Der Satz möge für Funktionen 0^{ten}, 2^{ten}, $\cdots$, $n-2^{\text{ten}}$ Grades als bewiesen angenommen werden.

Nach (10) ist die Funktion n^{ten} Grades $f(x, y)$*) in der Gestalt darstellbar

$$f = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}{f_1}, \tag{14}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, f_1$ ganze rationale Funktionen von x und y mit reellen Koeffizienten sind und f_1 in x und y, also auch in y allein, geringeren Grad hat als f**). (14) läßt sich auch so schreiben:

$$ff_1 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_4^2. \tag{15}$$

Ich dividiere nun, wenn $f_1(x, y)$ nicht schon von y unabhängig ist, unter Bevorzugung der Variabeln y die vier Funktionen $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ durch f_1. Dies gibt

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = q_1 f_1 + \beta_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_4 = q_4 f_1 + \beta_4, \end{array}\right. \tag{16}$$

wo $\beta_1, \cdots, \beta_4$ ganze rationale Funktionen von y sind, in denen die Koeffizienten der Potenzen von y (ganze oder gebrochene) rationale reelle Funktionen von x sind. Hierbei haben $\beta_1, \cdots, \beta_4$ in y kleineren Grad als f_1, also a fortiori als f.

1) Wenn die vier Reste $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ identisch Null sind, ergibt sich aus (15)

$$f = f_1(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = f_1 f_2,$$

*) $f(x, y)$ kann ja als definite ternäre Form $F(x_1, x_2, x_3)$ geschrieben werden.

**) Für die spätere Wiederholung des folgenden Schlußverfahrens ist es wichtig zu bemerken, daß nur von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß f_1 in y geringeren Grad hat als f, nicht davon, daß dies auch für den Grad in x und y gilt.

wo f_1 und f_2 ganze Funktionen von y sind, mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten. Der Grad k von f_1 in y liegt zwischen 0 (exkl.) und n (exkl.), der Grad $n-k$ von f_2 also gleichfalls. Nach der bekannten Verallgemeinerung eines Gaußschen Satzes ist also die ganze rationale Funktion $f(x, y)$ in zwei Faktoren $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ zerlegbar, die in x und y ganz sind und in y die Grade k und $n-k$ haben. In

$$f(x,y) = F_1(x,y)\, F_2(x,y)$$

sind auch die Grade von $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ in beiden Variabeln beziehlich k und $n-k$, da ja $f(x, y)$ in beiden Variabeln auch den Grad n hat. Die Koeffizienten von y^k bezw. y^{n-k} in $F_1(x, y)$ bezw. $F_2(x, y)$ sind Konstanten, von denen erstere ohne Beschränkung der Allgemeinheit $=1$ angenommen werden kann. $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ sind ferner definit, da $F_1(x, y)$ aus einer definiten Funktion $f_1(x, y)$ durch Division mit einer definiten rationalen Funktion von x (nämlich dem Koeffizienten von y^k in $f_1(x, y)$) entsteht. $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ sind also Funktionen von x und y, welche genau dieselben Voraussetzungen erfüllen wie $f(x, y)$, aber geringeren Grad haben als $f(x, y)$; für solche Funktionen war der Satz als bewiesen angenommen worden, so daß sich für $f(x, y)$ eine Zerlegung

$$f(x,y) = (\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_4^2)(\chi_1^2 + \cdots + \chi_4^2) = \psi_1^2 + \cdots + \psi_4^2$$

ohne Nenner in y ergibt.

2) Wenn $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ nicht sämtlich identisch 0 sind, so ist $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2$ nicht identisch 0, und es folgt aus (15) und (16) modulo f_1

$$\beta_1^2 + \cdots + \beta_4^2 \equiv \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_4^2 = f f_1 \equiv 0,$$

d. h. der Quotient

$$\frac{\beta_1^2 + \cdots + \beta_4^2}{f_1} = f_2$$

ist in y ganz und nicht identisch 0, in x rational. f_2 hat in y kleineren Grad als f_1. Aus (15) und

$$f_1 f_2 = \beta_1^2 + \cdots + \beta_4^2$$

folgt durch Multiplikation unter Benutzung der Identität (8)

$$\begin{aligned} f f_1^2 f_2 = (&\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4)^2 + (-\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)^2 \\ &+ (-\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2)^2 + (-\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1)^2. \end{aligned}$$

Jede der vier Basen rechts ist durch f_1 teilbar, und man erhält

$$f f_2 = \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_4^2,$$

$$f = \frac{\gamma_1^2 + \cdots + \gamma_4^2}{f_2}, \tag{17}$$

wo $\gamma_1, \cdots, \gamma_4, f_2$ in x rational, in y ganz sind, und wo f_2 in y geringeren Grad hat als f_1.

Durch Erweiterung des Bruches (17) mit einer gewissen ganzen rationalen Funktion von x nimmt (17) die Form an

$$f = \frac{\delta_1^2 + \cdots + \delta_4^2}{F_2},$$

wo $\delta_1, \cdots, \delta_4$, F_2 ganze rationale reelle Funktionen von x und y sind, und wo F_2 in y kleineren Grad hat als f_1 und a fortiori als f.

Ist dieser Grad von F_2 in bezug auf y noch nicht 0, so läßt sich das Verfahren wiederholen, bis man schließlich zu einer Gleichung kommt

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1^2(x, y) + \cdots + \varphi_4^2(x, y)}{\psi(x)}, \tag{18}$$

wo im Nenner eine (definite ganze reelle) Funktion von x allein steht.

$f(x, y)$ läßt sich also mit einer solchen definiten ganzen Funktion von x allein multiplizieren, daß das Produkt als Summe von vier Quadraten ganzer reeller Funktionen von x und y darstellbar ist.

Aus (18) folgt schließlich wegen

$$\psi(x) = \chi_1^2(x) + \chi_2^2(x)$$

$$f(x, y) = \frac{(\chi_1^2(x) + \chi_2^2(x))(\varphi_1^2(x, y) + \cdots + \varphi_4^2(x, y))}{\psi^2(x)}$$

$$= \psi_1^2(x, y) + \cdots + \psi_4^2(x, y),$$

wo $\psi_1(x, y), \cdots, \psi_4(x, y)$ ganze rationale Funktionen von y sind, deren Koeffizienten rationale reelle Funktionen von x sind.

Dies war die auf S. 282 ausgesprochene Behauptung.

Den 31. August 1905.

Beiträge zur Theorie der Punktmengen. III.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Mit dem folgenden Beitrage gelangen meine Untersuchungen über die Theorie der ebenen Punktmengen zu einem gewissen Abschluß. Das Ziel, das ich mir gesteckt hatte, und das darauf ging, die geläufigen Sätze der Analysis situs über Kurven und Kurvenbogen, sowie über die durch sie bewirkten Gebietsteilungen mengentheoretisch zu klären und zu begründen, dürfte mit ihnen erreicht sein. Abgesehen hiervon aber haben diese Untersuchungen zu einem neuen und meines Erachtens prinzipiell wichtigen Ergebnis geführt, nämlich zu den *notwendigen und hinreichenden* Eigenschaften, die für eine Punktmenge erfüllt sein müssen, damit sie im Sinne der Analysis situs als *gleichwertig mit der Geraden oder der Strecke* betrachtet werden kann. Für diese Kriterien bildet die von mir eingeführte Unterscheidung der Punkte einer Menge in *erreichbare* und *nicht erreichbare* die Grundlage; in ihr darf ich denjenigen Begriff erblicken, der für eine abschließende Erörterung der vorliegenden Probleme eines der wesentlichsten Hilfsmittel bildet und den allgemeinsten mit der Geraden gleichwertigen Kurvenbegriff charakterisiert.

Als wichtig möchte ich noch den Umstand hervorheben, daß alle Begriffe, die ich für die Einteilung und Analyse der Mengen, sowie für die Kennzeichnung ihrer besonderen Art benutze, sich im Laufe der Untersuchung als solche erwiesen haben, die den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Ebene gegenüber *invariant* sind. Dies berechtigt dazu, diese Begriffe als die *natürlichen Grundbegriffe* jeder derartigen Analyse aufzufassen.

Was die teilweise Länge und Ausführlichkeit meiner Darstellung betrifft, so scheint sie mir unvermeidlich zu sein. Handelt es sich doch um ein Gebiet, bei dem man nur zu leicht zu Fehlern gelangt, wenn man die geläufigen Ergebnisse der Anschauung als die allgemeinsten gestaltlichen Möglichkeiten auffaßt. Demgegenüber habe ich stets die *logische Erschöpfung aller an sich möglichen Fälle* zum Ausgangspunkt gewählt.

Dies ist um so nötiger, als in vielen Fällen, insbesondere in der Funktionentheorie, ebene Mengen nur durch *analytische Definitionen* eingeführt werden, bei denen die Vorstellbarkeit schließlich ganz versagt. Ich füge hinzu, daß aus diesem Grunde auch der Beweis, den Herr C. Jordan für seinen bekannten Kurvensatz gegeben hat, einer Ergänzung bedarf. Dieser Beweis operiert mit einer Reihe von Polygonen, die einander einschließen, resp. ausschließen, und beruht auf der stillschweigenden, aber irrtümlichen *Annahme*, daß solche Reihen immer gegen eine geschlossene Kurve konvergieren, die die Ebene in ein Äußeres und ein Inneres teilt. *Dies ist aber keineswegs der Fall.* Vielmehr können die gestaltlichen Verhältnisse, die hier in Frage kommen, viel allgemeinere sein, und gerade das Auftreten der Kurve ist dasjenige, was des Beweises bedarf (vgl. § 1).

Im einzelnen ist zu bemerken, daß ich zunächst (§ 1ff) einige einfachere Hilfssätze über Gebiete und deren Zerlegung ableite, die hier als grundlegend zu betrachten sind, wobei auch die soeben genannte Frage ihre Erledigung findet. Alsdann folgen einige Paragraphen, die sich eingehend mit dem oben erwähnten Begriff der Erreichbarkeit beschäftigen und seine Bedeutung für die ganze Theorie ins Licht setzen (§ 5ff); es ist klar, daß in ihm das geometrische Äquivalent für die umkehrbare Stetigkeit des die Kurve darstellenden Funktionenpaares $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ zu erblicken ist. Dieser Begriff gestattet für diejenige Kurve, deren sämtliche Punkte beiderseits erreichbar sind und die ich als *einfache* Kurve bezeichne, dieselbe Anordnung ihrer Punkte vorzunehmen, wie für den Kreis, nämlich diejenige, die auf dem Zwischenbegriff beruht (§ 8). Es folgt (§ 10) ein neuer und wesentlich kürzerer Beweis des Satzes, daß jede derartige Kurve umkehrbar eindeutig und stetig auf den Kreis abgebildet werden kann*); alsdann folgt (§ 11) ein neuer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes über die Teilung der Ebene in ein Äußeres und Inneres, der überdies dahin zu vervollständigen ist, daß alle Punkte der bezüglichen Kurve aus beiderseits erreichbaren Punkten bestehen. Erst damit dürfte eine zufriedenstellende Antwort auf die Frage gewonnen sein, welches die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften einer Punktmenge sind, damit sie Bild des Kreises oder des Kreisbogens ist. Der Jordansche Satz erscheint auf diese Weise erst am Ende der Darstellung, wohin er bei der allgemeinen Erörterung der ebenen Mengen auch gehört; in der Tat reduziert sich so sein Beweis ausschließlich darauf, auf Grund der allgemeinen Resultate aus der Mannigfaltigkeit der verschiedenen ebenen Mengen diejenigen herauszusuchen, die ihrer Struktur

*) Einen Beweis dieses Satzes, und zwar mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes, gab inzwischen auch Herr F. Riesz, diese Ann. Bd. 59, S. 409.

nach Bild des Kreises sein können, wozu es nur der einfachsten Überlegungen bedarf.

Der Begriff der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung kann sich sowohl auf eine einzelne Menge wie auf die ganze Ebene beziehen. Der erste Begriff kann aber immer zu dem zweiten erweitert werden. Der Nachweis dieser Tatsache (§ 12) ist nötig, um die Sätze über Gebietsteilungen, die zunächst nur für polygonale Wege abgeleitet wurden, auf beliebige, einfache Kurvenwege zu übertragen. Den Schluß bildet (§ 13) eine Zusammenstellung der wichtigsten Invarianten der Analysis situs.

Ich schließe mit dem Hinweis, daß für diese Beiträge keine anderen Voraussetzungen zugrunde gelegt werden, als die *Analysis situs der gewöhnlichen Polygone* und der mit ihnen aufgebauten Gebilde, die allgemeinen Grundlagen der *Theorie der ebenen Mengen*, sowie endlich der Begriff der *eineindeutigen und stetigen Abbildung*. Auf dieser Grundlage gelingt es, dem eben genannten Teil der Analysis situs die allgemeinste Erweiterung zu geben, deren er fähig zu sein scheint.

§ 1.

Folgen einschließender und ausschließender Polygone.

Eine Folge von einfachen Polygonen

$$\{P_\nu\} = P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots$$

von der Art, daß kein Punkt von P_ν außerhalb von $P_{\nu+1}$ liegt*), soll als Folge *ausschließender* Polygone bezeichnet werden. Gemäß Beitrag II, § 3 konvergiert sie gegen eine *zusammenhängende* Menge $\mathfrak{T}$.**) Definiert man ein Gebiet $\mathfrak{J}$ so, daß ihm das *Innere* $\mathfrak{J}(P_\nu)$ eines jeden Polygons P_ν angehört, so ist auch $\mathfrak{J}$ *zusammenhängend*. Sind nämlich i_1 und i_2 zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, so gibt es der Definition gemäß ein erstes Polygon, zu dessen Innerem sie gehören; sie sind also durch einen zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Weg***) verbindbar.

Ein ähnlicher Satz besteht für eine Folge einander *einschließender* Polygone; darunter verstehe ich Polygone Q_ν von der Art, daß kein Punkt von Q_ν innerhalb von $Q_{\nu+1}$ liegt. Auch sie konvergieren gegen eine *zusammenhängende* Menge $\mathfrak{T}$, und man kann ein *zusammenhängendes* Gebiet $\mathfrak{A}$ definieren, dem das *Äußere* $\mathfrak{A}(Q_\nu)$ eines jeden Polygons Q_ν angehört.

Die Menge $\mathfrak{T}$ braucht weder in dem einen noch in dem anderen

*) Daß P_ν und $P_{\nu+1}$ Punkte gemein haben, ist zulässig.

**) Diese Ann. Bd. 59, S. 139. Dort ist der Satz unter der Voraussetzung isolierter Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ bewiesen; er gilt ebenso für die Polygone P_ν.

***) D. h. einen Streckenzug endlicher Streckenzahl; vgl. Beitrag II a. a. O. S. 131.

Falle eine geschlossene Kurve zu sein, sie kann vielmehr weit allgemeineren Charakter haben. Ziehen wir insbesondere die Polygone P_ν resp. die durch sie bestimmte Menge $\mathfrak{T}$ in Betracht, so gilt für die Gebietsteilung, die durch sie bewirkt wird, das Folgende. Setzt man

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{E}$ die ganze Ebene bedeutet, so braucht $\mathfrak{M}$ keineswegs zusammenhängend zu sein; vielmehr kann $\mathfrak{M}$ in beliebig viele Teilgebiete zerfallen, wofür unten ein einfaches Beispiel folgt. Benutzt man ferner für $\mathfrak{T}$ die allgemeine Zerlegung*)

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_m + \mathfrak{T}_{mi},$$

wo die Punkte von $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{T}_m$ Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ resp. nur von $\mathfrak{M}$ sind und die Punkte von $\mathfrak{T}_{mi}$ gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$, so folgert man leicht, daß $\mathfrak{T}_m = 0$ ist. Da nämlich jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ Grenzpunkt von Punkten der Polygone P_ν ist, so liegen in jeder Nähe von ihm auch solche Punkte, die zum *Inneren* gewisser Polygone P_ν, also auch zu $\mathfrak{J}$ gehören; es kann daher keinen Punkt t_m geben, in dessen Umgebung nur Punkte von $\mathfrak{M}$ liegen. Dagegen braucht $\mathfrak{T}_i$ nicht Null zu sein. Andererseits ist $\mathfrak{T}_{mi}$ die volle Grenze zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{M}$, und ist in dem Falle, daß $\mathfrak{M}$ selbst ein zusammenhängendes Gebiet ist, gemäß Beitrag II, § 5 ebenfalls eine zusammenhängende Menge, und zwar eine *geschlossene Kurve*. Ähnliche Verhältnisse gelten für den Fall, daß $\mathfrak{T}$ Grenzmenge der Polygone Q_ν ist.

Fügt man z. B. (Fig. 1) einem Quadrat von außen ein Dreieck so an, daß beide nur eine Ecke gemein haben, und betrachtet die Polygone, die gegen diese Figur von außen approximieren, so bilden sie eine Folge $\{Q_\nu\}$, so daß $\mathfrak{M}$ in zwei getrennte Gebiete zerfällt. Ähnliches gilt, wenn man das Dreieck von innen anfügt, für die von innen approximierenden Polygone P_ν. Errichtet man andererseits auf dem Quadrat nach außen ein Lot, und betrachtet wieder die von außen approximierenden Polygone, so bilden sie eine Folge, für die $\mathfrak{M}$ ein einziges Gebiet ist, während $\mathfrak{T}$ aus dem Quadrat und dem Lot besteht, also sich nicht auf die Grenze zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ beschränkt. Derartige Beispiele lassen sich in mannigfachster Form und zwar mit vorgegebenen Teilmengen $\mathfrak{T}_i$ resp. $\mathfrak{T}_a$ und mit vorgegebener Gebietsteilung leicht herstellen.

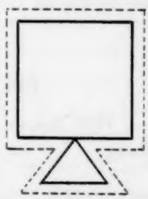

Fig. 1.

Nur wenn man von vornherein weiß, daß eine einschließende und eine ausschließende Polygonfolge gegen *dieselbe* Menge $\mathfrak{T}$ konvergiert, kann

*) Jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gehört einer und nur einer der drei Teilmengen an.

man gemäß dem Obigen folgern, daß die Ebene in nur zwei Gebiete zerfällt, und daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ deren gemeinsamer Grenzpunkt ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, wie ich bereits in der Einleitung bemerkte, daß der Beweis, den Herr C. Jordan für seinen bekannten Kurvensatz gegeben hat, einer Ergänzung bedarf. Herr Jordan operiert ebenfalls mit zwei Reihen von einfachen Polygonen P_ν resp. Q_ν, die gegen die gegebene Punktmenge $\mathfrak{T}$ konvergieren, und zwar bildet die eine Reihe eine einschließende, die andre eine ausschließende Folge. Er beweist, daß jeder Punkt des Ringgebietes, das zwischen je einem Polygon P_ν und Q_ν liegt, einen Abstand von $\mathfrak{T}$ besitzt, der mit wachsendem ν unendlich klein wird.*) Er definiert dann ebenfalls zwei zusammenhängende Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, wie es vorstehend geschehen ist, und behauptet, daß damit der Satz bewiesen sei. Dies ist jedoch nicht der Fall, wofür ich am einfachsten auf die obigen Beispiele verweisen kann. Um diesen Schluß ziehen zu können, muß man vielmehr noch nachweisen, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß auch der Abstand *jedes* Punktes von $\mathfrak{T}$ von den Polygonen P_ν und Q_ν unendlich klein wird.**) Dies kann innerhalb des Jordanschen Beweisganges gewiß gezeigt werden, ist aber andererseits für den Nachweis des Satzes unerläßlich und bildet einen wesentlichen Teil seines Inhalts. Überhaupt scheint mir der Hinweis auf die Mannigfaltigkeit der Figuren, die sich als Grenzen zweier derartiger Reihen von Polygonen einstellen können, für den bindenden Beweis des Satzes und die volle Erfassung seines Inhaltes geboten zu sein; gerade diese Unterlassung — wie ich auch in der Einleitung hervorhob — dürfte die Lücke des Beweises verschuldet haben.

§ 2.

Ein Satz über ausschließende Polygonfolgen.

Wir gehen von der in § 1 für die Polygone P_ν aufgestellten Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{M}$$

aus. Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ ist äußerer Punkt eines *jeden* Polygons P_ν. Diese Punkte teilen wir in zwei Klassen, je nachdem sie mit dem unendlich fernen Punkt von $\mathfrak{E}$ durch einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbindbar sind oder nicht; die ersteren bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}$, die übrigen durch $\mathfrak{A}'$, und zwar ist $\mathfrak{A}$ der Definition gemäß ein zusammenhängendes Gebiet. Wir haben dann

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{J} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'.$$

*) Cours d'analyse, 2. Aufl. § 102. „Il est donc établi" usw. S. 98.

**) a. a. O. wird immer nur hervorgehoben, daß jeder Punkt von P_ν und Q_ν von $\mathfrak{T}$ unendlich kleinen Abstand hat, was eben nicht das gleiche ist.

Eine ähnliche Teilung können wir mit $\mathfrak{T}$ vornehmen. Sei $\mathfrak{T}_a$ die *volle Grenze* von $\mathfrak{A}$, also eine abgeschlossene Menge, so bleiben von $\mathfrak{T}$ nur solche Punkte übrig, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ oder nur von $\mathfrak{A}'$ oder von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$ sind; wir setzen demgemäß

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{T}_a' + \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_{ai}'.$$

Setzen wir nun noch

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{J} + \mathfrak{T}_a' + \mathfrak{T}_i + \mathfrak{T}_{ai}' = \mathfrak{N},$$

so wird

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T}_a + \mathfrak{A} + \mathfrak{N},$$

und es läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{T}_a$ eine geschlossene Kurve ist, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ trennt.

Da nämlich gemäß § 1 in $\mathfrak{T}$ kein Punkt existiert, der Grenzpunkt nur von $\mathfrak{M}$ ist, so folgt zunächst, daß $\mathfrak{T}_a' = 0$ ist, und daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}_a$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ ist. Daraus allein kann aber die Behauptung nicht gefolgert werden*). Sie ergibt sich daraus, daß in unserm Fall $\mathfrak{T}_{ai}'$ nur Grenzpunkte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$, aber keine von $\mathfrak{A}$ enthält. Fügt man nämlich der Menge $\mathfrak{J}$ die Punkte von $\mathfrak{T}_i$ und $\mathfrak{T}_{ai}'$ hinzu, so entsteht eine ebenfalls zusammenhängende Menge $\mathfrak{J}'$, und man erhält

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{J}' + \mathfrak{A}'.$$

Ist nun t_{ai}' irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}_{ai}'$, ist ϱ' sein Abstand von der Menge $\mathfrak{T}_a$, und schlägt man um ihn einen Kreis mit dem Radius $\delta < \varrho'$, so können in diesem Kreis nur Punkte von $\mathfrak{N}$ liegen, und zwar sind darunter sowohl Punkte von $\mathfrak{J}$ wie von $\mathfrak{A}'$. Daraus folgt zunächst, daß *jeder* Punkt von $\mathfrak{A}'$ mit gewissen Punkten von $\mathfrak{J}$ durch einen zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Weg verbindbar ist. Da aber $\mathfrak{J}$ eine zusammenhängende Menge ist, so folgt nunmehr weiter, daß jeder Punkt von $\mathfrak{A}'$ mit *demselben* Punkt von $\mathfrak{J}$ durch einen solchen Weg verbindbar ist; d. h. $\mathfrak{N}$ ist eine zusammenhängende Menge. Hieraus folgt alsdann nach Beitrag II, § 5, daß $\mathfrak{T}_a$ eine geschlossene Kurve ist. Also:

Durch jede Folge ausschließender Polygone $\{P_\nu\}$ wird eine gewisse geschlossene Kurve C definiert, die Teilmenge der durch die Polygone $\{P_\nu\}$ bestimmten Menge $\mathfrak{T}$ ist, und deren Inneres das Innere $J(P_\nu)$ jedes Polygons als Teilmenge enthält.

Für eine Folge einschließender Polygone besteht ein derartiger Satz nicht.

*) Dies zeigt Figur 1, wenn man für $\mathfrak{N}$ das Innere des Quadrats und des Dreiecks setzt.

§ 3.

Hilfssätze über die approximierenden Polygonfiguren.

Wie im Beitrag II bewiesen wurde, läßt sich zu jeder abgeschlossenen Menge $\mathfrak{T}$ eine polygonale Figur Π konstruieren, die die Menge $\mathfrak{T}$ in einem gegebenen mittleren Abstand approximiert. Darunter ist zu verstehen, daß die Figur Π ein polygonales Gebiet Σ bestimmt, so daß, wenn $\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{M}$ gesetzt wird, $\mathfrak{T}$ selbst sowie jeder Punkt von $\mathfrak{M}$, dessen Abstand von $\mathfrak{T}$ höchstens $\frac{1}{2}\varepsilon$ beträgt, dem *Inneren* von Σ angehören, während alle Punkte von $\mathfrak{M}$, die von $\mathfrak{T}$ mindestens den Abstand $\frac{3}{2}\varepsilon$ haben, *außerhalb* von Σ liegen.*) In dem Falle, daß $\mathfrak{T}$ eine *zusammenhängende* Menge ist, besitzt die Figur Π einige einfache Eigenschaften, deren wir für das Folgende bedürfen, und die ich hierhersetze. $\mathfrak{M}$ heißt *Komplementärmenge* von $\mathfrak{T}$.

Wenn zunächst die *Komplementärmenge* $\mathfrak{M}$ ein *einziges* zusammenhängendes Gebiet darstellt, so kann es in Π nur ein *einziges äußeres Randpolygon* P_a geben, d. h. ein solches, dessen Äußeres zu $\mathfrak{M}$ gehört. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Menge $\mathfrak{T}$ innerhalb von P_a liegt, und daher zwei Polygone P_a dieser Art unmöglich sind. Aus der Konstruktionsart der Figur Π folgt nun weiter, daß innerhalb von P_a keine zwei Polygone liegen, von denen das eine das andere einschließt.

Ist $\mathfrak{T}$ eine solche zusammenhängende Menge, für die $\mathfrak{M}$ in *mehrere* Teilgebiete zerfällt, so läßt sich das Vorstehende unmittelbar auf das *äußere* Gebiet $\mathfrak{A}$ übertragen: Ist also Π_a derjenige Teil von Π, der in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, so besteht er ebenfalls aus einem einzigen äußeren Randpolygon P_a und einer endlichen Zahl einander ausschließender Polygone innerhalb von P_a. Diese können auch fehlen.

Ist dagegen $\mathfrak{J}$ ein *inneres* Gebiet, das zu $\mathfrak{M}$ gehört, ist Π_i die in $\mathfrak{J}$ enthaltene Teilfigur von Π und P_i irgend ein Polygon von Π_i, so gehört sein Inneres gemäß der Konstruktionsart von Π zu $\mathfrak{M}$; daher müssen je zwei zu Π_i gehörige Polygone P_i einander *ausschließen.*

Die große Mannigfaltigkeit der gestaltlichen Verhältnisse, die hier möglich sind, dürfte aus folgendem Beispiel erhellen, bei dem die Menge $\mathfrak{T}$ selbst ein einfaches Polygon ist.

Auf einer Geraden g (Fig. 2) denke man sich eine Folge $\{p_\nu\}$ natürlich geordneter Punkte p_ν, deren Grenzpunkt p sei, errichte in den Punkten p_ν nach oben Lote von der Länge λ_ν, die gegen Null konvergieren, und

*) Im Beitrag II, diese Ann. Bd. 59, S 138, ist $\frac{3}{2}\varepsilon$ durch ε ersetzt; es ist bequemer, die obige Definition von Π zu benutzen.

verbinde die Endpunkte von je zwei benachbarten Loten durch gleichschenklige Dreiecke, deren Höhen h_ν ebenfalls gegen Null konvergieren. Diese Figur spiegele man gegen die Gerade g, so bestimmen die sämtlichen Dreiecke ein einfaches Polygon P.*) Zieht man nun von innen Parallelen zu den Seiten

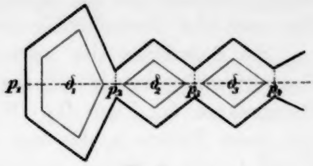

Fig. 2.

dieses Polygons im Abstand ε, so bestimmen sie ebenfalls eine approximierende Figur, die wir wieder Π nennen, die aber im allgemeinen in mehrere Polygone P_i zerfällt. Die Zahl dieser Polygone kann sogar mit abnehmendem ε über alle Grenzen wachsen, obwohl die von ihnen gebildete Figur Π gegen das eine einfache Polygon P konvergiert. Um dies zu erreichen, wähle man die Intervalle $\delta_\nu = p_\nu p_{\nu+1}$ so, daß

$$\delta_2 = \delta_3, \quad \delta_4 = \delta_5 = \delta_6, \quad \delta_7 = \delta_8 = \delta_9 = \delta_{10}, \cdots$$

ist und überdies $\Sigma \delta_\nu$ konvergiert. Ebenso wähle man

$$\lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10}, \cdots$$

$$h_2 = h_3, \quad h_4 = h_5 = h_6, \quad h_7 = h_8 = h_9 = h_{10}, \cdots$$

und kann nun durch geeignete Wahl der δ_μ, λ_μ, h_μ und von ε erreichen, daß in der mit ε konstruierten Figur Π ein Teilpolygon P_i auftritt, das zwischen zwei vorgegebenen benachbarten Punkten der Folge $\{p_\nu\}$ liegt. Ist δ' die Länge des zugehörigen Intervalles, und gibt es ϱ Intervalle δ_ν von der gleichen Länge δ', so gibt es auch mindestens $\varrho - 1$ gleiche Polygone P_i, die zu Π gehören. Die Zahl der Polygone, in die Π zerfällt, wächst also für limes $\varepsilon = 0$ über alle Grenzen.

§ 4.

Hilfssätze über Gebiete und Gebietsteilung.

Wir bedürfen einiger Sätze über die Zerlegung in Teilgebiete, die ein Gebiet $\mathfrak{M}$ durch *Wege* erfährt. Die Wege nehmen wir im folgenden immer so, daß *keine zwei sich kreuzen.* Daß sich dies für zwei Wege stets bewirken läßt, wurde früher bewiesen**); es ist leicht durch den Schluß von n auf $n+1$ zu zeigen, daß es auch für beliebig viele Wege richtig bleibt, was einer näheren Ausführung nicht bedarf. Würde man jedoch die Wege beliebig annehmen, so würden die Beweise teilweise recht schwerfällig werden. Ich ziehe deshalb vor, mich hier zunächst auf

*) In Fig. 2 ist es stark gezeichnet.

**) Beitrag II, § 1.

Wege *besonderer Art* zu beschränken; es wird sich in § 14 zeigen, daß eine sachliche Beschränkung des Beweisganges darin nicht enthalten ist.

Sei $\mathfrak{T}$ zunächst eine zusammenhängende Menge von der Art, daß die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ ein einziges Gebiet darstellt, und sei Q_ν das äußere Randpolygon der Figur Π_ν. Wir wählen dann die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, die von einem Punkte m, der zum Äußeren von Q_ν gehört, zu zwei Punkten t' und t'' von $\mathfrak{T}$ führen, insbesondere so, daß sie jedes Polygon Q_ν nur *einmal* kreuzen; es ist übrigens klar, daß ein jeder Weg, der von m zu einem Punkte t führt, dadurch in einen solchen Weg verwandelt werden kann, daß man auf Q_ν immer nur den letzten Kreuzungspunkt beibehält und diese Punkte entsprechend verbindet. Seien nun l_ν' und l_ν'' die Kreuzungspunkte von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ mit Q_ν. Sie zerlegen Q_ν in zwei Streckenzüge. Der eine von ihnen bestimmt mit den bezüglichen Teilen von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, nämlich $\mathfrak{l}_\nu' = m \cdots l_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu'' = m \cdots l_\nu''$ ein Polygon, dessen Inneres außerhalb von Q_ν liegt und daher zu $\mathfrak{M}$ gehört. Der zweite Streckenzug bestimmt mit den nämlichen Teilen von $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu''$ ein Polygon, dessen Inneres das Innere von Q_ν enthält und dessen Äußeres zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Das erste Polygon heiße J_ν, das zweite A_ν, und $\mathfrak{q}_\nu^i$ resp. $\mathfrak{q}_\nu^a$ seien die Streckenzüge von Q_ν, die ihnen angehören.

Konstruiert man das Polygon J_ν zu jeder Figur Π_ν, so ist J_ν Teilpolygon von $J_{\nu+1}$, und die J_ν bilden daher eine Folge $\{J_\nu\}$ *ausschließender* Polygone; gemäß § 1 bestimmen sie daher ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}$, das Teilgebiet von $\mathfrak{M}$ ist, und zu dessen Grenze $\mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ sowie diejenige zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{T}_i$ von $\mathfrak{T}$ gehört, die Grenzmenge aller Streckenzüge $\mathfrak{q}_\nu^i$ ist. Dagegen bilden die Polygone A_ν eine Folge $\{A_\nu\}$ *einschließender* Polygone; sie bestimmen daher ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{A}$, das ebenfalls Teilgebiet von $\mathfrak{M}$ ist, und zu dessen Grenze $\mathfrak{l}', \mathfrak{l}''$ und die zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}_a$ von $\mathfrak{T}$ gehört, die Grenzmenge aller Streckenzüge $\mathfrak{q}_\nu^a$ ist. Da jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ äußerer Punkt eines Polygons Q_ν ist, so ist er auch, falls er nicht etwa auf $\mathfrak{l}'$ oder $\mathfrak{l}''$ liegt, Punkt von $\mathfrak{J}$ oder von $\mathfrak{A}$; das Gebiet $\mathfrak{M}$ wird also, von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ abgesehen, durch $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ erschöpft. Das Gebiet $\mathfrak{J}$ liegt ganz im Endlichen.

Das Vorstehende überträgt sich leicht auf den Fall, daß die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ von m aus zu demselben Punkt t von $\mathfrak{T}$ führen.

Bezeichnen wir wieder durch $\mathfrak{T}_{ia}$ die gemeinsamen Grenzpunkte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, durch $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_a'$ diejenigen von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ allein, so hat man

$$\mathfrak{T}_i = \mathfrak{T}_{ia} + \mathfrak{T}_i', \quad \mathfrak{T}_a = \mathfrak{T}_{ia} + \mathfrak{T}_a'.$$

Da $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ nicht die volle Grenze von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ bilden, so kann $\mathfrak{T}_{ia}$ nicht Null sein. Solange $\mathfrak{T}$ eine Menge beliebiger Art ist, kann jedoch weiteres *nicht* ausgesagt werden, wie in § 1 hervorgehoben wurde. Die

Mengen $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_a'$ können Null sein, andererseits können $\mathfrak{T}_i$ resp. $\mathfrak{T}_a$ sogar mit $\mathfrak{T}$ identisch sein.*)

Wie leicht ersichtlich, bildet die Menge $\mathfrak{T}_{ai}$ mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zusammen diejenige geschlossene Kurve C, die gemäß § 2 durch die Folge ausschließender Polygone $\{J_\nu\}$ bestimmt wird. Daraus folgern wir noch, daß $\mathfrak{T}_{ia}$ *eine zusammenhängende Menge* ist. Ist nämlich P_ν' ein Polygon, das die Kurve C von innen im Abstand ε_ν approximiert, so kann man auf ihm je einen Punkt p_ν' und p_ν'' bestimmen, der von t' und t'' den kürzesten Abstand hat. Diese Punkte teilen P_ν' in zwei Streckenzüge, und man zeigt leicht, daß der eine von ihnen die beiden Wege $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu''$ als Grenzmenge hat. Der andere, der $\mathfrak{p}_\nu'$ heißen soll, hat daher $\mathfrak{T}_{ia}$ als Grenzmenge, womit die Behauptung erwiesen ist. Das gleiche kann mittels der Polygone Q_ν' geschlossen werden, die die Kurve C von außen approximieren; seien noch $\mathfrak{q}_\nu'$ diejenigen Streckenzüge der Polygone Q_ν', die ebenfalls gegen $\mathfrak{T}_{ia}$ konvergieren.

Hieraus ziehen wir noch eine wichtige Folgerung. Sei t irgend ein von t' und t'' verschiedener Punkt von $\mathfrak{T}_{ia}$, so kann man um ihn ein Quadrat $\mathfrak{q}$ mit der Seite η so legen, daß t' und t'' außerhalb von $\mathfrak{q}$ bleiben; sei dann $\mathfrak{T}_{ia}'$ diejenige Teilmenge von $\mathfrak{T}_{ia}$, die nach Abzug der *innerhalb* $\mathfrak{q}$ liegenden Punkte von $\mathfrak{T}_{ia}$ übrig bleibt. Werden nun die Polygone P_ν' und Q_ν' so gewählt, daß $\varepsilon_\nu < \frac{1}{4}\eta$ ist, so wird $\mathfrak{q}$ sowohl den Streckenzug $\mathfrak{p}_\nu'$ wie den Streckenzug $\mathfrak{q}_\nu'$ kreuzen. Man kann daher einen Weg legen, der zugleich innerhalb von $\mathfrak{q}$ und innerhalb des durch P_ν' und Q_ν' gebildeten Ringgebietes verläuft, und dieser teilt $\mathfrak{T}_{ia}'$ in *getrennte* Teilmengen, deren jede höchstens einen der beiden Punkte t' und t'', aber nicht beide zugleich enthält.

Die vorstehenden Betrachtungen übertragen wir zunächst auf den Fall, daß die Menge $\mathfrak{T}$ eine eigentliche Gebietsteilung bewirkt, und daß $\mathfrak{M}$ deren äußeres Gebiet $\mathfrak{A}$ ist. Genau wie vorstehend kann man mittels zweier Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ und mittels der von außen approximierenden Polygone Q_ν ein im Endlichen liegendes Gebiet $\mathfrak{J}'$ und ein Gebiet $\mathfrak{A}'$ definieren, die zusammen das Gebiet $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ abgesehen, ausmachen; und zwar wird $\mathfrak{J}'$ wieder durch Polygone J_ν bestimmt, die ebenso definiert sind, wie oben, und $\mathfrak{A}'$ durch Polygone A_ν. Auch geht wieder in die Grenze von $\mathfrak{J}'$ und von $\mathfrak{A}'$ je eine zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{T}_i'$ resp. $\mathfrak{T}_a'$ derjenigen Menge $\mathfrak{T}_a$ ein, die volle Grenze des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist.

*) Wird von der Kurve $y = \sin 1/x$ nur ein Stück beibehalten, das den Werten $0 < x \leqq x_0$ entspricht, und dies um die y-Achse zwischen den Punkten $+1$ und -1 vermehrt, und werden diese Punkte mit einem Punkte m durch Wege verbunden, so ist entweder $\mathfrak{T}_i$ oder $\mathfrak{T}_a$ mit $\mathfrak{T}$ identisch.

Dagegen kann man in diesem Fall *nicht* mehr folgern, daß $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ durch je eine geschlossene Kurve begrenzt werden. Ein Beispiel erhält man, wenn man in Fig. 1 einen Punkt von $\mathfrak{A}$ so mit zwei Ecken des Quadrats verbindet, daß die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ das Dreieck umschließen. Andererseits aber folgt aus § 2, daß durch die Folge ausschließender Polygone $\{J_\nu\}$ und daher auch durch die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ doch eine geschlossene Kurve definiert wird, der außer $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ noch eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{T}_{12}$ von $\mathfrak{T}_a$ angehört, und deren Inneres das Gebiet $\mathfrak{J}'$ enthält; auch zeigt man wieder, wie vorher, daß $\mathfrak{T}_{12}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}_i'$ ist. In dem eben genannten Beispiel ist $\mathfrak{T}_{12}$ das bezügliche Stück des Quadratumfangs.

Ist ferner $\mathfrak{M}$ mit einem inneren Gebiet $\mathfrak{J}$ einer solchen Gebietsteilung identisch, und ist m wieder ein Punkt von $\mathfrak{J}$, so kann man die Figur Π_ν so wählen, daß m innerhalb eines der inneren Randpolygone P_ν liegt, und die analogen Schlüsse ziehen. Sind jetzt $\mathfrak{p}_\nu'$ und $\mathfrak{p}_\nu''$ die Teile, in die P_ν durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zerfällt, so bestimmen sie in diesem Falle mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zwei Polygone P_ν' und P_ν'', die Teilpolygone von P_ν sind, und deren Inneres zu $\mathfrak{J}$ gehört. Diese Polygone bilden jetzt *je eine ausschließende* Polygonfolge und bestimmen daher zwei im Endlichen liegende Gebiete $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$, die mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zusammen das Gebiet $\mathfrak{J}$ ausmachen.

Auch hier kann man *nicht* folgern, daß $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ durch geschlossene Kurven begrenzt werden. Andererseits bestimmen aber die Polygone P_ν' und P_ν'' gemäß § 2 wieder je eine geschlossene Kurve, der $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, sowie je eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{T}_{12}'$ resp. $\mathfrak{T}_{12}''$ von $\mathfrak{T}$ angehören, und zu deren Innerem $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ gehören. Auch sind wieder $\mathfrak{T}_{12}'$ und $\mathfrak{T}_{12}''$ *zusammenhängende* Teilmengen der zusammenhängenden Mengen $\mathfrak{T}_i'$ und $\mathfrak{T}_i''$, die abgesehen von $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die Grenzen von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{J}''$ ausmachen.

In allen Fällen wird also durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ einerseits ein gewisses Teilgebiet des Gebietes $\mathfrak{M}$ definiert, dem $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ angehören, andererseits auch eine gewisse geschlossene Kurve, so daß zu den Grenzen dieses Gebiets außer $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ stets je eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ gehört.

Da $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ zusammen einen das Gebiet $\mathfrak{M}$ durchziehenden Weg darstellen, so gilt der vorstehende Satz auch für solche Wege.

Endlich übertragen sich auch die oben für $\mathfrak{T}_{ia}$ abgeleiteten Folgerungen über ihre Zerfällung in *getrennte* Teilmengen auf $\mathfrak{T}_{12}$ und $\mathfrak{T}_{12}'$ resp. $\mathfrak{T}_{12}''$. Für $\mathfrak{T}_a'$, $\mathfrak{T}_i'$, $\mathfrak{T}_i''$ brauchen sie jedoch nicht zu gelten.

§ 5.

Erreichbare und nicht erreichbare Punkte.

Sei $\mathfrak{M}$ irgend ein zusammenhängendes Gebiet und t einer seiner *Grenzpunkte*. Wenn dann von einem Punkt m von $\mathfrak{M}$ ein *einfacher Weg* zu t führt, so gilt dies für *jeden* Punkt von $\mathfrak{M}$, und t soll *erreichbar* für

$\mathfrak{M}$ heißen. Im anderen Fall heißt t *nicht erreichbar* für $\mathfrak{M}$. Ich lasse zunächst einige Beispiele folgen.

1) Man konstruiere die sämtlichen Punkte (Fig. 3)

$$x = \frac{1}{\nu}, \quad y = (-1)^\nu \frac{\alpha}{\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots;$$

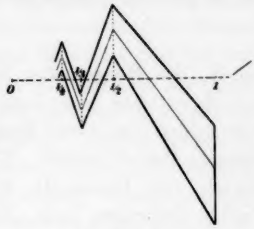

Fig. 3.

wo in der Figur $\alpha < 1$ gewählt worden ist, und verbinde je zwei konsekutive, die zu den Werten ν und $\nu + 1$ gehören, durch Strecken. Diese Strecken bilden einen einfachen Weg mit dem Nullpunkt als Grenzpunkt. Zwei analoge einfache Wege konstruiere man mit den Punkten

$$x = \frac{1}{2\nu}, \quad y = \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2\nu+1}, \quad y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu+1}$$

resp. mit den Punkten

$$x = \frac{1}{2\nu}, \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{2\nu+1}, \quad y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{2\nu+1},$$

so liefern diese Streckenzüge zusammen mit dem im Punkt $x = 1$ errichteten Lot ein einfaches Polygon. In ihm ist der Nullpunkt ein erreichbarer Punkt, und der zu ihm führende Weg besteht *notwendig* aus unendlich vielen Strecken.

2) Über der Einheitsstrecke zeichne man die Ordinaten der bekannten Funktion $f(x)$, die so definiert ist, daß für die rationalen Werte

$$x = \frac{p}{q}, \quad f(x) = \frac{1}{q}$$

ist, während für alle irrationalen Punkte $f(x) = 0$ ist; p und q sind dabei relativ prim. Ferner konstruiere man das Quadrat $\mathfrak{q}$ über der Einheitsstrecke. Die so bestimmte Punktmenge $\mathfrak{T}$ teilt die Ebene in zwei Gebiete, deren eines im Innern von $\mathfrak{q}$ liegt, und es sind, wie später bewiesen wird, *alle* Punkte der Einheitsstrecke auch für das *Innere* des Quadrats *erreichbare* Punkte. Der zu irgend einem von ihnen führende Weg darf freilich an keine der gezeichneten Ordinaten anstoßen; er vermag dies, indem er unzählig oft bald nach rechts bald nach links hin und her züngelt.*)

3) Auf der Seite s eines Quadrats $\mathfrak{q}$ nehme man einen Punkt p an, und bestimme links und rechts von ihm eine Punktfolge $\{p_\nu\}$ resp. $\{p_\nu'\}$, die p als einzigen Grenzpunkt besitzt. Dann errichte man in den Punkten p_ν und p_ν' auf s im Inneren des Quadrats Lote konstanter Länge, die kleiner als die Quadratseite sind, so bilden diese Lote im Verein mit $\mathfrak{q}$ wieder eine

*) Man kann sogar jedes Lot durch ein Büschel von Strecken gleicher Länge ersetzen.

Punktmenge $\mathfrak{T}$, die eine Gebietsteilung bewirkt, und es ist für das Innere von $\mathfrak{q}$ jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ erreichbar, mit Ausnahme des Punktes p.

4) Man gehe von einer linearen Intervallmenge aus, die eine nirgends dichte perfekte Menge $\mathfrak{S}$ bestimmt, und es sei

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_r + \mathfrak{S}_g,$$

wo $\mathfrak{S}_r$ die Menge aller Intervallendpunkte bedeutet. In allen Punkten von $\mathfrak{S}$ errichte man Lote gleicher Länge nach derselben Seite. Diese Lote bilden eine ebene Menge $\mathfrak{T}$, deren Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ aus einem einzigen Gebiet besteht. $\mathfrak{T}$ ist eine Menge desjenigen Typus, den ich im Beginn von Beitrag II, § 4 untersucht habe. Dann sind alle *inneren* Punkte derjenigen Lote, die in einem Punkte von $\mathfrak{S}_g$ errichtet sind, *unerreichbar*, während alle übrigen Punkte von $\mathfrak{T}$ *erreichbar* sind.

5) Ich gebe endlich ein Beispiel, das zeigt, daß ein Punkt t, der gemeinsamer Grenzpunkt zweier getrennter Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ ist, für das eine erreichbar, für das andere unerreichbar sein kann (Fig. 4)*). Ist nämlich x_0 irgend ein Punkt, in dem die Kurve $y = \sin\frac{1}{x}$ die positive x-Achse trifft, ist c_0 das Stück dieser Kurve, das den Werten $0 < x \leqq x_0$ entspricht, und verbindet man den Punkt x_0 mit dem Punkt $y = +1$ der y-Achse durch einen Linienzug $\mathfrak{l}$, der das Kurvenstück c_0 nicht kreuzt, so bestimmen $\mathfrak{l}$, c_0 und das Stück der y-Achse zwischen $+1$ und -1 eine perfekte Menge $\mathfrak{T}$, die die Ebene in zwei Gebiete spaltet, und für das eine sind die Punkte der y-Achse zwischen -1 und $+1$ erreichbar, für das andere nicht.

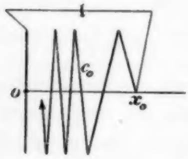

Fig. 4.

Die im folgenden über erreichbare Punkte abzuleitenden Sätze werden sich daher im allgemeinen immer nur auf ein *einziges Gebiet und seine Grenzpunkte* beziehen können. Punkte die für *jedes* Gebiet oder Teilgebiet, zu dessen Grenzen sie gehören können, erreichbar sind, sollen *allseitig erreichbar* genannt werden. Für sie beweisen wir den Satz:

Sind alle Punkte einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar und ist ihre Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ zusammenhängend, so kann man zwei Teilmengen von $\mathfrak{T}$ angeben, die $\mathfrak{T}$ erschöpfen, aber nur einen Punkt gemein haben.

Hierzu schicke ich folgende Bemerkung voraus. Zieht man von m zu einem Punkt t von $\mathfrak{T}$ zwei Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, so daß kein Punkt von $\mathfrak{T}$ außerhalb des von ihnen gebildeten Polygons liegt, so soll es ein *einschließendes Wegpolygon* heißen. Man sieht leicht, daß einschließende Wegpolygone für jeden Punkt der Menge $\mathfrak{T}$ existieren, und daß sie so gezeichnet

*) Die Figur ist nur schematisch gezeichnet.

werden können, daß jeder bereits vorhandene Weg, der von m zu einem von t verschiedenen Punkt von $\mathfrak{T}$ führt, innerhalb dieses Polygons verläuft.

Nun seien t' und t'' irgend zwei Punkte von $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{l}'$ resp. $\mathfrak{l}''$ zwei von m zu ihnen führende Wege. Diese Wege bestimmen gemäß § 3 zwei Teilgebiete von $\mathfrak{M}$, die wir jetzt $\mathfrak{M}_{12}'$ und $\mathfrak{M}_{12}''$ nennen, und es gibt Punkte von $\mathfrak{T}$, die gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{M}_{12}'$ und $\mathfrak{M}_{12}''$ sind und die wir durch $\mathfrak{T}_{12}$ bezeichnen wollen; einer von ihnen sei t_1. $\mathfrak{M}_{12}'$ sei das ganz im Endlichen liegende Gebiet. Da alle Punkte von $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar sind, so können wir von m zu t_1 in $\mathfrak{M}_{12}'$ einen Weg $\mathfrak{l}_1$ legen, ebenso in $\mathfrak{M}_{12}''$ zwei Wege $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$, die ein einschließendes Wegpolygon bilden; gemäß dem Obigen liegen dann $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$ und daher auch $\mathfrak{l}_1$ innerhalb dieses Polygons. Daher bilden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1'$, ebenso $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_1''$ zwei einfache Polygone P' und P'', die außerhalb voneinander liegen. Sie enthalten daher zwei Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$, die nur den Punkt t_1 gemeinsam haben. Andererseits ist jede von ihnen notwendig zusammenhängend. Wäre z. B. die Menge $\mathfrak{T}'$ nicht zusammenhängend, so zerfiele sie in zwei perfekte Mengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$, und es könnte nur eine von ihnen den Punkt t_1 enthalten. Daher könnte die andere in ein innerhalb P' liegendes Polygon eingeschlossen werden; und es wäre auch $\mathfrak{T}$ selbst nicht zusammenhängend.

§ 6.

Einfache Punktfolge und Ausbiegung.

Sei für ein Gebiet $\mathfrak{M}$

$$\{t^{(\nu)}\} \equiv t', t'', \cdots, t^{(\nu)}, \cdots$$

eine Menge erreichbarer Punkte, die gegen t als ihren einzigen Grenzpunkt in der Weise konvergieren, daß

$$\varrho(t, t^{(\nu+1)}) < \varrho(t, t^{(\nu)})$$

ist.*) Alsdann verbinde man einen Punkt m mit den Punkten $t^{(\nu)}$ durch Wege $\mathfrak{l}^{(\nu)}$, die einander nicht kreuzen, was gemäß § 3 stets ausführbar ist, und schlage um m einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Kreis $\mathfrak{k}$. Dieser Kreis kann von jedem Weg $\mathfrak{l}^{(\nu)}$ nur in einer endlichen Zahl von Punkten geschnitten werden, man kann aber die Wege $\mathfrak{l}^{(\nu)}$ nötigenfalls auch so abändern, daß sie, ohne einander zu kreuzen, $\mathfrak{k}$ nur je einmal schneiden; sei $k^{(\nu)}$ der Kreuzungspunkt. Die Punkte $k^{(\nu)}$ haben mindestens einen auf $\mathfrak{k}$ liegenden Grenzpunkt k. Jedenfalls können wir unendlich viele von den Punkten $k^{(\nu)}$ auswählen, die gegen k von derselben Seite her konvergieren; seien insbesondere

$$k^{(i_1)}, k^{(i_2)}, \cdots, k^{(i_\nu)}, \cdots$$

*) Unter $\varrho(p, q)$ verstehe ich den Abstand der Punkte p und q. Vgl. Beitrag II, § 1.

solche Punkte dieser Art, daß jeder näher an k liegt, als alle vorhergehenden.

Die Indizes $i_1, i_2, \cdots, i_\nu \cdots$ brauchen nicht wachsende Zahlenwerte zu haben. Es gibt aber einen ersten Index i', so daß $i' > i_1$ ist, auf i' folgt ebenso ein erster Index i'', so daß $i'' > i'$ ist usw., und es kann die so definierte Indizesfolge nicht abbrechen. Die zugehörigen Punkte von $\mathfrak{k}$ bezeichnen wir nun durch

$$k_1, k_2, \cdots, k_\mu, \cdots;$$

ihnen entsprechen die Punkte

$$t_1, t_2, \cdots, t_\mu, \cdots$$

und die Wege

$$\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \cdots, \mathfrak{l}_\mu, \cdots,$$

und diese sind so definiert, daß k_ν zwischen $k_{\nu-1}$ und $k_{\nu+1}$ liegt, also auch $\mathfrak{l}_\nu$ zwischen $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$. Dies führt zu folgendem Satz:

Jeder Punkt t, der zur Grenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes $\mathfrak{M}$ gehört, und Grenzpunkt erreichbarer Punkte von $\mathfrak{T}$ ist, kann in der Weise durch eine Folge $\{t_\nu\}$ erreichbarer Punkte approximiert werden, daß von den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$, die t_ν mit demselben Punkt m von $\mathfrak{M}$ verbinden, immer $\mathfrak{l}_\nu$ zwischen $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ liegt, wenn

$$\varrho(t, t_{\nu-1}) < \varrho(t, t_\nu) < \varrho(t, t_{\nu+1})$$

ist.

Eine solche Punktfolge soll eine *natürlich geordnete* oder eine *einfache* Punktfolge heißen.

Für die Ableitung der Sätze über erreichbare Punkte bedürfen wir noch eines letzten wichtigen Begriffes. Seien nämlich t' und t'' irgend zwei für $\mathfrak{M}$ erreichbare Punkte von $\mathfrak{T}$, und $\mathfrak{w}$ ein in $\mathfrak{M}$ von t' zu t'' gehender Weg. Sei ferner*)

$$\varrho_{ma}(t', \mathfrak{w}) = h', \quad \varrho_{ma}(t'', \mathfrak{w}) = h'',$$

und sei h die größere der beiden Größen h' und h''. Denkt man sich nun *alle* Wege $\mathfrak{w}$, die t' mit t'' in der angegebenen Art verbinden, so gibt es für die zugehörigen Größen h eine *untere Grenze* η, die wir als die zu t' und t'' gehörige *Ausbiegung in bezug auf* $\mathfrak{M}$ bezeichnen wollen. In ähnlicher Weise definieren wir die zu *einem und demselben* Punkt t gehörige Ausbiegung. Sie kommt freilich nur für gewisse Punkte t in Frage. Zeichnen wir nämlich in $\mathfrak{M}$ einen Rückkehrweg $\mathfrak{r}$, der in t seinen Anfangspunkt und Endpunkt hat, und setzen

$$\varrho_{ma}(\mathfrak{r}, t) = g,$$

so wird die untere Grenze aller g ersichtlicherweise den Wert Null haben. Wir nehmen nun aber an, daß es Rückkehrwege $\mathfrak{r}$ gibt, die eine zusammen-

*) $\varrho_{ma}(t', \mathfrak{w})$ bezeichnet die *größte* Entfernung zwischen t' und $\mathfrak{w}$.

hängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ einschließen, der t selbst angehört, und fassen insbesondere diejenigen Rückkehrwege ins Auge, die die *umfassendste* derartige Teilmenge $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{T}$ einschließen; darunter ist genauer zu verstehen, daß, falls wir

$$\mathfrak{T} = t + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2$$

setzen, *jeder* Punkt von $\mathfrak{T}_1$ aber *kein* Punkt von $\mathfrak{T}_2$ innerhalb eines solchen Rückkehrweges liegen kann, der von t ausgeht.

Für die so definierten Rückkehrwege hat g eine von Null verschiedene untere Grenze γ; sie soll die *zu t selbst gehörige* Ausbiegung heißen. Nur wenn Rückkehrwege dieser Art für t nicht existieren, ist $\gamma = 0$.

Eine unmittelbare Folgerung der obigen Begriffe ergibt sich wie folgt. Seien wieder t' und t'' zwei für den Punkt m erreichbare Punkte, und $\mathfrak{l}'$ resp. $\mathfrak{l}''$ zwei zu ihnen führende Wege. Durch sie wird gemäß § 4 ein im Endlichen enthaltenes Teilgebiet $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{M}$ und eine Teilmenge $\mathfrak{T}_i'$ von $\mathfrak{T}$ definiert, die mit $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die volle Grenze von $\mathfrak{J}'$ bildet. Gibt es zwei solche Gebiete, so kommt doch, falls t' und t'' zwei Punkte t_ν und $t_{\nu+1}$ der Punktfolge sind, nur eines in Frage. In diesem Gebiet $\mathfrak{J}'$ gibt es Wege $\mathfrak{w}$, die von t' zu t'' führen, und es leuchtet ein, daß die oben mit h bezeichnete Größe für hinlänglich großes ν nur für solche Wege $\mathfrak{w}$ in Betracht kommt, die innerhalb $\mathfrak{J}'$ verlaufen. Daraus folgt dann weiter, daß der Menge $\mathfrak{T}_i'$ Punkte zugehören müssen, deren Entfernung von t' resp. t'' beliebig wenig von η verschieden ist; was einer ausführlicheren Darlegung nicht bedarf.

§ 7.

Sätze über erreichbare Punkte.

Weder die erreichbaren noch die unerreichbaren Punkte bilden abgeschlossene Mengen. Im vierten Beispiel von § 5 ist jeder Endpunkt jedes in einem Punkt von $\mathfrak{S}_g$ errichteten Lotes erreichbar, während die inneren Punkte dieser Lote unerreichbar sind. Daß andrerseits ein unerreichbarer Punkt Grenzpunkt erreichbarer Punkte sein kann, ist nur ein spezieller Fall des folgenden Satzes:

Jeder Punkt der Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes $\mathfrak{M}$, der nicht etwa ein isolierter Punkt der Menge $\mathfrak{T}$ ist, ist Grenzpunkt erreichbarer Punkte.

Dieser Satz, der auch dahin ausgesprochen werden kann, daß die für $\mathfrak{M}$ erreichbaren Punkte *überall dicht in* $\mathfrak{T}$ liegen, läßt sich folgendermaßen beweisen.

Sei t der bezügliche Punkt von $\mathfrak{T}$, so liegen in jeder Nähe von ihm Punkte von $\mathfrak{M}$. Sei m ein solcher Punkt von $\mathfrak{M}$, daß $\varrho(m, t) < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so lege man um t ein durch m gehendes Quadrat $\mathfrak{q}$. Nun sind zwei Fälle

zu unterscheiden. Enthält der Umfang $\mathfrak{q}$ Punkte von $\mathfrak{T}$, so gibt es auf $\mathfrak{q}$ ein größtes m einschließendes Intervall, dessen innere Punkte ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehören, und jeder seiner Endpunkte ist ein Punkt t', der von m erreichbar ist, und für den $\varrho(t', t) < \varepsilon$ ist.*) Enthält jedoch $\mathfrak{q}$ keine Punkte von $\mathfrak{T}$, so verkleinere man $\mathfrak{q}$ in der Weise, daß t sein Mittelpunkt bleibt und seine Seiten ihre Richtung behalten;**) es gibt dann, da t kein isolierter Punkt von $\mathfrak{T}$ ist, eine erste Lage $\mathfrak{q}'$ des sich zusammenziehenden Quadrats, die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Andrerseits enthält der Umfang von $\mathfrak{q}'$ notwendig auch Punkte von $\mathfrak{M}$, da sonst t nicht zur Grenze von $\mathfrak{M}$ gehören würde. Ist m' ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Punkt von $\mathfrak{q}'$, so kann man zu ihm wie oben einen Punkt t' von $\mathfrak{q}'$ bestimmen, so daß $\varrho(t, t') < \varepsilon$ und zugleich t' für m' also auch für m erreichbar ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Sei nun $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge, sei η_ν die zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehörige Ausbiegung und γ_ν die zu t_ν selbst gehörige Ausbiegung, so ist zu unterscheiden, ob η_ν und γ_ν mit wachsenden ν gegen Null konvergieren oder nicht; hiermit hängt nämlich die Eigenschaft von t, erreichbar oder unerreichbar zu sein, enge zusammen. Dies bedarf jedoch einer ausführlichen Untersuchung.

Wir leiten zunächst einige Sätze ab, bei denen wir über die Natur der Menge $\mathfrak{T}$, die Grenze des Gebietes $\mathfrak{M}$ ist, keinerlei Voraussetzungen machen, und zwar beweisen wir zuerst den folgenden Satz:

Ist ein nicht isolierter Punkt t für $\mathfrak{M}$ erreichbar, so läßt sich zu ihm eine einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ erreichbarer Punkte bestimmen, deren Ausbiegungen gegen Null konvergieren.

Ist nämlich $\mathfrak{l}$ der zu t führende Weg, so sei m_ν ein solcher Punkt von $\mathfrak{l}$, daß $\varrho(m_\nu, t) < \frac{1}{2}\sigma_\nu$ ist; ferner sei $\mathfrak{l}_\nu$ der von m_ν zu t führende Teil des Weges $\mathfrak{l}$. Man lege wieder, wie oben, um t als Mitte ein Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$, das durch m_ν geht. Gibt es auf ihm Punkte von $\mathfrak{T}$, so gibt es auch ein größtes m_ν einschließendes Intervall, das zu $\mathfrak{M}$ gehört. Jeder seiner Endpunkte t_ν ist wieder ein erreichbarer Punkt, und es ist $\varrho(t, t_\nu) < \sigma_\nu$. Als Weg $\mathfrak{w}_\nu$ kann man daher $\mathfrak{l}_\nu$ nebst dem Intervall $m_\nu \cdots t_\nu$ von $\mathfrak{q}_\nu$ wählen, woraus in diesem Fall die Behauptung folgt. Falls aber auf $\mathfrak{q}_\nu$ kein Punkt von $\mathfrak{T}$ liegt, so möge sich $\mathfrak{q}_\nu$ wie oben um t zusammenziehen; es gibt dann eine Grenzlage, die mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ und überdies mindestens einen Punkt m_ν' von $\mathfrak{l}$ enthält, mit dem man ebenso operieren kann, wie soeben mit m_ν.

Wie das dritte Beispiel von § 5 zeigt, trifft die unmittelbare Um-

*) Die beiden Endpunkte des Intervalls können auch zusammenfallen.

**) Vgl. Beitrag I und II, diese Ann. Bd. 58, S. 207 und Bd. 59, S. 132.

kehrung des Satzes nicht zu. Denn sowohl die Folge $\{p_\nu\}$ wie die Folge $\{p_\nu'\}$ dieses Beispiels ist eine einfache Folge und besteht überdies aus lauter erreichbaren Punkten und doch ist p selbst unerreichbar. Wenn dagegen bei *jeder* einfachen Folge erreichbarer Punkte die zugehörigen Ausbiegungen η_ν gegen Null konvergieren, so muß auch t selbst ein erreichbarer Punkt sein. Dies läßt sich folgendermaßen beweisen.

Sei $\{t_\nu\}$ irgend eine derartige Punktfolge, so zeigen wir zunächst, daß die zu den Punkten t_ν selbst gehörigen Ausbiegungen γ_ν gegen Null konvergieren. Sei nämlich t_ν ein Punkt, für den $\gamma_\nu > 0$ ist, so zeichnen wir zunächst den bezüglichen von t_ν ausgehenden Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$, verbinden dann m mit $t_{\nu-1}$ und $t_{\nu+1}$ durch die Wege $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ und ziehen die Wege $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$, die $t_{\nu-1}$ mit t_ν und t_ν mit $t_{\nu+1}$ verbinden. Alle diese Wege lassen sich so wählen, daß sie erstens einander nicht kreuzen und daß zweitens die Wege $\mathfrak{l}_{\nu-1}, \mathfrak{l}_{\nu+1}, \mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ ein Polygon $\mathfrak{p}_\nu$ bestimmen, in dem der Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$ enthalten ist, wie man leicht zeigt. Wir ziehen endlich noch von $t_{\nu-1}$ zu $t_{\nu+1}$ einen Weg $\mathfrak{w}_\nu'$, der ebenfalls innerhalb von $\mathfrak{p}_\nu$ verläuft, aber $\mathfrak{r}_\nu$ nicht kreuzt. Setzt man nun

$$\varrho_{ma}(\mathfrak{w}_\nu', t_\nu) = h_\nu', \quad \varrho_{ma}(\mathfrak{w}_\nu', t_{\nu-1}) = h_{\nu-1}', \quad \varrho_{mr}(\mathfrak{w}_\nu', t_{\nu+1}) = h_{\nu+1}',$$
$$\varrho_{ma}(\mathfrak{r}_\nu, t_\nu) = g_\nu, \qquad \varrho(t_{\nu-1}, t_\nu) = r_{\nu-1}, \qquad \varrho(t_{\nu+1}, t_\nu) = r_{\nu+1}$$

so bestehen, wie leicht ersichtlich, die Relationen

$$h_\nu' > g_\nu, \quad h_{\nu-1}' > h_\nu' - r_{\nu-1}, \quad h_{\nu+1}' > h_\nu' - r_{\nu+1}.$$

Hieraus kann aber die Behauptung leicht gefolgert werden. Falls nämlich γ_ν nicht gegen Null konvergierte, so gäbe es unter den Indizes ν unendlich viele Werte μ, so daß $\gamma_\mu > \gamma > 0$ bliebe. Da aber $\lim\limits_{\nu=\infty} r_\nu = 0$ ist, so müßte gemäß den obigen Relationen ersichtlicherweise auch h_μ' und ebenso $h_{\mu-1}'$ und $h_{\mu+1}'$ für alle Werte μ oberhalb einer positiven Größe bleiben und dasselbe würde auch von den unteren Grenzen dieser Größen gelten. Dies widerspricht aber der Voraussetzung. Denn alsdann könnte man aus der Punktfolge $\{t_\nu\}$ eine einfache Folge $\{t_\nu'\}$ so auswählen, daß ihr unendlich viele Punktepaare $t_{\mu-1}$ und $t_{\mu+1}$ als konsekutive Punkte angehörten, und erhielte so eine Punktfolge, für die das zugehörige η_ν' nicht gegen Null konvergierte.

Nunmehr konstruieren wir einen zu t führenden Weg folgendermaßen. Wir gehen wieder zur Punktfolge $\{t_\nu\}$ zurück, konstruieren zu jedem Punkt t_ν, für den $\gamma_\nu > 0$ ist, einen Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$, so daß

$$g_\nu = \varrho_{ma}(\mathfrak{r}_\nu, t_\nu) < \gamma_\nu + \varepsilon_\nu$$

ist, und alle $\mathfrak{r}_\nu$ außerhalb voneinander liegen, und legen alsdann um jeden Punkt t_ν ein Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$ so, daß auch diese Quadrate außerhalb von-

einander liegen; um dies zu erreichen, genügt es, die Seite δ_ν dieses Quadrats so zu wählen, daß

$$\delta_\nu < \frac{1}{4}\,\varrho_{mi}(t_\nu, t_\lambda)^{*})$$

ist, wo t_λ ein beliebiger Punkt der Punktfolge $\{t_\nu\}$ ist, was stets möglich ist Dieses Quadrat kreuzt die oben konstruierten Wege $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{w}_\nu$ und den eventuellen Rückkehrweg $\mathfrak{r}_\nu$. Läuft man dann von $t_{\nu-1}$ auf $\mathfrak{w}_{\nu-1}$ bis zum letzten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{q}_\nu$, dann auf $\mathfrak{q}_\nu$ innerhalb $\mathfrak{p}_\nu$ bis zum ersten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{r}_\nu$, weiter auf $\mathfrak{r}_\nu$ von diesem Punkt bis zum letzten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{q}_\nu$, und zwar ebenfalls innerhalb $\mathfrak{p}_\nu$, weiter auf $\mathfrak{q}_\nu$ wiederum innerhalb $\mathfrak{p}_\nu$ bis zum ersten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{w}_\nu$, endlich auf $\mathfrak{w}_\nu$ bis zum ersten Kreuzungspunkt mit $\mathfrak{q}_{\nu+1}$ usw., so stellen diese Streckenzüge einen einfachen Weg dar, der von $t_{\nu-1}$ zum Punkt t führt. Schlägt man nämlich um t einen Kreis mit dem Radius σ, und wählt N so, daß für $\nu > N$

$$\varrho(t, t_\nu) < \frac{1}{4}\sigma, \quad \delta_\nu < \frac{1}{4}\sigma, \quad \eta_\nu < \frac{1}{4}\sigma, \quad \gamma_\nu < \frac{1}{4}\sigma, \quad \varepsilon_\nu < \frac{1}{4}\sigma$$

ist, so liegen für alle diese Werte ν sämtliche soeben konstruierten Wegstücke innerhalb dieses Kreises. Daraus folgt, daß t der einzige Grenzpunkt der benutzten Streckenzüge ist. Also folgt:

Wenn für einen Punkt t jede gegen ihn konvergierende einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ erreichbarer Punkte die Eigenschaft hat, daß ihre Ausbiegungen η_ν gegen Null konvergieren, so ist t selbst ein erreichbarer Punkt.

Auch dieser Satz ist nicht umkehrbar. Es gibt erreichbare Punkte, zu denen man einfache Punktfolgen $\{t_\nu\}$ konstruieren kann, deren Ausbiegungen η_ν nicht gegen Null konvergieren; das Beispiel 5) liefert solche Punkte. Jeder Punkt der y-Achse zwischen -1 und $+1$ gehört zu ihnen, falls wir $\mathfrak{T}$ als Grenze des sich ins Unendliche erstreckenden Gebietes betrachten. Von links ist er erreichbar, von rechts aber nicht; als bezügliche einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ kann man den Schnitt von $\mathfrak{T}$ mit einer Parallelen zur x-Achse wählen. Falls man also der Menge $\mathfrak{T}$, die Gebietsgrenze von $\mathfrak{M}$ ist, ihre volle Allgemeinheit läßt, lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für ihre Erreichbarkeit *nicht* aufstellen. Dies bleibt auch bestehen, wenn wir $\mathfrak{T}$ als zusammenhängende Menge allgemeinster Art nehmen, und das letzte Beispiel zeigt sogar, daß es auch dann noch der Fall ist, wenn wir $\mathfrak{T}$ als geschlossene Kurve wählen. Aus diesem Grunde wollen wir die Betrachtung der allgemeineren Mengen $\mathfrak{T}$ hiermit verlassen und zur Erörterung der einfachen geschlossenen Kurve übergehen. Erst für sie bestehen wieder präzisere Resultate. Andrerseits

*) $\varrho_{mi}(t_\nu, t_\lambda)$ bezeichnet die untere Grenze aller Abstände $\varrho(t_\nu, t_\lambda)$.

schienen die vorstehenden allgemeinen Untersuchungen deshalb notwendig zu sein, weil durch sie die nun folgende Beschränkung auf einfache Kurven ihre Begründung erhält.

§ 8.

Einige Eigenschaften der einfachen geschlossenen Kurven.

Den Begriff der *geschlossenen Kurve* habe ich im zweiten Beitrag ausführlich erörtert. Eine zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}$ heißt *geschlossene Kurve*, wenn sie die Ebene so in zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ trennt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ ist. Eine solche Kurve heißt insbesondere *einfach*, falls jeder ihrer Punkte sowohl für $\mathfrak{J}$, wie für $\mathfrak{A}$ erreichbar ist. Für sie ist, wie aus den Sätzen von § 4 folgt, jeder Punkt auch *allseitig* erreichbar. Endlich heißt jede zusammenhängende Teilmenge von ihr ein einfacher *Kurvenbogen*.

Bei einer einfachen geschlossenen Kurve vereinfachen sich die in § 4 abgeleiteten Resultate. Für sie fällt nämlich, wie aus ihrer Definition unmittelbar folgt, die dort eingeführte Unterscheidung zwischen den durch die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ bestimmten Teilgebieten von $\mathfrak{M}$ und den durch sie bestimmten geschlossenen Kurven weg.

Wir beweisen zunächst noch, daß die in § 4 betrachteten Teilmengen $\mathfrak{T}_{12}$ resp. $\mathfrak{T}_{12}'$ und $\mathfrak{T}_{12}''$, die dort durch zwei Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ definiert wurden, durch die Punkte t' und t'' unmittelbar bestimmt sind. Dazu ist zu zeigen, daß diese Mengen von den Wegen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ unabhängig sind. Betrachten wir z. B. das Gebiet $\mathfrak{J}$, bezeichnen jetzt die durch die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ entstehenden Teilgebiete von $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, und durch $\mathfrak{T}'$ resp. $\mathfrak{T}''$ die eben genannten zugehörigen Grenzmengen. Seien dann $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$ irgend zwei andere Wege von m zu t' und t'', $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_1''$ die zugehörigen Teilgebiete und $\mathfrak{T}_1'$ resp. $\mathfrak{T}_1''$ die entsprechenden Teilmengen von $\mathfrak{T}$, so ist zu zeigen, daß $\mathfrak{T}_1'$ mit $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}_1''$ mit $\mathfrak{T}''$ identisch ist. Dazu ändern wir, wenn nötig, die Wege $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$ zunächst so ab, daß $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}_1''$, ebenso $\mathfrak{l}''$ und $\mathfrak{l}_1'$ sich nicht kreuzen; da es sich beidemal nur um eine endliche Zahl von Kreuzungspunkten handeln kann, so ist dies für den Beweis belanglos. Dann bilden $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}_1'$, ebenso $\mathfrak{l}''$ und $\mathfrak{l}_1''$ je eine endliche oder unendliche Menge von Polygonen und gemäß der in § 4 enthaltenen Definition von $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_1''$ stellen diese Polygone die einzigen Gebiete dar, die zu $\mathfrak{M}'$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_1'$ resp. umgekehrt gehören. Seien insbesondere $\mathfrak{p}_\nu$ die Polygone, die zu $\mathfrak{M}'$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_1'$ gehören. Falls es nun einen Punkt t_1 gäbe, der zu $\mathfrak{T}'$, aber nicht zu $\mathfrak{T}_1'$ gehörte, so müßte er Grenzpunkt solcher Punkte sein, die zwar zu $\mathfrak{M}'$, aber nicht zu $\mathfrak{M}_1'$ gehören, er müßte mithin auch Grenzpunkt von

Punkten sein, die dem Innern der Polygone $\mathfrak{p}_\nu$ angehören. Daraus aber folgert man weiter, daß er sogar selbst dem Innern eines Polygons $\mathfrak{p}_\nu$ angehören müßte, da er nämlich nicht außerhalb aller dieser Polygone liegen kann, und da ihre Umfänge außer t' und t'' keine weiteren Punkte von $\mathfrak{T}$ enthalten. Ein solcher Punkt wäre aber für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$ nicht erreichbar und bedeutet daher einen Widerspruch. Das gleiche folgt für das Gebiet $\mathfrak{A}$, womit der Satz bewiesen ist*).

Die Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ haben in diesem Fall noch eine weitere wichtige Eigenschaft. Sie haben nämlich außer t' und t'' keine weiteren Punkte gemein. Sei $\mathfrak{M}$ wieder das innere Gebiet $\mathfrak{J}$. Wäre nun t_1 ein Punkt, der $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ gemeinsam ist, so läge er einerseits auf der Grenze von $\mathfrak{M}'$ und könnte mit m durch einen Weg $\mathfrak{l}_1'$ innerhalb $\mathfrak{M}'$ verbunden werden; andrerseits läge er auch auf der Grenze von $\mathfrak{M}''$, und es gäbe einen Weg $\mathfrak{l}_1''$, innerhalb $\mathfrak{M}''$, der ihn mit m verbindet. Schlägt man nun um m einen kleinen Kreis, so wird er von $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$, $\mathfrak{l}_1'$, $\mathfrak{l}_1''$ in zwei Punktepaaren getroffen, die einander notwendig trennen. Da nun diese vier Wege nur den Punkt m gemein haben, so bilden $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_1''$ ein einfaches Polygon, von der Art, daß von den beiden Wegen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ nur einer in seinem Innern verläuft; es sei $\mathfrak{l}'$. Es würde also auch t' im Innern dieses Polygons liegen. Andrerseits enthält der Umfang dieses Polygons außer t_1 nur Punkte von $\mathfrak{J}$, es könnte also t' nicht mit äußeren Punkten verbunden werden. Also:

Zwei Punkte t' und t'' einer einfachen geschlossenen Kurve bestimmen zwei einfache Kurvenbögen, die außer t' und t'' keinen Punkt gemein haben.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten in gleicher Weise für das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$.

Für $\mathfrak{T}$ als beliebige geschlossene Kurve trifft der Satz nicht mehr zu. Verbindet man z. B. im fünften Beispiel von § 5 einen Punkt von $\mathfrak{A}$ mit den Punkten $+1$ und -1 der y-Achse, so gehören alle Punkte der y-Achse sowohl zu $\mathfrak{T}'$ wie zu $\mathfrak{T}''$. Der obige Beweis läßt erkennen, daß der Grund in der Existenz der nicht erreichbaren Punkte besteht.

§ 9.
Die zyklische Anordnung der Punkte der einfachen geschlossenen Kurve.

Auf einem der beiden Kurvenbögen $\mathfrak{T}'$ oder $\mathfrak{T}''$, die durch t' und t'' bestimmt werden, nehme man einen Punkt t beliebig an, so beweist man ebenso, wie eben, daß auch durch ihn eine weitere Teilung des bezüg-

*) Wählt man dagegen in Fig. 1 (S. 289) den Grenzpunkt von Dreieck und Quadrat als t' und eine Quadratecke als t'', so können die Wege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ das Dreieck sowohl einschließen, wie ausschließen und bestimmen $\mathfrak{T}'$ nicht eindeutig.

lichen Kurvenbogens bewirkt wird, so daß die entstehenden Teile immer nur je einen Punkt gemein haben. Hieraus ziehen wir noch eine wichtige Folgerung, nämlich die folgende:

Auf jede beliebige Menge von Punkten einer einfachen geschlossenen Kurve lassen sich die Axiome und Gesetze der Anordnung übertragen.

Dies ergibt sich unmittelbar wie folgt. Seien wieder $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die Wege, die von m zu den zwei Kurvenpunkten t' und t'' führen, und seien k' und k'' die beiden Punkte, in denen $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ einen um m gelegten Kreis schneiden — wir können annehmen, daß es für jeden Weg nur einen Kreuzungspunkt gibt. Verbindet man dann irgend einen Punkt t_1 eines der beiden Kurvenbögen $\mathfrak{T}'$, resp. $\mathfrak{T}''$ mit m, so wird der zugehörige Weg nur in einem der beiden Gebiete $\mathfrak{M}'$ resp. $\mathfrak{M}''$ enthalten sein und daher einen und nur einen der beiden Kreisbogen kreuzen, die durch k' und k'' bestimmt sind. Dies ist aber die notwendige und hinreichende Eigenschaft, vermöge deren die Anordnung, die auf dem Kreis von den Kreuzungspunkten gebildet wird, auf die Wege und von ihnen auf die Kurvenpunkte übertragen werden kann. Insbesondere zeigen also auch die Punkte t_ν einer einfachen Punktfolge die Anordnung, daß t_ν auf der Kurve *zwischen* $t_{\nu-1}$ und $t_{\nu+1}$ liegt. Daraus folgt noch, daß auch t_ν und t durch $t_{\nu-1}$ und $t_{\nu+1}$ getrennt werden. Der Einfachheit halber wollen wir auch von den zugehörigen Wegen $\mathfrak{l}_\nu$ sagen, daß $\mathfrak{l}_\nu$ *zwischen* $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ liegt; bei einer einfachen Punktfolge werden daher auch $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}$ durch $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ getrennt.

Die obigen Sätze konnten auch in der Weise abgeleitet werden, daß man nicht das innere Gebiet, sondern das äußere Gebiet $\mathfrak{A}$ zum Ausgangspunkt nimmt. Sie führen schließlich noch zu folgender später nötigen Folgerung. Wir verbinden wieder irgend zwei Punkte t' und t'' der Kurve mit einem äußeren Punkt a und einem inneren Punkt m; die bezüglichen Wege seien $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{l}''$. Diese Wege bilden ein Polygon P. Verbindet man nun einen Punkt t_1 von $\mathfrak{T}'$ und einen Punkt t_2 von $\mathfrak{T}''$ mit m durch die Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, so werden sie durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ getrennt, es tritt also nur einer von ihnen bei m in das Innere von P, und da dieser Weg mit P keinen Punkt außer m gemein haben kann, liegt er ganz innerhalb P. Daraus folgt, daß von den Mengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ die eine dem Innern und die andere dem Äußeren von P angehört.

Nun sei wieder $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge, seien $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ die Wege, die m und a mit t_ν verbinden, und sei $\mathfrak{T}_\nu$ der Kurvenbogen, der t_ν und $t_{\nu+1}$, aber keinen andern Punkt der Punktfolge enthält. Die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ bilden dann mit $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ ein Polygon L_ν. Wie eben gezeigt, kann $\mathfrak{T}_\nu$ sowohl dem Innern, wie dem Äußeren von L_ν angehören. Sollte das letzte der Fall sein, so ziehen wir von a zu t_ν einen Weg $\mathfrak{a}_\nu'$, der

keinen der andern Wege kreuzt, und mit $\mathfrak{a}_\nu$ ein Wegpolygon $\mathfrak{W}_\nu$ bestimmt, das die Menge $\mathfrak{T}$ einschließt; alsdann bestimmt $\mathfrak{a}_\nu'$ mit $\mathfrak{a}_{\nu+1}$, $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ ein Polygon L_ν', das dem Inneren von $\mathfrak{W}_\nu$ und dem Äußeren von L_ν angehört; gemäß unserer Annahme über L_ν muß daher jeder von t_ν und $t_{\nu+1}$ verschiedene Punkt der Punktfolge außerhalb von ihm liegen. Verbindet man nun weiter $t_{\nu+2}$ mit a und m durch die Wege $\mathfrak{a}_{\nu+2}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+2}$, so bilden sie mit $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ ein Polygon $L_{\nu+1}$, das notwendig außerhalb von L_ν resp. L_ν' liegt, und in seinem Innern nur die Teilmenge $\mathfrak{T}_{\nu+1}$ enthält. So weiterschließend gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge einer einfachen geschlossenen Kurve, so lassen sich ihre Punkte mit je einem Punkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ durch Wege so verbinden, daß von den Polygonen, die durch je zwei konsekutive Wege bestimmt werden, ein jedes außerhalb aller übrigen liegt.

Verbinden wir endlich auch t selbst mit m und a durch die Wege $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{a}$, so können wir sie dem Vorigen gemäß so wählen, daß der Punkt $t_{\nu+1}$ innerhalb des von ihnen mit $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ gebildeten Polygons $\mathfrak{P}_\nu$ liegt. Da sich aber die Wege $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{l}$ und die Wege $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{l}_{\nu+2}$ gegenseitig trennen, so folgt nun weiter, daß auch $t_{\nu+2}$ und jedes $t_{\nu+\varrho}$ innerhalb dieses Polygons $\mathfrak{P}_\nu$ liegt.

§ 10.

Die einfachen Punktfolgen der einfachen geschlossenen Kurve.

Bei einer einfachen geschlossenen Kurve hat jede einfache Punktfolge $\{t_\nu\}$ die Eigenschaft, daß die zugehörigen Ausbiegungen η_ν gegen Null konvergieren.

Zum Beweise schicke ich folgende Hilfsbetrachtung voraus. Sei wieder L_ν das Polygon, das von den Wegen $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+1}$ und $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ gebildet wird, dessen Inneres also den Kurvenbogen $\mathfrak{T}_\nu$, aber keinen Punkt der Punktfolge $\{t_\nu\}$ enthält, sei τ_ν irgend ein Punkt von $\mathfrak{T}_\nu$ und sei τ ein Grenzpunkt aller Punkte τ_ν. Dann folgt zunächst, daß τ nicht innerhalb irgend eines Polygons L_ν liegen kann. Setzen wir jetzt

$$\varrho(t_\nu, t_{\nu+1}) = d_\nu, \quad \varrho(t_\nu, \tau_\nu) = r_\nu, \quad \varrho(t_\nu, t) = \sigma_\nu, \quad \varrho(\tau_\nu, \tau) = \sigma_\nu',$$

so ergibt das von t_ν, τ_ν, t und τ gebildete Viereck die Relation

$$\varrho(t, \tau) > r_\nu - \sigma_\nu - \sigma_\nu'. \tag{1}$$

Ebenso erhält man aus dem Viereck der Punkte $t_{\nu+1}$, t, τ_ν, τ

$$\varrho(t, \tau) > r_{\nu+1} - \sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu'. \tag{1a}$$

Denken wir uns nun wieder den Punkt τ_ν auf $\mathfrak{T}_\nu$ veränderlich und setzen*)

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 300.

$$\varrho_{ma}(t_\nu, \mathfrak{T}_\nu) = e_\nu', \qquad \varrho_{ma}(t_{\nu+1}, \mathfrak{T}_\nu) = e_\nu'',$$

so kann man einen Punkt τ_ν so auswählen, daß bei beliebig kleinem δ_ν

$$e_\nu' \geqq \varrho(t_\nu, \tau_\nu) > e_\nu' - \delta_\nu$$

ist, und wir erhalten schließlich

(2) $$\varrho(t, \tau) > e_\nu' - \delta_\nu - \sigma_\nu - \sigma_\nu',$$

und ebenso ergibt sich

(2a) $$\varrho(t, \tau) > e_\nu'' - \delta_{\nu+1} - \sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu'.$$

Nun legen wir um die Mitte der Strecke $t_\nu t_{\nu+1}$ ein Quadrat $\mathfrak{q}_\nu$ mit der Seite s_ν, so daß t_ν und $t_{\nu+1}$ innerhalb von ihm liegen; es wird dann

$$\varrho(t_\nu, \mathfrak{q}_\nu) \geqq \frac{1}{2}(s_\nu - d_\nu) \quad \text{und} \quad \varrho(t_{\nu+1}, \mathfrak{q}_\nu) \geqq \frac{1}{2}(s_\nu - d_\nu)$$

sein. Ist nun e_ν die größere der beiden Größen e_ν' und e_ν'' und wählen wir

$$s_\nu = 2e_\nu + d_\nu,$$

so wird jeder Punkt τ_ν notwendig innerhalb von $\mathfrak{q}_\nu$ liegen. Das gleiche gilt daher für die gesamte Menge $\mathfrak{T}_\nu$. Fassen wir also jetzt dasjenige polygonale Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ ins Auge, das sowohl zum Innern von $\mathfrak{q}_\nu$, wie zum Innern von L_ν gehört, so wird sein Umfang durch t_ν und $t_{\nu+1}$ in zwei Streckenzüge geteilt, die je einen von t_ν zu $t_{\nu+1}$ führenden Weg darstellen, von denen der eine durch $\mathfrak{A}$ und der andere durch $\mathfrak{J}$ führt, und von denen keiner außerhalb $\mathfrak{q}_\nu$ verläuft. Für die Ausbiegung η_ν, die zu t_ν und $t_{\nu+1}$ gehört, besteht daher jedenfalls die Relation

$$\eta_\nu < s_\nu\sqrt{2}; \quad e_\nu + \frac{1}{2} d_\nu > \frac{1}{4}\eta_\nu.$$

Angenommen nun, die Ausbiegungen η_ν konvergierten nicht gegen Null, so gäbe es unendlich viele Werte von η_ν, die größer als eine Größe ϑ bleiben, die nicht Null ist. Man kann dann eine Zahl N so bestimmen, daß für beliebiges ε und unendlich viele Werte $\nu > N$ die Relationen

$$\eta_\nu > \vartheta - \varepsilon, \quad \sigma_\nu < \varepsilon, \quad \sigma_{\nu+1} < \varepsilon, \quad \sigma_\nu' < \varepsilon,$$

bestehen und daß zugleich für *alle* Werte $\nu > N$

$$d_\nu < \varepsilon, \quad \delta_\nu < \varepsilon, \quad \delta_{\nu+1} < \varepsilon$$

ist. Daraus aber erhielte man gemäß (2) und (2a) schließlich

(3) $$\varrho(t, \tau) > \vartheta',$$

wo auch ϑ' eine endliche von Null verschiedene Größe ist. *Wenn also die Ausbiegungen η_ν nicht gegen Null konvergieren, so kann man die Zwischenpunkte τ_ν so wählen, daß die Folgen $\{t_\nu\}$ und $\{\tau_\nu\}$ verschiedene Grenzpunkte bestimmen.*

Man betrachte nun das oben (§ 7) genannte Polygon $\mathfrak{P}_\nu$, das durch die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{a}_\nu$ und die Wege $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{a}$ gebildet wird, die t mit m und a ver-

binden. Es enthält das Polygon L_ν als Teilpolygon und daher enthält es auch den Punkt τ_ν, ebenso enthält es jeden Punkt $\tau_{\nu+\varrho}$; der Punkt τ kann daher *nicht außerhalb* von $\mathfrak{P}_\nu$ liegen, und da er wegen der letzten Relation nicht in den Umfang dieses Polygons fallen kann, so muß er notwendig in seinem *Inneren* enthalten sein. Man verbinde nun auch τ mit a und m durch je einen Weg α resp. λ, so kann man diese Wege so wählen, daß sie den Umfang von $\mathfrak{P}_\nu$ nicht kreuzen; sie bestimmen mit $\mathfrak{l}_\nu$ und $\mathfrak{a}_\nu$ ein Teilpolygon $\mathfrak{P}_\nu'$ von $\mathfrak{P}_\nu$, so daß t außerhalb dieses Polygons liegt. Man kann daher um t einen Kreis schlagen, der ebenfalls außerhalb dieses Polygons liegt. Im Inneren dieses Kreises liegen aber Punkte der Folge $\{t_\nu\}$. Sei $t_{\nu+\varrho}$ einer von ihnen und $P_{\nu+\varrho}$ das Polygon, das durch die Wege $\mathfrak{l}_\nu$, $\mathfrak{l}_{\nu+\varrho}$ und $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu+\varrho}$ bestimmt wird, so muß $\mathfrak{P}_\nu'$ Teilpolygon auch von $P_{\nu+\varrho}$ sein. Das Polygon $P_{\nu+\varrho}$ besteht aber aus einer endlichen Zahl von Polygonen L_ν. Andererseits enthält es dem Vorstehenden gemäß auch den Punkt τ; es müßte daher τ dem Inneren oder dem Umfang eines Polygons L_ν angehören, was aber einen Widerspruch darstellt. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem vorstehenden Beweise ziehen wir noch die Folgerung, daß *der Punkt τ mit t identisch ist.* Ist also $\{t_\nu\}$ eine einfache Punktfolge und wählt man einen Punkt τ_ν beliebig zwischen t_ν und $t_{\nu+1}$ aus, so bilden auch die Punkte τ_ν eine einfache Punktfolge, die denselben Grenzpunkt besitzt, wie die Folge $\{t_\nu\}$.

§ 11.

Die Abbildung der einfachen geschlossenen Kurve auf den Kreis.

Sei wieder $\mathfrak{T}$ die einfache geschlossene Kurve, sei m ein innerer Punkt von $\mathfrak{T}$ und K ein ihn umgebender kleiner Kreis. Ferner seien

$$P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots$$

irgend welche gegen $\mathfrak{T}$ von innen approximierende Polygone, die sämtlich den Punkt m und den Kreis K einschließen. P_ν approximiere im mittleren Abstande ε_ν, so daß für *jeden* Punkt p von P_ν*)

$$\frac{3}{2}\varepsilon_\nu > \varrho(p, \mathfrak{T}) \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_\nu \tag{1}$$

ist. Endlich setze man für alle P_ν eine einheitliche positive Umlaufsrichtung fest.

Sei jetzt ϑ_1 der größte Abstand zweier Punkte von P_1. Nimmt man

*) Beiträge II, S. 138. Dort geschieht die Approximation so, daß ε statt $\frac{3}{2}\varepsilon$ steht. Diese Abänderung ist belanglos.

dann eine Größe $s_1 < \vartheta_1$ zunächst beliebig an, so kann man auf P_1 gewisse in positiver Richtung aufeinander folgende Punkte

$$p_1, p_2, \cdots, p_\lambda$$

bestimmen, so daß für *je zwei konsekutive* Punkte p_i und p_{i+1}

$$(2) \qquad \frac{3}{2} s_1 > \varrho(p_i, p_{i+1}) \geqq \frac{1}{2} s_1$$

ist.*)

Innerhalb P_1 zieht man nun von m zu p_i den Weg $\mathfrak{p}_i$ und zwar so, daß diese Wege den Kreis K in Punkten k_i kreuzen, die ihn in gleiche Teile teilen. Alsdann konstruiere man zu p_i einen sich ins Äußere von P_1 erstreckenden Bereich T_i, der auf seinem Umfange mindestens einen Punkt von $\mathfrak{T}$ enthält. Um den Beweis zu vereinfachen, ändern wir jedoch die früher**) angegebene Konstruktion dieses Bereiches dahin ab, daß wir nicht ein um p_i sich dehnendes *Quadrat*, sondern einen sich um p_i dehnenden *Kreis* zugrunde legen. Ist dann t_i ein auf T_i liegender Punkt von $\mathfrak{T}$, so ist für ihn

$$(3) \qquad \varrho(p_i, t_i) = \varrho(p_i, \mathfrak{T}).$$

Verbindet man nun t_i mit p_i durch einen Streckenzug $\mathfrak{w}_i$ innerhalb T_i, so stellt er zusammen mit $\mathfrak{p}_i$ einen einfachen Weg $\mathfrak{l}_i$ endlicher Streckenzahl von m zu t_i dar; wir nehmen ihn und jeden der übrigen Wege überdies so an, daß die in t_i endigende Seite von $\mathfrak{w}_i$ in den Radius $p_i t_i$ fällt. Durch geeignete Wahl ihrer Länge kann dann sicher erreicht werden, daß für *jeden* Punkt m_i dieser Seite ebenfalls

$$\varrho(m_i, t_i) = \varrho(m_i, \mathfrak{T})$$

ist; was für den folgenden Beweis nötig ist.

Bei geeigneter Wahl von ε_1 und s_1 können die Wege $\mathfrak{l}_i$ *einander nicht kreuzen.* Um dies nachzuweisen, ist zu zeigen, daß bei geeigneter

---

*) Um dies in aller Form auszuführen, nimmt man p_1 auf P_1 beliebig an, schlägt um p_1 einen Kreis mit s_1 und nennt seinen *ersten* Schnittpunkt mit dem in positiver Richtung durchlaufenen Polygon p_2. Denkt man sich dann den bezüglichen Streckenzug $p_1 \cdots p_2$ von P_1 getilgt, so bleibt ein Streckenzug $p_2 \cdots p_1$, mit dem man von p_2 aus ebenso verfährt. So fährt man fort, bis der letzte Kreis den noch übrigen Streckenzug $p_n \cdots p_1$ ganz einschließt. Ist nun $\varrho(p_n, p_1) \geqq \frac{1}{2} s_1$, so behält man p_n bei, ist aber $\varrho(p_n, p_1) < \frac{1}{2} s_1$, so wählt man p_{n-1} als letzten Teilpunkt und es ist $\varrho(p_{n-1}, p_1) < \frac{3}{2} s_1$.

**) Vgl. die Anmerkung **) auf S. 302.

Wahl von ε_1 und s_1 *je zwei* Bereiche T_i und T_k außerhalb voneinander liegen*), und zwar wird dies sicher erreicht, falls man

(4) $$s_1 > 16\varepsilon_1$$

wählt. Zunächst folgt leicht, daß der Bereich T_i außerhalb von T_{i+1} liegt und daß ein Bereich T_k nicht an zwei Bereiche T_i und T_{i+1} anstoßen oder mit ihnen Teile gemein haben kann. Ist nämlich δ' der kleinste Radius dieser Bereiche, so würde sonst

$$\varrho(p_i, p_{i+1}) \leqq 2\delta', \text{ resp. } \varrho(p_i, p_{i+1}) \leqq 4\delta'$$

sein und dies steht wegen $\delta' < \frac{3}{2}\varepsilon_1$ mit der aus (2) und (4) folgenden Relation

$$\varrho(p_i, p_{i+1}) \geqq \frac{1}{2}s_1 > 8\varepsilon_1$$

im Widerspruch.

Angenommen nun, es liegen nicht alle Bereiche T_i außerhalb voneinander, so wollen wir sie sämtlich gleichzeitig um die Punkte p_i entstehen lassen, so daß sie stets denselben Radius haben, bis irgend zwei aneinander stoßen. Die so gebildeten Bereiche seien T_i', wo die T_i' mit den T_i identisch sind oder nur Teile der T_i, und es seien T_i' und T_k', wo $k > i$, zwei aneinandergrenzende Bereiche. Ist dann p' der ihnen gemeinsame Punkt, sind $\mathfrak{l}_i'$ und $\mathfrak{l}_k'$ zwei Wege, die innerhalb T_i' und T_k' von p' zu p_i und p_k führen, und sind $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_k$ die Wege von m zu p_i und p_k, so kann keiner dieser Wege einen der Bereiche T_h' kreuzen; jeder dieser Bereiche liegt also außerhalb oder innerhalb des einfachen Polygons $\mathfrak{P}$, das von den vier Wegen gebildet wird, und dasselbe gilt von den Wegen $\mathfrak{p}_h$, die von m zu p_h führen. Andererseits müßte es aber wegen der zyklischen Anordnung der Punkte p_i innerhalb wie außerhalb dieses Polygons $\mathfrak{P}$ Wege $\mathfrak{p}_h$ und damit auch Bereiche T_h' wirklich geben. Wir nehmen an, es mögen alle Bereiche T_h', für die $i < h < k$ ist, innerhalb $\mathfrak{P}$ liegen, so ist dadurch nur die Bezeichnung festgelegt, und es liegt T_{i+1}' innerhalb von $\mathfrak{P}$. Aus dem Vorstehenden folgert man nun weiter, daß dann auch T_{i+1} selbst ganz innerhalb $\mathfrak{P}$ liegt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte T_{i+1} entweder T_i' oder T_k' oder beide Bereiche kreuzen; jede dieser Annahmen führte aber, wie leicht ersichtlich, auf einen Widerspruch gegen die oben gezogene Folgerung, daß weder T_i und T_{i+1} noch auch T_k mit T_i und T_{i+1} Punkte gemein haben. Daher müßte T_{i+1} innerhalb von $\mathfrak{P}$ liegen. Das Polygon $\mathfrak{P}$ umschließt alsdann auch den Punkt t_{i+1} von T_{i+1}. Dies ist aber unmöglich, gleichgültig ob der Punkt p' zu $\mathfrak{T}$ gehört oder zu $\mathfrak{J}$, woraus die Behauptung folgt.

*) In dem Umstande, daß dies für je zwei Bereiche T_i und T_k nachzuweisen ist, liegt die Notwendigkeit eines ausführlichen Beweises.

Aus den Relationen (1) und (3) folgern wir noch

$$\frac{3}{2}\,\varepsilon_1 > \varrho(p_i, t_i) \geqq \frac{1}{2}\,\varepsilon_1,$$

und wenn man noch $\varrho(t_i, t_{i+1}) = r_i$ setzt, so folgt aus dem Viereck der Punkte $p_i, p_{i+1}, t_i, t_{i+1}$ mittels (2)

$$(5) \qquad \frac{3}{2}\,s_1 + 3\,\varepsilon_1 > r_i > \frac{1}{2}\,s_1 - 3\,\varepsilon_1.$$

Aus der Reihe der Polygone P_ν bestimmt man jetzt ein im Abstand ε_2 approximierendes Polygon P_2' folgendermaßen. Man nehme zunächst

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\,\varepsilon_1$$

beliebig an, überdies aber soll, wenn p_{i0} der *letzte* Kreuzungspunkt des Weges $\mathfrak{l}_i$ mit dem Polygon P_2' ist,

$$\varrho(p_{i0}, t_i) = \varrho(p_{i0}, \mathfrak{T})$$

sein. Gemäß der obigen Festsetzung wird dies sicher erfüllt sein, wenn p_{i0} in diejenige Seite des Weges $\mathfrak{l}_i$ fällt, die in t_i endigt. Es ist dann

$$\frac{3}{2}\,\varepsilon_2 > \varrho(p_{i0}, t_i) \quad \text{und} \quad \frac{3}{2}\,\varepsilon_2 > \varrho(p_{i+1,0}, t_{i+1}),$$

und daher folgt für die Entfernung der Punkte p_{i0} und $p_{i+1,0}$, die in den Bereichen T_i und T_{i+1} liegen,

$$(6) \qquad r_i + 3\,\varepsilon_2 > \varrho(p_{i0}, p_{i+1,0}) > r_i - 3\,\varepsilon_2.$$

Man nehme nun eine Größe $s_2 \leqq \frac{1}{3}\,s_1$ zunächst beliebig an und bestimme auf dem Streckenzuge $p_{i0} \cdots p_{i+1,0}$ wiederum die Punkte

$$p_{i0}, p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{i\mu}, p_{i+1,0}$$

in der Weise, daß für je zwei konsekutive

$$\frac{3}{2}\,s_2 > \varrho(p_{ik}, p_{i,k+1}) \geqq \frac{1}{2}\,s_2$$

ist, und konstruiere zu jedem dieser Punkte p_{ik} den Bereich T_{ik}. Dieser liefert einen Punkt t_{ik}, so daß für jeden Punkt p_{ik}

$$\frac{3}{2}\,\varepsilon_2 > \varrho(p_{ik}, t_{ik}) \geqq \frac{1}{2}\,\varepsilon_2$$

ist; und hieraus folgt wiederum, falls noch $\varrho(t_{ik}, t_{i,k+1}) = r_{ik}$ gesetzt wird,

$$(7) \qquad \frac{3}{2}\,s_2 + 3\,\varepsilon_2 > r_{ik} > \frac{1}{2}\,s_2 - 3\,\varepsilon_2.$$

Nun ziehe man wieder für jeden neu entstandenen Punkt p_{ik} den Weg $\mathfrak{l}_{ik}$, der von m über p_{ik} zu t_{ik} führt und zwar so, daß auf dem Kreise K, der m umgibt, jeder bereits vorhandene Kreisbogen durch die neuen Teil-

punkte k_{ik} in gleiche Teile zerlegt wird und daß auch die Wege $\mathfrak{l}_{ik}$ der oben für die Wege $\mathfrak{l}_i$ getroffenen Festsetzung genügen. Alle diese Wege haben alsdann endliche Streckenzahl und man beweist, wie oben, daß, wenn man

$$s_2 > 16\,\varepsilon_2$$

wählt, keine zwei dieser Wege einander kreuzen. Sie folgen überdies in derselben Weise aufeinander, wie die Punkte p_{ik} auf dem Umfange von P_2 resp. die Punkte k_{ik} auf dem Kreise K.

In dieser Weise kann man fortfahren. Hat man das Polygon P_ν' konstruiert, mit den Punkten p_N und t_N, wo N eine Abkürzung für ν Indizes ist, und den zu ihnen führenden Wegen $\mathfrak{l}_N$, die auf dem Kreise K die Punkte k_N bestimmen und der obigen Festsetzung unterliegen, so nimmt man unter den approximierenden Polygonen P_ν ein solches als $P'_{\nu+1}$, daß man

$$(8) \qquad \varepsilon_{\nu+1} < \frac{1}{3}\,\varepsilon_\nu$$

wählt und daß, wenn p_{N0} der *letzte* Kreuzungspunkt des Weges $\mathfrak{l}_N$ mit $P'_{\nu+1}$ ist,

$$\varrho(p_{N0}, t_N) = \varrho(p_{N0}, \mathfrak{T})$$

ist. Ferner sei p'_N ein dem Punkte p_N benachbarter Punkt auf P_ν', so hat man wieder

$$(9) \qquad r_N + 3\varepsilon_{\nu+1} > \varrho(p_{N0}, p'_{N0}) > r_N - 3\varepsilon_{\nu+1},$$

und man bestimmt nun auf dem Streckenzuge $p_{N0} \cdots p'_{N0}$ wiederum die Punkte

$$p_{N0},\, p_{N1},\, \cdots,\, p_{N\varrho},\, p'_{N0}$$

in der Weise, daß für je zwei konsekutive

$$\frac{3}{2}\,s_{\nu+1} > \varrho(p_{Ni}, p_{N,i+1}) \geqq \frac{1}{2}\,s_{\nu+1}$$

ist, wo

$$(10) \qquad s_{\nu+1} < \frac{1}{3}\,s_\nu$$

gewählt ist. Diese Punkte p_{Ni} liefern dann wieder die Punkte t_{Ni}, und man hat, wenn man $\varrho(t_{Ni}, t_{N,i+1}) = r_{Ni}$ setzt, für *jeden* dieser Punkte t_{Ni}

$$(11) \qquad \frac{3}{2}\,s_{\nu+1} + 3\varepsilon_{\nu+1} > r_{Ni} > \frac{1}{2}\,s_{\nu+1} - 3\varepsilon_{\nu+1}.$$

Zieht man dann wieder zu jedem neu entstandenen Punkte t_{Ni} den Weg $\mathfrak{l}_{Ni}$ von m über p_{Ni}, so haben alle diese Wege endliche Seitenzahl, und wenn man

$$(12) \qquad s_{\nu+1} > 16\,\varepsilon_{\nu+1}$$

wählt, so werden keine zwei sich kreuzen und alle in derselben Weise aufeinander folgen, wie die Punkte p_{Ni} auf $P'_{\nu+1}$, resp. die Punkte k_{Ni} auf K; diese teilen zugleich einen jeden bereits vorhandenen Bogen des Kreises K in gleiche Teile.

Es fragt sich jetzt nur noch, ob die vorstehenden Bedingungen so zu erfüllen sind, daß die Punkte t_N schließlich überall dicht auf der Kurve liegen. Dazu muß zunächst mit limes $\varepsilon_\nu = 0$ auch limes $r_N = 0$ werden, und zwar für je zwei benachbarte Punkte t_N und t'_N. Dies kann auf mannigfache Weise geschehen. Dazu wähle man z. B. ε_1 irgendwie der Relation (4) entsprechend, was immer möglich ist, und setze

$$\text{(13)} \qquad \varepsilon_{\nu+1} = \frac{1}{a}\,\varepsilon_\nu, \quad s_{\nu+1} = \frac{1}{b}\,s_\nu,$$

wo, den Relationen (8) und (10) gemäß, $a \geqq 3$ und $b \geqq 3$ zu wählen ist. Ferner hat man

$$\text{(13)} \qquad \frac{3}{2}\,\frac{s_1}{b^{\nu-1}} + \frac{3}{a^{\nu-1}}\,\varepsilon_1 > r_N > \frac{1}{2}\cdot\frac{s_1}{b^{\nu-1}} - \frac{3}{a^{\nu-1}}\,\varepsilon_1 .$$

Wird also noch $a \geqq b$ angenommen, so bewirkt dies, daß alle Relationen (12) erfüllt sind, daß auch alle $r_N > 0$ sind, und daß r_N mit wachsendem ν gegen Null konvergiert. Die Punkte $\{t_N\}$ bilden dann, wie wir sehen werden, eine auf $\mathfrak{T}$ überall dichte Menge; sie sei $\mathfrak{T}_r$. Andererseits ist auch die auf dem Kreise liegende Menge $K_r = \{k_N\}$ eine überall dichte Menge, und es sind die Mengen $\mathfrak{T}_r$ und K_r eineindeutig aufeinander bezogen.*)

Sei nun k irgend ein Punkt von K, und $\{k^{(\nu)}\}$ eine gegen ihn konvergierende *einfache* Folge, deren Punkte zu K_r gehören, so entsprechen ihr Punkte $\{t^{(\nu)}\}$, die dieselbe Anordnung besitzen, wie die Punkte $k^{(\nu)}$. Falls nun diese Punkte nicht einen einzigen Grenzpunkt haben sollten, so kann man aus ihnen wie in § 6, durch Tilgung gewisser Punkte eine *einfache* Folge herausheben, die einen einzigen Grenzpunkt t besitzt. Sie sei $\{t_\nu\}$, so ist auch ihr Bild $\{k_\nu\}$ auf K eine einfache Folge. Ersetzt man nun $\{k_\nu\}$ durch eine Folge $\{k_\nu'\}$, die von derselben Seite gegen k konvergiert, und liegt k_ν' zwischen den Punkten k_λ und k_μ, so liegt auch t_ν' zwischen t_λ und t_μ; gemäß dem Schlußsatz von § 10 konvergiert also auch $\{t_\nu'\}$ gegen t. Dies gilt für jede derartige Folge $\{k_\nu'\}$. Es haben daher alle derartigen Folgen $\{t_\nu'\}$ einen und denselben Grenzpunkt und daraus folgt weiter, daß auch die Punkte $t^{(\nu)}$ nur einen Grenzpunkt besitzen, nämlich t.

---

*) Durch geeignete Wahl von a und b kann man sogar erreichen, daß beim Fortgang von P_ν zu $P_{\nu+1}$ zwischen *je* zwei Punkten k_N ein neuer Teilpunkt liegt, was aus den obigen Relationen leicht hervorgeht. Durch $a > b$ wird auch erreicht, daß für *jede* Indizesgruppe $r_N > r_{Ni}$ ist.

Es ist nur noch zu zeigen, daß, wenn man zu k eine Folge $\{k_\nu''\}$ konstruiert, die von der entgegengesetzten Seite gegen k konvergiert, auch $\{t_\nu''\}$ gegen t konvergiert.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so sei t'' der Grenzpunkt dieser Folge. Um die Begriffe zu fixieren, werde nun angenommen, daß die Folge $\{k_\nu\}$ gegen k von links, die Folge $\{k_\nu''\}$ gegen k von rechts konvergiert, das gleiche gilt dann auch bezüglich t und t''. Nun sind zwei Fälle möglich. Zunächst könnte t'' rechts von t liegen. Dann gibt es *mehrere* Punkte t_r von $\mathfrak{T}_r$, die links von t'' und rechts von t liegen. Nimmt man nun einen Punkt t_ϱ der ersten und einen Punkt t_σ'' der zweiten Folge beliebig an, so würde auch jeder derartige Punkt t_r links von t_σ'' und rechts von t_ϱ liegen; es müßte also auch Punkte k_r auf K geben, die die gleiche Lage zu je zwei Punkten k_ϱ und k_σ'' besitzen. Von solchen Punkten gibt es aber auf K nur einen, nämlich k selbst; die obige Annahme ist daher unmöglich. Zweitens könnte t'' links von t liegen; dies führte aber in ähnlicher Weise auf die Folgerung, daß es einen Punkt k_r gäbe, der sowohl rechts wie links von k liegen müßte, was ebenfalls unmöglich ist.

Damit ist bewiesen, daß $\mathfrak{T}_r$ in der Tat auf $\mathfrak{T}$ überall dicht ist, daß jedem Punkt k von K ein und nur ein Punkt t von $\mathfrak{T}$ entspricht, überdies jeder Folge, die gegen k konvergiert, eine Folge, die gegen t konvergiert. Damit ist aber bekanntlich der Beweis der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung erbracht.

§ 12.

Die Erweiterung des Jordanschen Satzes.

Der Satz des Herrn Jordan besagt, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises eine geschlossene Kurve ist. Dieser Satz bedarf aber einer Erweiterung. Die Erweiterung besteht darin, daß sämtliche Punkte der Kurve für das äußere und innere Gebiet *erreichbare* Punkte sind; d. h. das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises ist eine *einfache* geschlossene Kurve.

Bei der Fragestellung, die hier zugrunde gelegt ist, ist diese Eigenschaft sogar die Hauptsache; erst sie führt uns dazu, die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung einer Punktmenge auf den Kreis zu erkennen.

Der Beweis unseres Satzes ergibt sich, nachdem wir die allgemeine Untersuchung der ebenen perfekten Mengen vorausgeschickt haben, fast unmittelbar. Er geht so vor sich, daß wir innerhalb der Gesamtheit aller ebenen Mengen die einfache geschlossene Kurve als das einzig mögliche Abbild des Kreises erkennen werden.

Da die Eigenschaften *perfekt* und *zusammenhängend* unserer Abbildung gegenüber invariant sind, so ist, wie der Kreis K, auch sein Abbild $\mathfrak{T}$ eine perfekte, zusammenhängende Menge. Sie muß aber mit dem Kreise auch die Eigenschaft teilen, nirgends dicht zu sein. Wäre sie nämlich in der Umgebung eines Punktes t überall dicht, so gäbe es ein den Punkt t einschließendes Quadrat, das ebenfalls zu $\mathfrak{T}$ gehörte. Das Abbild dieses Quadrates müßte wieder eine *zusammenhängende* Teilmenge des Kreises sein, d. h. ein Kreisbogen. Dies ist aber unmöglich; denn ein Kreisbogen kann ebensowenig wie die Strecke umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Quadrates sein.*)

Wir zeigen nun weiter, daß alle Punkte von $\mathfrak{T}$ *allseitig erreichbar* sind. Dies ist das einzige, was einer längeren Darlegung bedarf. Dazu schicken wir eine Hilfsbetrachtung voraus.

Seien t' und t'' zwei Punkte von $\mathfrak{T}$, die für irgend ein Gebiet $\mathfrak{M}$ erreichbar sind, $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ die von m zu ihnen führenden Wege, und k' und k'' ihre Bildpunkte auf K. Gemäß § 4 wird durch $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ eine geschlossene Kurve definiert, der außer $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$ eine gewisse *zusammenhängende* Teilmenge $\mathfrak{T}_{12}$ von $\mathfrak{T}$ angehört. Dieser Menge muß eine zusammenhängende Teilmenge K_{12} des Kreises entsprechen, der k' und k'' angehören; daher muß K_{12} einen der beiden durch k' und k'' bestimmten Teilbögen von K ganz enthalten; er sei K_1. Sie kann aber auch keinen Punkt des anderen Kreisbogens K_2 enthalten. Wäre dies der Fall, wäre k_2 ein solcher Punkt und t_2 sein Bildpunkt in $\mathfrak{T}_{12}$, so lege man um t_2 ein die Punkte t' und t'' ausschließendes kleines Quadrat $\mathfrak{q}$. Durch Tilgung der in $\mathfrak{q}$ enthaltenen Punkte entstehen gemäß § 4 aus $\mathfrak{T}_{12}$ gewisse *getrennte* Teilmengen, deren jede höchstens nur einen der beiden Punkte t' und t'' enthält. Wegen der Stetigkeit kann man aber das Quadrat $\mathfrak{q}$ so klein wählen, daß den innerhalb von $\mathfrak{q}$ liegenden Punkten von $\mathfrak{T}_{12}$ lauter Bildpunkte entsprechen, die sämtlich auf dem Bogen K_2 liegen. Nach Wegnahme dieser Punkte bleibt daher in K_{12} eine zusammenhängende Teilmenge übrig, der sowohl k' wie k'' angehören, und dies bedeutet einen Widerspruch.

Angenommen nun, t sei ein Grenzpunkt eines Gebietes $\mathfrak{M}$, der für dies Gebiet nicht erreichbar ist, so gibt es eine gegen ihn konvergierende Folge $\{t_\nu\}$, deren Ausbiegungen η_ν nicht gegen Null konvergieren. Diese Folgen können wir uns zunächst von überflüssigen Punkten gereinigt denken; d. h. wir können aus ihr, falls nötig, Punkte so weglassen, daß bei gegebenem N für *alle* $\nu > N$ *jedes* $\eta_\nu > \lambda > 0$ bleibt. Daß dies möglich ist, geht aus den Begriffen der Folge und der Ausbiegung unmittelbar hervor.

*) Vgl. § 14. Hilfssatz.

Wir wählen nun m innerhalb $\mathfrak{M}$ beliebig und ziehen von m zu den Punkten t_ν die Wege $\mathfrak{l}_\nu$. Sei dann k_ν der auf K liegende Bildpunkt von t_ν, so haben wegen der Stetigkeit die Punkte $\{k_\nu\}$ einen und nur einen Grenzpunkt k, der zugleich Bildpunkt von t ist. Sollten nun die Punkte k_ν auf k keine einfache Folge bilden, so können wir doch analog wie in § 6 eine in ihnen enthaltene Folge $\{k_\nu'\}$ bestimmen von der Art, daß auch die ihnen entsprechenden Punkte t_ν' eine einfache Folge $\{t_\nu'\}$ bilden, und es wird nun auch für diese Punkte *jedes* $\eta_\nu' > \lambda' > 0$ sein, falls $\nu > N'$ gewählt wird.

Gemäß § 4 bestimmen die Wege $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_{\nu+1}'$ ein Teilgebiet $\mathfrak{M}_\nu$ von $\mathfrak{M}$ und definieren eine gewisse Menge $\mathfrak{T}_\nu$, deren Punkte zu der durch $\mathfrak{l}_\nu'$ und $\mathfrak{l}_\nu''$ bestimmten *geschlossenen Kurve* gehören. Ihr entspricht, wie wir eben bewiesen haben, einer der beiden durch k_ν' und $k_{\nu+1}'$ bestimmten Kreisbogen, und da die Punkte k_ν' eine einfache Folge bilden, so müssen es auch diese Kreisbogen tun. Wäre nun t für $\mathfrak{M}$ nicht erreichbar, so könnte man gemäß § 8 auf den Teilmengen $\mathfrak{T}_\nu'$ Punkte τ_ν so auswählen, daß sie einen von t verschiedenen Grenzpunkt haben; es müßten also auch die Bildpunkte auf den Kreisbögen K_ν' einen von k verschiedenen Grenzpunkt besitzen, was unmöglich ist.

Es handelt sich jetzt noch darum, aus der Gesamtheit der ebenen nirgends dichten zusammenhängenden Mengen diejenigen herauszusuchen, die Abbild des Kreises sein können, und zwar ist dabei nur noch die von ihnen bewirkte Gebietsteilung zu berücksichtigen. Die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$ könnte an sich zunächst ein einziges Gebiet darstellen. Dies ist aber ausgeschlossen. Denn gemäß § 5 ist eine solche Menge in zwei Teilmengen zerlegbar, die nur *einen* gemeinsamen Punkt besitzen, was für den Kreis nicht zutrifft.

Sei nun $\mathfrak{A}$ das äußere Teilgebiet von $\mathfrak{M}$ und C diejenige Teilmenge von $\mathfrak{T}$, deren Punkte sämtlich zur Grenze von $\mathfrak{A}$ gehören, aber nicht Grenzpunkte von $\mathfrak{A}$ allein sind; ferner seien c_1 und c_2 zwei Punkte von C. Sie definieren gemäß § 8 zwei Kurvenbogen c_{12} und c_{12}', deren jedem wieder einer der beiden Kreisbögen entsprechen muß, die durch die Bildpunkte k_1 und k_2 bestimmt werden. Daraus folgt aber, daß die Kurve C die Menge $\mathfrak{T}$ erschöpft, also mit ihr identisch ist. Damit ist der Satz bewiesen und es folgt also:

Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild des Kreises ist eine einfache geschlossene Kurve.

Als *einfachen Kurvenbogen* habe ich oben jede zusammenhängende Teilmenge einer einfachen geschlossenen Kurve definiert; es folgt daraus, daß *jeder einfache Kurvenbogen Bildmenge eines Kreisbogens* ist. Dies ist wiederum umkehrbar, d. h. es gilt der Satz:

Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines Kreisbogens ist ein einfacher Kurvenbogen.

Um dies zu beweisen, ist zu zeigen, daß man eine einfache geschlossene Kurve angeben kann, die Bild eines Kreises ist, und von der die bezügliche Bildmenge eine zusammenhängende Teilmenge ist. Sei $\mathfrak{T}$ diese Bildmenge, K' der Kreisbogen, und k_1 resp. k_2 seine Endpunkte. Zunächst folgt, wie beim Beweis des Hauptsatzes, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ allseitig erreichbar ist. Ferner muß die Komplementärmenge von $\mathfrak{T}$ ein *einziges* Gebiet sein. Denn sonst gäbe es in $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Kurve und ihr müßte K oder ein Teil von K', also jedenfalls ein Kreisbogen entsprechen, was unmöglich ist. Man kann daher von *demselben* Punkte m zu den Bildpunkten t_1 und t_2 von k_1 und k_2 zwei Wege $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ legen. Diese kann man umkehrbar eindeutig und stetig auf den Komplementärbogen des Kreisbogens K' abbilden. Sie stellen zusammen mit $\mathfrak{T}$ eine Menge dar, die Bild eines Kreises, also eine geschlossene einfache Kurve ist, womit die Behauptung erwiesen ist.

Man kann noch fragen, welche rein mengentheoretischen Kriterien dafür bestehen, daß eine Menge $\mathfrak{T}$, deren Komplementärmenge ein einziges Gebiet $\mathfrak{M}$ ist, ein einfacher Kurvenbogen ist. Dies wird dann der Fall sein, wenn jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{T}$ ebenfalls ein einfacher Kurvenbogen ist.*)

§ 13.

Herstellung von ebenen Abbildungen bei gegebenem Entsprechen zweier Kurven.

Für den Beweis der vorstehenden Sätze haben wir uns in § 4 die Beschränkung auferlegt, nur polygonale Wege einfachster Art zu benutzen. Hiervon müssen wir uns freimachen; alle für solche Wege abgeleiteten Sätze müssen auf beliebige einfache Kurvenbögen ausgedehnt werden. Um dies auszuführen, bedürfen wir eines Satzes, der besagt, daß man die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung zweier einfachen *Kurven* zu einer ebenfalls umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung für jeden beliebigen *Teil der Ebene* erweitern kann, und zwar so, daß auch für die erweiterte Abbildung diejenige der beiden Kurven bestehen bleibt.

Ich schicke dazu zwei einfache Hilfsbetrachtungen voran. Sei erstens P ein Polygon, das konkave Ecken hat. Verlängert man eine Seite, die in einer konkaven Ecke endigt, in das Innere von P, so zerfällt P in zwei Polygone, deren jedes mindestens eine Ecke weniger hat als P. Es

*) Vgl. meine Note in den Gött. Nachr. 1904.

kann daher P in eine endliche Zahl von Polygonen ohne konkave Ecken zerlegt werden.

Sind zweitens P und Q irgend zwei *konvexe* Polygone, die keineswegs gleich viele Ecken zu haben brauchen, so kann man ihre Innengebiete leicht in der Weise umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abbilden, daß man die Abbildung ihrer Umfänge beliebig vorschreibt. Um dies in einfachster Weise zu bewirken, kann man so verfahren. Seien p_0 und q_0 zwei Punkte im Innern dieser Polygone, z. B. diejenigen, die den größten Abstand von den Umfängen haben. Dann verbinde man p_0 mit einem Punkt p von P und q_0 mit dem entsprechenden Punkte q von Q und ordne je zwei Punkte der Strecken p_0p und q_0q einander zu, die beide in gleichem Verhältnis teilen; tut man dies für jedes Paar entsprechender Punkte p und q, so ist damit eine Abbildung der verlangten Art geleistet, was weiterer Ausführung nicht bedarf.

Ist endlich drittens Q ein konvexes Polygon, ist P ein solches, das auch konkave Ecken hat, und p eine konkave Ecke von P, so verlängere man wieder eine in p endigende Seite in das Innere von P bis zum ersten Schnittpunkt p' mit P und verbinde die beiden entsprechenden Punkte q und q' von Q durch eine Gerade innerhalb Q. Diese Gerade ordnen wir wieder der Geraden pp' eineindeutig und stetig zu. Sie zerlegt Q in zwei konvexe Polygone Q_1 und Q_2. Kann man nun diese Polygone in der verlangten Weise auf die Teilpolygone P_1 und P_2 von P abbilden, so ist damit auch die Abbildung von P auf Q geleistet. Dabei ist zu beachten, daß die Abbildung innerhalb des einen Polygonpaares P_1 und Q_1 von derjenigen innerhalb des anderen im allgemeinen unabhängig ist, sie muß nur die Eigenschaft haben, beidemal dieselbe Beziehung für die Strecken pp' und qq' zu liefern. Dies bleibt bestehen, wie oft wir auch die Zerlegung von P ausführen müssen, um es in lauter konvexe Polygone zu zerlegen. Andererseits zerfällt dabei Q ebenfalls in lauter *konvexe* Polygone. Bilden wir dann jedes Teilpolygon von Q auf das entsprechende Teilpolygon von P in der oben angegebenen Weise ab, so haben wir damit eine eineindeutige und stetige Abbildung für $\mathfrak{J}(P)$ und $\mathfrak{J}(Q)$ gewonnen, die stetig in die vorgeschriebene Abbildung von P und Q übergeht.*)

Sei nun C eine einfache geschlossene Kurve, die eineindeutig auf das Quadrat $\mathfrak{Q}$ bezogen ist, und sei die Aufgabe gestellt, das Innere $\mathfrak{J}(C)$ umkehrbar eindeutig und stetig auf das Innere $\mathfrak{J}(\mathfrak{Q})$ so abzubilden, daß diese Abbildung stetig in die gegebene Abbildung von C auf $\mathfrak{Q}$ übergeht.

---

*) Die oben benutzte Abbildung kann durch jede andere umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung ersetzt werden.

Sei m_0 der Punkt von $\mathfrak{J}(C)$, für den $\varrho(m_0, C) = \eta$ ein Maximum ist, sei q_0 der Mittelpunkt von Q, und δ sein d Abstand von Q. Wir zeichnen dann die Polygone

$$P', P'', \cdots, P^{(\nu)}, \cdots$$

die m_0 einschließen und C von innen approximieren, und zwar setzen wir

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\eta, \; \varepsilon'' = \frac{1}{4}\varepsilon', \cdots, \; \varepsilon^{(\nu+1)} = \frac{1}{4}\varepsilon^{(\nu)}, \cdots$$

Ebenso zeichnen wir die Quadrate, die Q von innen in den Abständen δ_ν approximieren, nämlich

$$\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \cdots, \mathfrak{Q}^{(\nu)}, \cdots$$

und zwar sei

$$\delta' = \frac{1}{2}\delta, \quad \delta'' = \frac{1}{4}\delta', \cdots \quad \delta^{(\nu+1)} = \frac{1}{4}\delta^{(\nu)}, \cdots$$

Es ist jetzt noch zu erörtern, wie man die Abbildung von $P^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ anzunehmen hat, damit die Abbildung des Inneren von $\mathfrak{Q}$ und C gleichmäßig in die vorgegebene Abbildung von $\mathfrak{Q}$ auf C übergeht. Dies kann folgendermaßen geschehen (Fig. 5).*) Seien q_1, q_2, q_3, q_4 in kon-

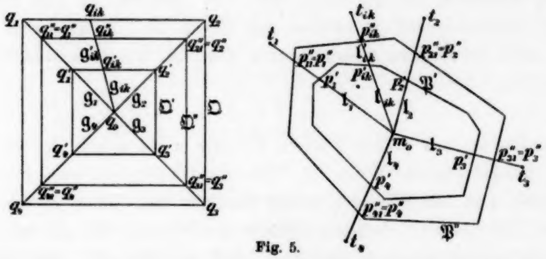

Fig. 5.

sekutiver Folge die Ecken von $\mathfrak{Q}$ und q_1', q_2', q_3', q_4' die analogen Ecken von Q', ferner seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ die Diagonalstrecken, die q_0 mit diesen Punkten verbinden. Sind dann t_1, t_2, t_3, t_4 die Punkte der Kurve C, die den Punkten q_i von Q entsprechen, so verbinden wir sie mit m_0 durch Wege $\mathfrak{l}_i$, die einander nicht kreuzen und jedes Polygon $P^{(\nu)}$ nur einmal schneiden. Wir richten nun die weitere Abbildung immer so ein, daß *diese Wege* $\mathfrak{l}_i$ *den Strecken* $\mathfrak{g}_i$ *entsprechen und daß sie die Polygone* $P^{(\nu)}$ *und* $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ *je in entsprechenden Punkten treffen.* Sind also insbesondere p_1', p_2', p_3', p_4' die Schnittpunkte dieser Wege mit P', so schreiben wir die Abbildung von P' auf $\mathfrak{Q}'$ so vor, daß dem Punkte p_i' der Punkt q_i' entspricht, und daß ferner die Strecke $q_i' q_{i+1}'$ von $\mathfrak{Q}'$ *ähnlich* auf das Intervall $p_i' \cdots p_{i+1}'$ von P' bezogen wird. Die Länge dieses Intervalls sei L_i'.

*) Die Figur ist nur schematisch zu verstehen.

Um die Abbildung von P'' auf $\mathfrak{Q}''$ zu bewirken, nehmen wir eine Größe η_1 an, die kleiner als jedes L_i' ist, und teilen jeden Streckenzug $p_i' \cdots p_{i+1}'$ in solche der Einfachheit halber *gleiche* Teile, daß die Länge jedes Teiles zwischen η_1 und $\frac{1}{2}\eta_1$ liegt. Die so auf $p_i' \cdots p_{i+1}'$ entstehenden Punkte seien

$$p_{i1}' = p_i',\ p_{i2}',\ p_{i3}', \cdots, p_{i\lambda}' = p_{i+1}';$$

ihnen entsprechen auf $\mathfrak{Q}'$ die Punkte

$$q_{i1}' = q_i',\ q_{i2}',\ q_{i3}', \cdots, q_{i\lambda}' = q_{i+1}',$$

die ebenfalls *gleichen* Abstand voneinander haben müssen. Seien $\mathfrak{g}_{ik}$ die Geraden, die diese Punkte mit q_0 verbinden, q_{ik} ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{Q}$, q_{ik}'' diejenigen mit $\mathfrak{Q}''$ und $\mathfrak{g}_{ik}'$ das Stück $q_{ik}' q_{ik}$ dieser Geraden, das also *außerhalb* von $\mathfrak{Q}'$ liegt. Die Gesamtheit dieser Punkte auf $\mathfrak{Q}$ resp. $\mathfrak{Q}''$ bezeichne ich durch

$$Q_2 = \{q_{ik}\} \quad \text{resp.} \quad Q'' = \{q_{ik}''\},$$

und zwar gehören zu Q_2 auch die vier Punkte q_i der Punktmenge $Q_1 = \{q_i\}$, und zwischen je zweien von ihnen liegt mindestens ein Punkt von Q_2. Auf der Kurve C bestimmen wir nun die entsprechende Punktmenge

$$T_2 = \{t_{ik}\},$$

und verbinden m_0 mit jedem Punkte t_{ik}, der nicht schon zur Punktmenge $T_1 = \{t_i\}$ gehört, durch Wege $\mathfrak{l}_{ik}$, die den Punkt p_{ik}' von P' enthalten, die einander und die Wege $\mathfrak{l}_i$ nicht kreuzen und jedes $P^{(\nu)}$ nur einmal schneiden. Ist dann $\mathfrak{l}_{ik}'$ dasjenige Stück des Weges, das zwischen p_{ik}' und t_{ik} liegt, so setzen wir zunächst fest, daß *die Wege $\mathfrak{l}_{ik}'$ und die Strecken $\mathfrak{g}_{ik}'$ einander entsprechen**) und richten die weitere Abbildung wieder so ein, daß für jedes $\nu > 1$ *ihre Schnittpunkte auf $P^{(\nu)}$ und $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ entsprechende Punkte sind.* Ist insbesondere p_{ik}'' der Schnittpunkt von $\mathfrak{l}_{ik}$ mit P'', so ist die Anordnung dieser Punkte auf P'' die gleiche, wie die der Punkte q_{ik}'' auf $\mathfrak{Q}''$, und wir schreiben nun weiter vor, daß die Punkte p_{ik}'' und q_{ik}'' einander entsprechen, und daß die entsprechenden Intervalle von P'' und $\mathfrak{Q}''$ *ähnlich* aufeinander bezogen werden. Damit sind die Umfänge je zweier Teilpolygone, in die die Gebiete zwischen P' und P'' resp. zwischen $\mathfrak{Q}'$ und $\mathfrak{Q}''$ zerfallen, einander zugeordnet, und es kann daher auch die dementsprechende Abbildung dieser Ringgebiete selbst bewirkt werden.

In dieser Weise kann man fortfahren. Sei L'' die kleinste Länge

---

*) Die innerhalb $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ liegenden Teile dieser Wege brauchen einander nicht zu entsprechen; und analog im folgenden.

eines dieser auf P'' liegenden Intervalle $p''_{i,k} \cdots p''_{i,k+1}$, so wähle man eine Größe η_2 so, daß

$$\eta_2 < \frac{1}{2}\eta_1 \quad \text{und} \quad \eta_2 < L'',$$

und teile jedes Intervall $p''_{ik} \cdots p''_{i,k+1}$ auf P'' in *gleiche* Teile, deren jeder der Länge nach zwischen η_2 und $\frac{1}{2}\eta_2$ liegt, bestimme die entsprechenden Punkte auf $\mathfrak{Q}''$, und verbinde sie mit q_0 durch Geraden $\mathfrak{g}_{ikl}$. Man erhält so in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{Q}'''$ resp. $\mathfrak{Q}$ die Punktmengen

$$Q_3 = \{q_{ikl}\} \quad \text{und} \quad Q''' = \{q'''_{ikl}\},$$

so daß Q_3 die Menge Q_2 enthält und zwischen je zwei Punkten von Q_2 mindestens ein Punkt von Q_3 liegt. Alsdann bestimme man auf C die Punkte

$$T_3 = \{t_{ikl}\},$$

und verbinde m_0 mit ihnen durch die Wege $\mathfrak{l}_{ikl}$, die durch p''_{ikl} gehen und auf P''' die Punkte p'''_{ikl} ausschneiden. Man richtet dann die weitere Abbildung so ein, daß man die Stücke $\mathfrak{l}_{ikl} = p''_{ikl}\, t_{ikl}$ dieser Wege, die *außerhalb* P'' liegen, den außerhalb $\mathfrak{Q}''$ liegenden Strecken $\mathfrak{g}''_{ikl} = q''_{ikl}\, q_{ikl}$ in der genannten Weise zuordnet, auf P''' und $\mathfrak{Q}'''$ die Punkte p'''_{ikl} und q'''_{ikl} als Bildpunkte wählt, und die zwischen ihnen liegenden Streckenzüge einander *ähnlich* zuordnet.

Wird auf diese Weise fortgefahren, und sind

$$Q_r = \{Q_\nu\}, \quad \text{resp.} \quad T_r = \{T_\nu\}$$

die auf $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ entstehenden Punktmengen, so ist der Konstruktion gemäß Q_r auf $\mathfrak{Q}$ überall dicht; es muß daher, da $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ beiderseits stetige Abbilder sind, auch $\mathfrak{T}_r$ auf C überall dicht liegen.

Es ist nun noch zu beweisen, daß die Stetigkeit auch beim Übergang aus dem Inneren zur Grenze, d. h. zu $\mathfrak{Q}$ und C gewahrt bleibt. Dazu ist zu zeigen, daß jeder dem Inneren von $\mathfrak{Q}$ zugehörigen Punktfolge, die gegen einen Punkt q von $\mathfrak{Q}$ konvergiert, eine Punktfolge entspricht, die gegen einen einzigen Grenzpunkt von C konvergiert, und zwar gegen den Bildpunkt t von C. Man sieht aber leicht, daß es genügt, gewisse einfachere Punktfolgen in Betracht zu ziehen. Erstens können wir uns auf Punkte beschränken, die auf den Umfängen der $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ liegen; zweitens dürfen wir annehmen, daß auf jedem $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ nur ein Punkt der Punktfolge liegt, und drittens können wir jeden Punkt eines $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ durch den ihm am nächsten liegenden Punkt der Punktmenge $Q^{(\nu)}$ ersetzen. Sei nun

$$\{q^{(\nu)}\} = q', q'', q''', \cdots, q^{(\nu)}, \cdots$$

eine derartige Punktfolge und q ihr Grenzpunkt, und seien

$$\{p^{(\nu)}\} = p', p'', p''', \cdots, p^{(\nu)}, \cdots$$

die entsprechenden Punkte auf den Polygonen $P^{(\nu)}$. Wir wollen nun annehmen, es gebe einen Grenzpunkt von $\{p^{(\nu)}\}$, der von t verschieden ist, so gehörte er doch sicher der Menge C an. Er sei t_1, und q_1 sei der entsprechende Punkt von $\mathfrak{Q}$, ferner sei $q\,q_1$ die kleinere der beiden Strecken, in die $\mathfrak{Q}$ zerfällt. Dann gibt es auf ihr sicher Punkte von Q_r; irgend zwei von ihnen seien q_r' und q_r'', ferner seien $\mathfrak{g}_r'$ und $\mathfrak{g}_r''$ die von q_0 zu ihnen führenden Geraden, und $\mathfrak{M}_q$ das durch sie bestimmte Teilgebiet von $\mathfrak{Q}$. Andererseits bestimmen die Wege $\mathfrak{l}_r'$ und $\mathfrak{l}_r''$, die von m_0 zu t_r' und t_r'' führen, ein Teilgebiet $\mathfrak{M}_t$ des Kurveninneren, zu dessen Grenze t und t_1 nicht gehören, auch folgen t, t_1, t_r', t_r'' in derselben Ordnung aufeinander wie q, q_1, q_r', q_r''. Man lege nun um t_1 einen Kreis mit einem so kleinen Radius, daß die Wege $\mathfrak{l}_r'$ und $\mathfrak{l}_r''$ zu seinem Äußeren gehören, dann wird man eine Zahl N so wählen können, daß es unendlich viele Werte $\nu > N$ gibt, so daß die Punkte $p^{(\nu)}$ dem Inneren dieses Kreises angehören.

Welches nun auch die Punkte q_r' und q_r'' sein mögen, so kann man gemäß den obigen Vorschriften die Zahl N auch so bestimmen, daß für *alle* $\nu > N$ einerseits die Polygone $\mathfrak{Q}^{(\nu)}$ von den Geraden $\mathfrak{g}_r''$ und $\mathfrak{g}_r''$ und andererseits die Polygone $P^{(\nu)}$ von den beiden Wegstücken $\mathfrak{l}_r'$ und $\mathfrak{l}_r''$ in entsprechenden Punkten getroffen werden. Sind also $\mathfrak{q}^{(\nu)}$ resp. $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ diejenigen Streckenzüge dieser Polygone, die im Innern der Gebiete $\mathfrak{M}_q$ und $\mathfrak{M}_t$ verlaufen, so werden für alle diese Werte ν ihre Endpunkte einander entsprechen. Für diese Werte ν müssen daher auch die Punkte $p^{(\nu)}$ und $q^{(\nu)}$ die gleiche Lage zu $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ resp. $\mathfrak{q}^{(\nu)}$ haben, d. h. entweder zugleich links oder zugleich rechts von ihnen liegen. Dies enthält aber einen Widerspruch mit der Annahme, denn man könnte daraus folgern, daß es unendlich viele Werte $\nu > N$ gäbe, für die die Punkte $p^{(\nu)}$ und daher auch die Punkte $q^{(\nu)}$ auf *verschiedenen* Seiten dieser Streckenzüge liegen müßten. Dies trifft aber für die Punkte $q^{(\nu)}$, resp. die Streckenzüge $\mathfrak{q}^{(\nu)}$ nicht zu. Die Punkte $p^{(\nu)}$ besitzen daher nur einen Grenzpunkt.

Ebenso ließe sich beweisen, daß jeder Punktfolge von C eine Punktfolge von $\mathfrak{Q}$ mit nur einem Grenzpunkte entspricht; doch ist dies nicht einmal nötig, da eine eineindeutige und einerseits stetige Abbildung auch umkehrbar stetig ist. Also folgt:

Ist die einfache geschlossene Kurve C eineindeutiges und stetiges Abbild eines Quadrates $\mathfrak{Q}$, so kann man diese Abbildung zu einer analogen Abbildung der beiden inneren Gebiete von C und $\mathfrak{Q}$ erweitern, die stetig in die gegebene Abbildung zwischen $\mathfrak{Q}$ und C übergeht.

Die Anwendung dieses Satzes auf die im Eingang des Paragraphen genannte Frage wird im folgenden Paragraphen gegeben werden.

§ 14.

Zusammenstellung der invarianten Eigenschaften.

Es scheint mir nützlich, zum Schlusse eine Zusammenstellung aller der Eigenschaften zu geben, die bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung *invariant* bleiben, sowie der meines Erachtens *einfachsten Beweismethoden.* Dabei setze ich von vornherein voraus, daß wir es mit der Abbildung *von Ebenen aufeinander* zu tun haben. Gemäß § 12 enthält dies keine Beschränkung, da ja jede Abbildung von Kurven als *Teil* einer Ebenenabbildung angesehen werden kann.

1. *Einer abgeschlossenen resp. perfekten Menge entspricht wieder eine abgeschlossene resp. perfekte Menge,* was aus dem Charakter der Stetigkeit unmittelbar folgt.*)

2. *Der Zusammenhang ist eine Invariante.* Seien nämlich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ entsprechende *perfekte* Mengen, und sei $\mathfrak{T}$ zusammenhängend, so daß $\mathfrak{T}$ nicht in abgeschlossene Teilmengen zerlegbar ist. Wenn dann die Menge $\mathfrak{T}_1$ nicht zusammenhängend wäre, so zerfiele sie in zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$, die beide perfekt sind. Ihnen müßten gemäß 1. analoge Teilmengen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ von $\mathfrak{T}$ entsprechen, was aber einen Widerspruch darstellt.

3. Hilfssatz: *Einem Quadrat kann bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung nicht eine Strecke entsprechen.* Zieht man nämlich im Quadrat eine zu zwei Seiten parallele Gerade, so entspricht ihr eine zusammenhängende Teilmenge der Strecke. Von Geraden dieser Art ohne gemeinsame Punkte gibt es im Quadrat eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$, während auf der Strecke nur eine abzählbare Menge solcher Teilstrecken liegen kann.

4. *Der Begriff der einfachen geschlossenen Kurve und die durch sie bewirkte Gebietsteilung sind invariant,* d. h. dem Inneren und Äußeren der Kurve entspricht das Innere und Äußere der Bildkurve.

Der erste Teil des Satzes ist nichts anderes als der Inhalt von § 11 und § 12, der sich also auch als Aussage einer invarianten Eigenschaft auffassen läßt. Der Beweis des zweiten Teiles ergibt sich folgendermaßen.

Seien C und C' die beiden Kurven, $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}'$ die inneren und äußeren Gebiete, endlich m und m_1 zwei Punkte von $\mathfrak{J}$, und m' resp. m_1' ihre Bildpunkte. Dann ist m mit m_1 durch einen Streckenzug $\mathfrak{w}$ verbindbar, der keinen Punkt von C enthält. Ihm entspricht in der Bildebene ein einfacher Kurvenbogen $\mathfrak{w}'$, der keinen Punkt von C' enthält. Nun sei der Abstand

$$\varrho(\mathfrak{w}', C') = \eta',$$

*) Vgl. C. Jordan, Cours d'analyse, Bd. 1, S. 46, sowie meinen Bericht, S. 115.

so kann man wegen der Stetigkeit der Abbildung eine Größe δ bestimmen, so daß, falls p, p_1 und p', p_1' entsprechende Punkte sind,

$$\varrho(p', p_1') < \eta' \text{ wird, falls } \varrho(p, p_1) < \delta$$

gewählt wird. Erfüllt man nun den Streckenzug $\mathfrak{w}$ so mit einer Zahl konsekutiver Punkte m_i, daß

$$\varrho(m_i, m_{i+1}) < \delta$$

ist, so wird für die auf $\mathfrak{w}'$ liegenden Bildpunkte

$$\varrho(m_i', m_{i+1}') < \eta'$$

sein. Die Strecken $m_i' m_{i+1}'$ haben daher keinen Punkt mit C' gemein und bestimmen daher einen Streckenzug, der ganz zu $\mathfrak{J}'$ oder ganz zu $\mathfrak{A}'$ gehört. Daß nunmehr $\mathfrak{J}'$ dem $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}'$ dem $\mathfrak{A}$ entspricht, folgt ebenfalls aus der Stetigkeit der Abbildung.*)

5. *Der Begriff der geschlossenen Kurve und der durch sie bewirkten Gebietsteilung ist invariant.*

Dies läßt sich auf Grund des vorstehenden Satzes leicht beweisen. Sei nämlich $\mathfrak{T}$ eine geschlossene Kurve, $\mathfrak{T}'$ ihr Abbild, und $\mathfrak{J}$ resp. $\mathfrak{A}$ das Innere und Äußere der durch $\mathfrak{T}$ bewirkten Gebietsteilung. Ferner sei P ein Polygon, das $\mathfrak{T}$ von innen approximiert, so entspricht ihm eine einfache geschlossene Kurve C' und dem Inneren $\mathfrak{J}(P)$ entspricht das Innere $\mathfrak{J}(C')$; ebenso folgert man leicht aus Satz 4., daß, wenn P und P_ν zwei solche Polygone sind und P_ν außerhalb von P liegt, auch die Bildkurve C_ν' von P_ν außerhalb der Bildkurve C' von P liegt. Dem Gebiete $\mathfrak{J}$, zu dem jeder Punkt eines $\mathfrak{J}(P_\nu)$ gehört, entspricht daher ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}'$, dem jeder Punkt eines $\mathfrak{J}(C_\nu')$ angehört.

Nun ist jeder Punkt von $\mathfrak{T}$ Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}$, und da, wie eben bewiesen, jedem Punkte von $\mathfrak{J}$ ein Punkt von $\mathfrak{J}'$ entspricht, so ist auch jeder Punkt von $\mathfrak{T}'$ Grenzpunkt von Punkten von $\mathfrak{J}'$. Ebenso kann man die Existenz eines zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{A}'$ nachweisen, das $\mathfrak{A}$ entspricht, und daraus folgern, daß jeder Punkt von $\mathfrak{T}'$ auch Grenzpunkt von $\mathfrak{A}'$ ist. Damit ist der Beweis geliefert.

Es folgt noch, daß, wenn der Menge $\mathfrak{T}$ ein einziges Gebiet $\mathfrak{M}$ als Komplementärmenge zugehört, auch $\mathfrak{M}'$ ein einziges Gebiet ist.

6. *Der Begriff der Erreichbarkeit ist ein invarianter Begriff.*

Ist nämlich ein Punkt t für einen Punkt m eines Gebietes $\mathfrak{M}$ erreichbar, so entspricht ihm nach dem vorigen Satze ein Punkt m' eines Gebietes $\mathfrak{M}'$, zu dessen Grenze t' notwendig gehört. Das Weitere folgt aus den Ausführungen von § 11 und 12.

---

*) Die Ebene $\mathfrak{E}$ ist hier und sonst immer die Ebene der Funktionentheorie, die einen unendlich fernen Punkt enthält.

7. *Bei einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{T}$ ist ihre Struktur sowie die durch sie bewirkte Gebietsteilung invariant.*

Sei zunächst $\mathfrak{T}$ eine nirgends dichte Menge. Man hat allgemein*)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{A} + \Sigma \mathfrak{J}_\nu,$$

wo $\mathfrak{A}$ das äußere Gebiet ist, und $\mathfrak{J}_\nu$ die einzelnen inneren Teilgebiete sind, deren Zahl endlich oder abzählbar ist. Ist dann $\mathfrak{T}_\nu$ Grenzmenge von $\mathfrak{J}_\nu$, so folgert man, wie im Beweis von 5., daß es ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{J}_\nu'$ gibt, so daß seine Grenze diejenige Teilmenge $\mathfrak{T}_\nu'$ von $\mathfrak{T}'$ ist, die $\mathfrak{T}_\nu$ entspricht. Andererseits entspricht jedem gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_\nu$ ein gemeinsamer Punkt von $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}_\nu'$; wenn also $\mathfrak{J}_\mu$ und $\mathfrak{J}_\nu$ gemeinsame Grenzpunkte haben, so sind deren Bildpunkte auch gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{J}_\mu'$ und $\mathfrak{J}_\nu'$. Ebenso ist klar, daß einem Punkte von $\mathfrak{T}_\nu$, der Grenzpunkt *nur* von $\mathfrak{J}_\nu$ ist, ein Punkt von $\mathfrak{T}_\nu'$ entspricht, der Grenzpunkt *nur* von $\mathfrak{J}_\nu'$ ist Damit ist die Invarianz der Struktur und Gebietsteilung in diesem Falle bewiesen.

Enthält $\mathfrak{T}$ auch überall dichte Bestandteile, so sei U ein solcher. Er wird notwendig von einer geschlossenen Kurve $\mathfrak{T}_1$ eingeschlossen. Ihr entspricht eine Bildkurve $\mathfrak{T}_1'$ und dem Inneren U von $\mathfrak{T}_1$ entspricht das Innere U' von $\mathfrak{T}_1'$. Damit ist auch in diesem Falle der Beweis geliefert.

Nunmehr ist es auch leicht, den allgemeinsten Satz dieser Art zu beweisen, der aussagt:

8. *Für jede beliebige Menge $\mathfrak{T}$ bleibt ihre Struktur und die durch sie bewirkte Gebietsteilung bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung invariant.*

Der Satz ist nur noch für den Fall zu beweisen, daß $\mathfrak{T}$ keine zusammenhängende Menge ist, bedarf aber kaum noch eingehender Begründung. Er folgt unmittelbar daraus, daß die Einteilung der Mengen nach ihrer Struktur, wie sie im zweiten Beitrag enthalten ist, in erster Linie darauf beruht, ob und wie $\mathfrak{T}$ in perfekte Teilmengen zerlegbar ist. Sind nun $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zwei perfekte Teilmengen von $\mathfrak{T}$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so zerfällt auch $\mathfrak{T}'$ in zwei perfekte Mengen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Ebenso müssen die weiteren Unterteilungen bei beiden Mengen in gleicher Art möglich sein, insbesondere folgt auch, daß jeder zusammenhängenden Grenzmenge $\mathfrak{T}_\omega$ der zusammenhängenden, aber isolierten Mengen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \cdots, \mathfrak{T}_\nu, \cdots$ eine zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}_\omega'$ entspricht, die Grenzmenge der Bildmengen $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2', \cdots, \mathfrak{T}_\nu', \cdots$ ist; in der Tat muß zu jedem Punkte t_ν, der Grenzpunkt von $\{t_\nu\}$ ist, ein Bildpunkt t_ν' gehören, der Grenzpunkt von $\{t_\nu'\}$ ist. Daher muß auch die im zweiten Beitrage gegebene Analyse für beide

*) Vgl. Beitrag I, diese Ann. Bd. 58, S. 211.

Mengen dieselbe sein. Endlich muß also auch die Zusammenhangsart und Zusammenhangszahl der Gebiete invariant sein, in die die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$ zerfällt. Ist insbesondere $\mathfrak{T}$ eine Menge vom zweiten Typus, d. h. eine solche, die immer wieder in Teilmengen zerlegbar ist, deren keine zusammenhängend ist, so muß es auch die Menge $\mathfrak{T}'$ sein.

9. Ich schließe mit der nachstehenden wichtigen Folgerung. Die Wege $\mathfrak{l}$, die wir von einem Punkte m zu einem Punkte t legten, waren in § 4 gewissen Bedingungen und Festsetzungen unterworfen worden. Wir können aber jetzt zeigen, daß die mit solchen Wegen abgeleiteten Sätze bestehen bleiben, wenn an die Stelle dieser Wege einfache Kurvenbögen treten. Hat man z. B. eine einfache geschlossene Kurve C, und zwei einfache Kurvenbögen $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$, die von einem inneren Punkte m zu zwei Kurvenpunkten c_1 und c_2 führen, so können wir diese Figur gemäß § 13 umkehrbar stetig und eindeutig auf eine andere so abbilden, daß C wieder durch eine einfache Kurve C' ersetzt wird, während den beiden Kurvenbögen zwei Wege $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_2'$ entsprechen, die von einem inneren Punkte m' zu den Punkten c_1' und c_2' führen. Dann folgt aus den obigen Sätzen, daß $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ für $\mathfrak{J}(C)$ dieselbe Gebietsteilung bewirken, wie $\mathfrak{l}_1'$ und $\mathfrak{l}_2'$ für $\mathfrak{J}(C')$. Alle Sätze der früheren Paragraphen gelten daher auch, wenn die dort benutzten Wege durch beliebige einfache Kurvenbögen ersetzt werden, die den gleichen Bedingungen der Lage unterliegen, wie die Wege $\mathfrak{l}_i$. Auf ähnliche Weise zeigt man, daß auch für die Zerlegung, die das Innere einer *beliebigen* geschlossenen Kurve erfährt, die Wege $\mathfrak{l}_i$ durch einfache Kurvenbögen ersetzbar sind, und ebenso steht es mit den anderen Sätzen, in denen einfache Wege auftreten. *Alle die Begriffsbestimmungen und Sätze, die ursprünglich aus methodischen Gründen zunächst für einfache Polygone und Streckenzüge besonderer Art aufgestellt oder abgeleitet wurden, bleiben also in Kraft, wenn man die Polygone durch einfache Kurven und die Streckenzüge und Wege durch einfache Kurvenbögen ersetzt.**)

Umgekehrt folgt noch aus § 13, daß man jede beliebig gegebene ebene Menge umkehrbar eindeutig auf eine solche abbilden kann, in die nur Strecken und Streckenzüge eingehen. Die aus lauter polygonalen Bestandteilen aufgebauten Mengen stellen daher nicht etwa nur den einfachsten Fall, sondern zugleich den allgemeinsten Typus der möglichen Gestalten dar.

*) Eine endliche Bogenlänge brauchen diese Wege oder Kurvenbögen nicht zu haben; ein Beispiel liefert Fig. 3.

Über die Gestalt der auf algebraischen Kurven nirgends singulären linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung.

(Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Schreiben.)

Von

G. Herglotz in Göttingen.

Es war kürzlich von Ihnen bemerkt worden, daß die formentheoretische Gestalt der auf einer singularitätenfreien $C_4 : f(x_1, x_2, x_3) = 0$ nirgends singulären linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung*) in ihrer überraschend einfachen Darstellung:

$$(1) \qquad (\Pi f f)_2 + \Omega \Pi = 0,$$

worin das erste Glied die 2te Überschiebung von Π über f bedeute, auch noch für eine singularitätenfreie C_n gültig sein möchte, wofern man nur einerseits statt der beliebigen ganzen Form 2ten Grades Ω, jetzt der Homogeneität der Gleichung gemäß eine beliebige ganze Form $2n - 6$ten Grades treten läßt, und andrerseits den Grad der Form Π nicht wie dort zu $-\frac{1}{2}$, sondern der Theorie der polymorphen Formen gemäß zu $-\frac{n-3}{2}$ ansetzt. Die Form Ω hängt dann mit Rücksicht auf die vermöge $f = 0$ annullierbaren Koeffizienten gerade noch von $\frac{3n(n-3)}{2} = 3p - 3$ Koeffizienten ab, der richtigen Zahl der akzessorischen Parameter.

Darf ich nun in den folgenden Zeilen einen Beweis hierfür kurz angeben und gleichzeitig die entsprechende Gestalt der nirgends singulären Differentialgleichung auch für singularitätenfreie in höheren Räumen gelegene vollständige Schnittkurven herstellen?

---

*) Vgl. hierüber den an F. Klein gerichteten Brief von P. Gordan, Math. Annalen, Bd. 46, pg. 80 (1894—95) und ferner ebenda p. 606.

1.

Singularitätenfreie Kurven in der Ebene.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar bei Beantwortung der Frage, wann denn überhaupt die zweite Überschiebung von Π über f für die verschiedenen vermöge $f=0$ möglichen Darstellungsweisen des Π das gleiche Resultat gibt. Es ist hierzu bloß nötig, daß beim Übergang von der Form zur Funktion sich $(\Pi f f)_2$ linear durch den ersten und zweiten längs der Kurve genommenen Differentialquotienten der dem Π entsprechenden Funktion ausdrückt. Diese Forderung bestimmt den Grad s von Π zu $s = -\frac{n-3}{2}$ und gleichzeitig ergibt sich dann von selbst für die Differentialgleichung eine Gestalt, deren bloßer Anblick das Fehlen jedweder Singularität dartut.

Für das Folgende bediene man sich etwa Cayleys symbolischer Schreibweise, setze also $x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = \cdots$, deute durch einen der Funktion angehängten oberen Index an, welche der Variablenreihen in ihr stehend gedacht wird, und bezeichne Determinanten wie z. B.

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial x_i^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial x_i^{(3)}} \right|, \quad (i=1,2,3)$$

kurz mit $(1\,2\,3)$.

Seien jetzt a_x, b_x, c_x drei beliebige Linearformen, so schreibt sich, bei Einführung der auf der C_n überall endlichen und nirgends verschwindenden Differentialform $-(n-3)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(2) \qquad d\omega = \frac{c_x b_{dx} - b_x c_{dx}}{(f_i b_i c_i)},$$

der erste längs der Kurve genommene Differentialquotient der Funktion $a_x^{-s}\Pi$:

$$(3) \qquad a_x^{s+1} \frac{d}{d\omega} \frac{\Pi}{a_x^s} = -(1\,2\,a_i)\Pi^{(1)} f^{(2)},$$

und hiermit der zweite:

$$(4) \quad a_x^{n+s-1} \frac{d}{d\omega} a_x^{3-n} \frac{d}{d\omega} a_x^{-s}\Pi = [(1\,2\,a_i)(1\,3\,a_i) + (1\,2\,a_i)(2\,3\,a_i)]\Pi^{(1)} f^{(2)} f^{(3)}.$$

Um nunmehr auch die zweite Überschiebung einer entsprechenden Umgestaltung zu unterwerfen, gehe man auf ihren symbolischen Ausdruck:

$$(5) \qquad (\Pi f f)_2 = (1\,2\,3)^2 \Pi^{(1)} f^{(2)} f^{(3)}$$

zurück und ziehe die Identität

$$(6) \qquad \begin{aligned} a_x(1\,2\,3) &= (2\,3\,a_i)D_1 + (3\,1\,a_i)D_2 + (1\,2\,a_i)D_3, \\ D_i &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2^{(i)}} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3^{(i)}} \end{aligned}$$

heran. Bildet man aus ihr $(123)^2$ und substituiert dies in (5), so folgt:

$$(7)\qquad \begin{aligned} a_x^2(\Pi ff)_2 = & [-2(n-1)^2(12a_i)(13a_i)+4(n-1)(s-1)(12a_i)(23a_i)]\Pi^{(1)}f^{(2)}f^{(3)} \\ & + s(s-1)\Pi(12a_i)^2 f^{(1)}f^{(2)}. \end{aligned}$$

Nach dem eingangs Gesagten sollen sich hier die beiden ersten Glieder rechts linear durch (3) und (4) darstellen; sie können offenbar bloß ein Multiplum von (4) sein. Somit muß:

$$-2(n-1)^2 = 4(n-1)(s-1)$$

oder:

$$(8)\qquad s = -\frac{n-3}{2}$$

gesetzt werden.

Dann aber kann man statt (1) auch schreiben:

$$(9)\qquad \frac{d}{d\omega}\, a_x^{2s}\, \frac{d}{d\omega}\, a_x^{-s}\, \Pi = \left(\frac{\Omega}{8(s-1)^2} + \frac{s}{8(s-1)}\, H a_x^{-2}\right) a_x^s \Pi,$$
$$H = (12a_i)^2 f^{(1)} f^{(2)},$$

und aus der Eigenschaft von $d\omega$, nirgends zu verschwinden, ist klar, daß diese Differentialgleichung auf der C_n nirgends singulär ist. Die Analogie dieser Darstellung mit der für $p = 1$, $s = 0$ unter Benutzung des Integrals I. Gattung üblichen ist ohne weiteres ersichtlich.

2.

Zwei Fälle unmittelbarer Bestimmung der akzessorischen Parameter.

Was nun die weitere Aufgabe anlangt, die akzessorischen Parameter d. i. die Koeffizienten der Form Ω so zu bestimmen, daß die Stelle $x_1:x_2:x_3$ auf der C_n sich eindeutig durch den Quotienten $\eta = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ zweier Lösungen von (1) festlegen läßt, so war von Ihnen bemerkt worden, daß sich dieselbe speziell für die von Ihnen entdeckte C_4*) mit 168 und die Wimansche C_6**) mit 360 Kollineationen in sich sehr einfach erledigt. Da nämlich die akzessorischen Parameter durch obige Forderung eindeutig bestimmt sind, muß das betreffende Ω selbst, welches für die C_4 von 2tem, für die C_6 von 6tem Grade ist, jedesmal der ganzen Kollineationsgruppe gegenüber invariant sein. Nun gibt es im ersten Fall überhaupt keine Kovariante 2ten Grades, so daß hier $\Omega \equiv 0$ ist, während im zweiten Falle die linke Seite der Kurvengleichung $f = 0$ die einzige Kovariante 6ten Grades dar-

*) Vgl. F. Klein und R. Fricke, Elliptische Modulfunktionen, Bd. 1, Kap. 6, 7.

**) Vgl. A. Wiman, Einfache Gruppe von 360 Kollineationen. Math. Annalen, Bd. 47 (1895).

stellt, so daß hier $\Omega = 0$ ist vermöge $f = 0$. Beidemale also ist die Gleichung mit eindeutig umkehrbaren Integralquotienten:

$$(\Pi f f)_2 = 0. \tag{10}$$

Dieses Resultat habe ich auf Ihre diesbezügliche Aufforderung auch ohne weiteres direkt verifizieren können, da ja in beiden Fällen die uniformisierende Variable η bekannt ist, nämlich als Dreiecksfunktion $s(2, 3, 7, J)$*) bezw. $s(2, 4, 5, J)$**) wofern als Argument J jene 168- bezw. 360-wertige Funktion der Kurve gesetzt wird, welche sie auf eine Riemannsche Fläche abbildet, deren Blätter nur bei $0, \infty, 1$ zu je $2, 3, 7$ bezw. $2, 4, 5$ zusammenhängen. Die Theorie der polymorphen Formen ergibt dann die richtige Spaltung***) dieses η. Vielleicht ist es nicht ganz überflüssig, wenigstens die betreffenden Formen Π hier explizite anzuführen. Für die C_4 hat man, unter X, Φ, Ψ die Kovarianten†) 6ten, 4ten, 21ten Grades verstanden, zu setzen:

$$J : J - 1 : 1 = \Phi^3 : \Psi^2 : -1728\, \mathsf{X}^7$$

und erhält als einen Zweig von Π

$$\Pi = \mathsf{X}^{-\frac{1}{12}} F\left(\frac{1}{84}, \frac{13}{84}, \frac{2}{3}, J\right). \tag{11}$$

Für die C_6 hat man, unter φ, ψ, R die Kovarianten††) 12ten, 30ten, 45ten Grades verstanden, zu setzen:

$$J : J - 1 : 1 = -240\,\psi^3 : 480\,R^2 : (5 + 3\sqrt{-15})\,\psi\varphi^5$$

und erhält als einen Zweig von Π

$$\Pi = \varphi^{-\frac{1}{8}} F\left(\frac{1}{40}, \frac{9}{40}, \frac{3}{4}, J\right). \tag{12}$$

Es ist dann jedesmal $(\Pi f f)_2 = 0$ eine direkte Folge der zwischen den Kovarianten bestehenden Relationen und der hypergeometrischen Differentialgleichung.

---

*) Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen, l. c.

**) Vgl. R. Fricke, Einfache Gruppe von 360 Operationen, Gött. Nachr. (1896). Dsgl. Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 5.

***) Vgl. Fricke-Klein, Automorphe Funktionen, Bd. 2, pg. 228 ff.

†) Ihre genauere Definition siehe: Klein-Fricke, Elliptische Modulfunktionen, Bd. 1, Kap. 7.

††) Ihre genauere Definition siehe: P. Gordan, Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems. Math. Annalen, Bd. 62 (1906).

3.

Singularitätenfreie, vollständige Schnittkurven in höheren Räumen.

Was nun jene Kurven anlangt, welche nicht in eine ebene singularitätenfreie C_n eineindeutig transformierbar sind, so wird man sicher eine (1) analoge einfache Gestalt der nirgends singulären Differentialgleichung erhalten, wenn man die Kurve auf eine in einem höheren Raume gelegene singularitätenfreie Kurve bezieht (als welche etwa die Normalkurve der φ_i dienen kann) und an diese die Differentialgleichung anschließt. Dies gelingt nun natürlich leicht, wenn jene Kurve als der vollständige Schnitt einer der Dimension entsprechenden Anzahl algebraischer Flächen dargestellt werden kann, was von der Normalkurve der φ_i bis jetzt wenigstens für $p = 4$ und $p = 5$ feststeht.

Möge etwa im R_4 durch den Schnitt der Flächen:

$$u(x_1 \cdots x_5) = 0, \; v(x_1 \cdots x_5) = 0, \; w(x_1 \cdots x_5) = 0 \tag{13}$$

von den Ordnungen l, m, n eine singularitätenfreie Kurve gegeben sein, und für diese die Differentialgleichung der unverzweigten polymorphen Formen $\Pi(x_1 \cdots x_5)$ von dem noch zu bestimmenden Grade s gesucht werden.

In Analogie zu dem Früheren wird man auch hier Ω als beliebige quadratische ganze Form der φ_i ansetzen, als welche es dann nach einem bekannten Satze gerade von $3p - 3$ Parametern abhängt. Da nun die φ_i hier mit der Gesamtheit aller ganzen Formen $(l+m+n-5)^{\text{ten}}$ Grades zusammenfallen, so ist Ω einfach eine beliebige ganze Form $2(l+m+n-5)^{\text{ten}}$ Grades. Demgemäß hat man sich nunmehr aus u, v, w, Π Überschiebungen vom Grade $2(l+m+n-5) + s$ zu bilden.

Es reichen, wie der Erfolg lehrt, die folgenden aus:

$$A_i(\Pi) = (1357\,\overline{2i})\,(2467\,\overline{2i-1})\,u^{(1)}u^{(2)}v^{(3)}v^{(4)}w^{(5)}w^{(6)}\Pi^{(7)}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Setzt man jetzt, unter λ, μ, ν passend zu wählende Konstanten verstanden, die nirgends singuläre Differentialgleichung versuchsweise in der Form an:

$$\lambda A_1(\Pi) + \mu A_2(\Pi) + \nu A_3(\Pi) + \Omega \Pi = 0, \tag{15}$$

so führt auch wieder genau die unter 1. durchgeführte Überlegung zu dem gewünschten Ziele. Versteht man nämlich auch hier unter a_x, b_x, c_x drei beliebige Linearformen, unter:

$$d\omega = \frac{c_x b_{dx} - c_{dx} b_x}{(u_i\, v_i\, w_i\, b_i\, c_i)} \tag{16}$$

das überall endliche und nirgends verschwindende Differential, und geht

von der Form Π zur Funktion Πa_x^{-s} über, so zeigt sich zunächst, daß nur für:

$$\lambda = \frac{1}{l-1}, \quad \mu = \frac{1}{m-1}, \quad \nu = \frac{1}{n-1}, \quad s = -\frac{l+m+n-5}{2} \tag{17}$$

die Gleichung (15) einen von der jeweiligen Darstellungsweise des Π unabhängigen Sinn erhält, und sich weiter, wenn die Festsetzung (17) getroffen ist, in die Gestalt setzen läßt:

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\omega}\, a_x^{2s} \frac{d}{d\omega}\, a_x^{-s}\Pi = \left(\frac{\Omega}{4(s-1)} + \frac{s}{4}\, H a_x^{-2}\right) a_x^{s}\Pi, \\ H = \left(\frac{(1352)\,(2461)}{l-1} + \frac{(1354)\,(2463)}{m-1} + \frac{(1356)\,(2465)}{n-1}\right) u^{(1)} \cdots w^{(6)}, \end{gathered} \tag{18}$$

wo nunmehr aus der Eigenschaft von $d\omega$, nirgends zu verschwinden, sofort klar ist, daß diese Differentialgleichung auf der Kurve nirgends singulär ist. Auch hier ist ferner der gefundene Grad von Π in Übereinstimmung mit der allgemeinen Tatsache, daß Π, an den Formen φ_i gemessen, vom Grade $-\frac{1}{2}$ sein muß.

Wien, Dezember 1905.

Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.*)

II. Mitteilung.

Von

A. Mayer in Leipzig.

Bei meiner ersten Mitteilung über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz**) hatte ich nur den einen Zweck im Auge, für das vorgelegte Problem der Variationsrechnung diejenige bestimmte Form dieses Satzes zu gewinnen, welche die Weierstraßsche E-Funktion auf das besondere Extremalenfeld bezieht, das unmittelbar zu dem Jacobischen Kriterium der konjugierten Punkte führt.***) Erst vor kurzem fiel mir auf, daß diese besondere, allerdings aber auch besonders wichtige Form des Satzes im wesentlichen darauf hinausläuft, daß man die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung des Problems durch die Jacobi-Hamiltonsche Methode vollständig integriert. Damit wurde mir aber auch sofort von vornherein klar, daß man zur allgemeinen Lösung derjenigen Hilbertschen Aufgabe, auf deren Erledigung sich der Unabhängigkeitssatz gründet†), müsse kommen können, sobald man nur die allgemeine Cauchysche Methode††) an Stelle jener speziellen Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichung des Problems benutzt, und die Durchführung dieses Gedankens zeigte, daß die so erhaltene Lösung in der Tat alle möglichen Lösungen jener Aufgabe umfaßt, ja sogar allgemeiner ist als

*) Etwas veränderter Abdruck aus den Leipziger Berichten vom 1. Mai 1905.

**) Diese Annalen, Bd. 58, p. 235—248.

***) Vergl. Bolza, Lectures on the calculus of variations, Chicago 1904, p. 91, 60, 82. Die Überschrift des § 3 in meiner ersten Note ist hiernach nicht richtig gewählt und müßte vielmehr etwa so lauten: „Loslösung des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes von der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung“.

†) Ich habe früher die Lösung dieser Aufgabe geradezu als identisch mit dem Unabhängigkeitssatze selbst betrachtet, weil dieser unmittelbar aus ihr folgt. Es ist aber doch klarer und auch richtiger, beides auseinanderzuhalten.

††) Vergl. diese Annalen, Bd. 3, p. 447/8.

der Unabhängigkeitssatz selbst. Diese Resultate sollen unabhängig von den früheren, und ohne die Cauchysche Methode als bekannt vorauszusetzen, im folgenden entwickelt werden.

§ 1.

Der Zusammenhang des Problems der Variationsrechnung mit dem Probleme von Hilbert.

Wie früher handelt es sich auch jetzt wieder um das Problem der Variationsrechnung:

I. *Unter allen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ von x, die $r < n$ gegebenen, nach r von den Differentialquotienten $y_1', \cdots, y_n'$ auflösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \cdots, r) \tag{1}$$

genügen, in den beiden gegebenen Grenzen x_0 und $x_1 > x_0$ feste Werte besitzen, und zwischen diesen Grenzen stetig bleiben, diejenigen zu finden, für welche das vorgelegte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\,dx$$

einen größten oder kleinsten Wert erreicht.

Dieses Problem wird gelöst durch die $n + r$ Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0, \tag{2}$$

in denen

$$\Omega \equiv f + \sum_1^r {}_\varrho\, \lambda_\varrho f_\varrho \tag{3}$$

ist, und möglich und bestimmt kann es nur dann sein, wenn die $n + r$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = v_i, \quad f_\varrho = 0 \tag{4}$$

auflösbar sind nach den $n + r$ Unbekannten:

$$y_1', \cdots, y_n', \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_r.$$

Es seien:

$$\begin{cases} y_i' = p_i(x, y_1, \cdots, y_n, v_1, \cdots, v_n), \\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, v_1, \cdots, v_n) \end{cases} \tag{5}$$

diese Auflösungen, und durch ihre Substitution werde:

(6) $$\sum_1^n y_i' \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} - \Omega = H(x, y_1, \cdots, y_n, v_1, \cdots, v_n).$$

Mit dieser Gleichung genügen dann die Werte (5) zugleich auch identisch den Gleichungen:

$$y_i' = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Die Einführung der Variabeln v an Stelle der Differentialquotienten y' und der Multiplikatoren λ verwandelt daher die Differentialgleichungen (2) in die $2n$ kanonischen Differentialgleichungen:

(7) $$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Aus jedem System Lösungen:

$$y_i = y_i(x), \quad \lambda_\varrho = \lambda_\varrho(x)$$

der Differentialgleichungen (2) erhält man hiernach, indem man dasselbe in die Gleichungen:

$$v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

substituiert, ein entsprechendes System Lösungen

$$y_i = y_i(x), \quad v_i = v_i(x)$$

der Differentialgleichungen (7), und umgekehrt liefert jedes System Lösungen dieser letzteren Differentialgleichungen, wenn man es in die r letzten Gleichungen (5) einsetzt, wieder ein System Lösungen der Differentialgleichungen (2), *welches für die betreffenden Lösungen der Differentialgleichungen* (7) *zugleich den Gleichungen* (5) *identisch genügt.*

Dies vorausgeschickt, zeige ich durch Einschließung in $|\,|$ an, daß statt:

$$y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r$$

geschrieben werden soll:

$$p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r,$$

definiere also:

(3') $$|\Omega| \equiv |f| + \sum_1^r{}_\varrho\, \mu_\varrho |f_\varrho|$$

und allgemein:

$$|f_\sigma| \equiv f_\sigma(x, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n),$$

und will nun den Zusammenhang untersuchen, in welchem das Problem I zu der folgenden Hilbertschen Aufgabe steht:

II. *Die Variabeln $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$ als Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck:*

$$(8) \qquad |\Omega| + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i},$$

in welchem $y_1, \cdots, y_n$ als unbestimmte Funktionen von x zu betrachten sind, ein vollständiger Differentialquotient wird, und zugleich den r Bedingungen:

$$(1') \qquad |f_\varrho| = 0$$

identisch genügt werde.

Ist (8) ein vollständiger Differentialquotient, so existiert eine Funktion V von $x, y_1, \cdots, y_n$, für welche:

$$(9) \qquad |\Omega| + \sum_1^n (y_i' - p_i) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{dV}{dx}$$

wird, und die man aus diesem Ansatz durch eine bloße Quadratur findet.

Die Forderung (9) aber zerfällt in die $1 + n$ identisch zu erfüllenden Bedingungen:

$$(10) \qquad |\Omega| - \sum_1^n p_i \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(11) \qquad \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial y_i}.$$

Verbunden mit den r Bedingungsgleichungen (1') bestimmen nun die n Gleichungen (11)

$$p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$$

als Funktionen von:

$$x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n},$$

und zwar ergeben sie der Bedeutung der Gleichungen (5) zufolge:

$$(5') \qquad \begin{cases} p_i = p_i\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial y_n}\right), \\ \mu_\varrho = \mu_\varrho\left(x, y_1, \cdots, y_n, \dfrac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial y_n}\right). \end{cases}$$

Nach der Definition (6) der Funktion H führt überdies die Substitution dieser Werte die Gleichung (10) über in die partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen V und den $n+1$ unabhängigen Variabeln $x, y_1, \cdots, y_n$:

$$(12) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Damit ist unmittelbar der Satz gewonnen:

III. *Aus jedem Funktionensystem $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$, welches die Aufgabe* II *löst, erhält man durch eine bloße Quadratur eine solche Lösung V*

der partiellen Differentialgleichung (12), *mit der jene Funktionen durch die Relationen* (5′) *verbunden sind. Und umgekehrt liefert jede Lösung V dieser partiellen Differentialgleichung, substituiert in die Gleichungen* (5′), *ein System Lösungen des Problems* II.

Weiter hat der Ausdruck (8) die Form:

$$|\Omega| + \sum_1^n{}^h (y_h' - p_h)\frac{\partial|\Omega|}{\partial p_h} \equiv B + \sum_1^n{}^h B_h y_h'.$$

Jedes System von Funktionen p und μ, das der Forderung (9) genügt, muß daher die $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen identisch erfüllen:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i} = 0.$$

Von diesen kann man wegen der letzten die n ersten ersetzen durch die folgenden n:

$$\frac{\partial B_i}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y_i} + \sum_1^n{}^h p_h\left(\frac{\partial B_i}{\partial y_h} - \frac{\partial B_h}{\partial y_i}\right) = 0.$$

Es ist aber:

$$B_h \equiv \frac{\partial|\Omega|}{\partial p_h}$$

und, indem die partiellen Differentialquotienten der Funktionen p_h sich von selbst wegheben:

$$\frac{\partial B}{\partial y_i} \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\left\{|\Omega| - \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial|\Omega|}{\partial p_h}\right\} \equiv \frac{\partial|\Omega|}{\partial y_i} + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_i}|f_\varrho| - \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial|\Omega|}{\partial p_h}.$$

Infolge der weiter noch vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (1′) lassen sich daher die Integrabilitätsbedingungen des Ausdrucks (8) so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial|\Omega|}{\partial p_i} + \sum_1^n p_h \frac{\partial}{\partial y_h}\frac{\partial|\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial|\Omega|}{\partial y_i}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\frac{\partial|\Omega|}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial|\Omega|}{\partial p_h}, \tag{14}$$

und durch Ausführung der zweiten partiellen Differentiationen werden die n ersten von ihnen:

$$(13') \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2|\Omega|}{\partial p_i \partial x} + \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial^2|\Omega|}{\partial p_i \partial y_h} + \sum_1^n{}^k \frac{\partial^2|\Omega|}{\partial p_i \partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial p_k}{\partial y_h}\right) \\ &\qquad + \sum_1^r{}^\varrho \frac{\partial|f_\varrho|}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \mu_\varrho}{\partial x} + \sum_1^n{}^h p_h \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_h}\right) = \frac{\partial|\Omega|}{\partial y_i}.\end{aligned}\right.$$

Verknüpft man andererseits die Funktionen $y_1, \cdots, y_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ von x mit irgend einem System Lösungen des Problems II durch die $n + r$ Gleichungen:

(15) $$y_k' = p_k \quad \text{und} \quad (16)\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho,$$

so liefert die Differentiation dieser Gleichungen zugleich:

$$y_k'' = \frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_1^n {}_h \frac{\partial p_k}{\partial y_h} p_h,$$

$$\lambda_\varrho' = \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial x} + \sum_1^n {}_h \frac{\partial \mu_\varrho}{\partial y_h} p_h;$$

überdies gehen $|\Omega|$ und $|f_\varrho|$ wieder über in die ursprünglichen Funktionen Ω und f_ϱ, und die Bedingungen (13') werden daher:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial x} + \sum_1^n {}_h \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial y_h} y_h' + \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i' \partial y_k'} y_k'' + \sum_1^r {}_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_i} \lambda_\varrho' = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i},$$

d. h. diese Bedingungen und die Bedingungen (1') verwandeln sich in die Gleichungen:

(2) $$\frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}, \quad f_\varrho = 0.$$

So oft also in den Gleichungen (15) und (16) $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$ solche Funktionen von $x, y_1, \cdots, y_n$ sind, welche die Bedingungen (1') und (13) identisch erfüllen, sind zugleich diejenigen Funktionen $y_1, \cdots, y_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ von x, die man durch vollständige Integration der n Differentialgleichungen (15) und Substitution der Lösungen in die Gleichungen (16) erhält, Lösungen mit n willkürlichen Konstanten der Differentialgleichungen des Problems I.

Aus Satz III folgt hiernach sofort weiter:

IV. *Jeder Lösung V der partiellen Differentialgleichung* (12) *gehört ein System Lösungen $y_1, \cdots, y_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ der Differentialgleichungen* (2) *mit n willkürlichen Konstanten zu, in bezug auf welche die Lösungen $y_1, \cdots, y_n$ voneinander unabhängig sind, und dieses System Lösungen erhält man, indem man von den mit der betreffenden Lösung V gebildeten Gleichungen* (5') *die n ersten, die ein System Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $y_1, \cdots, y_n$ und x bilden, vollständig integriert und ihre Lösungen in die r letzten Gleichungen* (5') *substituiert.*

§ 2.

Ableitung eines gewissen Systems Lösungen der Differentialgleichungen (2) mit n willkürlichen Konstanten aus den vollständigen Lösungen dieser Gleichungen.

Kehren wir nun aber zurück zu den Differentialgleichungen (2) und zu ihrer kanonischen Form (7)!

Es seien:

$$(17)\qquad y_i = \varphi_i(x, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad v_i = \psi_i(x, c_1, \cdots, c_{2n})$$

die mit Hilfe der Gleichungen:

$$v_i = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

aus irgend einem bekannten System vollständiger Lösungen:

$$(18)\qquad y_i = \varphi_i(x, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = \Theta_\varrho(x, c_1, \cdots, c_{2n})$$

der Differentialgleichungen (2) erhaltenen vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (7).

Ist dann a eine neue willkürliche Konstante oder auch nur irgend ein solcher bestimmter Wert von x, daß die $2n$ Gleichungen (17) auch für $x = a$ noch auflösbar bleiben nach ihren $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \cdots, c_{2n}$, so kann man an Stelle der letzteren die Anfangswerte:

$$a_i = \varphi_i(a, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad b_i = \psi_i(a, c_1, \cdots, c_{2n})$$

der Variabeln y_i und v_i für $x = a$ als neue willkürliche Konstanten einführen und erhält hierdurch ein neues vollständiges System Lösungen der Differentialgleichungen (7) von der Form:

$$(19)\qquad \begin{cases} y_i = y_i(x, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n), \\ v_i = v_i(x, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n), \end{cases}$$

in welchem

$$y_i(a, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \equiv a_i,$$
$$v_i(a, a_1, \cdots, a_n, b_1. \cdots, b_n) \equiv b_i$$

ist. Indem man dann weiter nach willkürlicher Wahl der Funktion:

$$A \equiv A(a, a_1, \cdots, a_n)$$

jedes:

$$b_h = \frac{\partial A}{\partial a_h}$$

setzt, entsteht aus diesem neuen vollständigen System von Lösungen selbst wieder ein neues System Lösungen der Differentialgleichungen (7):

$$(20)\qquad \begin{cases} y_i = y_i\left(x, a_1, \cdots, a_n, \dfrac{\partial A}{\partial a_1}, \cdots, \dfrac{\partial A}{\partial a_n}\right) \equiv \bar{y}_i(x, a_1, \cdots, a_n), \\ v_i = v_i\left(x, a_1, \cdots, a_n, \dfrac{\partial A}{\partial a_1}, \cdots, \dfrac{\partial A}{\partial a_n}\right) \equiv \bar{v}_i(x, a_1, \cdots, a_n), \end{cases}$$

das für $x = a$ ergibt:

$$y_i = a_i, \quad v_i = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

und diesem System entspricht das System Lösungen der Differentialgleichungen (2):

$$(21) \qquad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \cdots, a_n), \quad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho(x, a_1, \cdots, a_n),$$

dessen r letzte Gleichungen aus den r letzten Gleichungen (5) durch Substitution der Werte (20) hervorgehen. Seine n willkürlichen Konstanten $a_1, \cdots, a_n$ sind die Anfangswerte der Lösungen $y_1, \cdots, y_n$ für $x = a$, und nach p. 337 genügt es identisch den Gleichungen:

$$(5'') \qquad \begin{cases} y_i' = p_i(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n), \\ \lambda_\varrho = \mu_\varrho(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n). \end{cases}$$

Infolge der Art, wie die Gleichungen (19) aus den Gleichungen (17) und diese wieder aus den Gleichungen (18) entstanden, erhält man diese, im allgemeinen partikulären Lösungen des Systems (2) aus seinen vollständigen Lösungen (18) direkt dadurch, daß man die letzteren in die Gleichungen einführt:

$$(22) \qquad \varphi_i(a, c_1, \cdots, c_{2n}) = a_i, \quad \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right]_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

und sodann mittels dieser $2n$ Gleichungen die $2n$ Integrationskonstanten $c_1, \cdots, c_{2n}$ aus ihnen eliminiert.

§ 3.

Das erhaltene System Lösungen der Differentialgleichungen (2) entspricht im Sinne des Satzes IV einer bestimmten Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12).

Deutet man die Substitution der eben gewonnenen Lösungen (20) der Differentialgleichungen (7) durch einen oberen horizontalen Strich an und definiert V durch die Formel:

$$(23) \qquad V \equiv A(a, a_1, \cdots, a_n) + \int_a^x \overline{\left\{ \sum_1^n {}^h v_h \frac{\partial H}{\partial v_h} - H \right\}}\, dx\,^{*)}$$

---

*) Das Integral in dieser Formel ist identisch mit dem, welches aus

$$\int_a^x \Omega\, dx \quad \text{oder} \quad \int_a^x f\, dx$$

durch Substitution der Lösungen (21) entsteht, während andrerseits das Folgende selbst zugleich auch die Cauchysche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichung (12) liefert.

als Funktion von $x, a_1, \cdots, a_n$, so erhält man durch partielle Differentiation nach a_k:

$$\frac{\partial V}{\partial a_k} \equiv \frac{\partial A}{\partial a_k} + \int_a^x \sum_1^n {}^h \left\{ \bar{v}_h \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{\partial \overline{H}}{\partial v_h} - \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right\} dx.$$

Nach (7) ist aber:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial v_h} \equiv \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \overline{H}}{\partial y_h} \equiv - \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial x},$$

also besitzt die Summe unter dem Integralzeichen den Wert:

$$\sum_1^n {}^h \left\{ \bar{v}_h \frac{\partial^2 \bar{y}_h}{\partial x \partial a_k} + \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right\} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}.$$

Überdies wird für $x = a$:

$$\bar{y}_h \equiv a_h, \quad \bar{v}_h \equiv \frac{\partial A}{\partial a_h}$$

und damit:

$$\left[\sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} \right]_a^x \equiv \sum_1^n {}^h \left(\bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} - \frac{\partial A}{\partial a_h} \frac{\partial a_h}{\partial a_k} \right) \equiv \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k} - \frac{\partial A}{\partial a_k},$$

es bleibt also nur:

$$(24) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_k} \equiv \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}.$$

Dies festgesetzt, seien:

$$(25) \qquad a_i = a_i(x, y_1, \cdots, y_n) \equiv (a_i)$$

die Auflösungen der n ersten Gleichungen (20), also der n Gleichungen:

$$(26) \qquad y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \cdots, a_n)$$

nach ihren n willkürlichen Konstanten $a_1, \cdots, a_n$. Die Substitution dieser Auflösungen, die durch ( ) hervorgehoben werden soll, führt die Funktion (23) über in die Funktion:

$$(27) \qquad (V) \equiv W(x, y_1, \cdots, y_n).$$

Nun reduzieren sich die Gleichungen (26) für $x = a$ auf $y_i = a_i$, daher müssen auch ihre Auflösungen (25) für $x = a$ ergeben: $a_i = y_i$. Nach (23) wird aber für $x = a$:

$$V = A(a, a_1, \cdots, a_n).$$

Die neue Funktion W besitzt also zunächst die Eigenschaft, für $x = a$ den Wert anzunehmen:

$$W = A(a, y_1, \cdots, y_n).$$

Weiter folgt aus ihrer Entstehungsart:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n {}^k \left(\frac{\partial V}{\partial a_k} \right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i},$$

also nach (24):

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n {}^h (\bar{v}_h) \sum_1^n {}^k \left(\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}\right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i}.$$

Da aber die Gleichungen (25) die Auflösungen der Gleichungen (26) sind, so hat man:

$$y_h \equiv (\bar{y}_h)$$

und damit zugleich:

$$\frac{\partial y_h}{\partial y_i} \equiv \sum_1^n {}^k \left(\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a_k}\right) \frac{\partial (a_k)}{\partial y_i};$$

man erhält also einfach:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} \equiv (\bar{v}_i). \tag{28}$$

Aus der Definition (24) folgt endlich noch:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\overline{\partial H}}{\partial y_h} - \bar{H}. \tag{29}$$

Überdies sind die Gleichungen (26) umgekehrt wieder die Auflösungen ihrer Auflösungen (25). Die Substitution der letzteren wird daher wieder aufgehoben durch die Substitution der Werte (26). Man hat daher nach (27):

$$V \equiv \bar{W}, \tag{27'}$$

und nach (28):

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial y_i} \equiv \bar{v}_i. \tag{28'}$$

Andererseits ist daher auch:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + \sum_1^n {}^h \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x},$$

oder nach (28'), und weil der obere Strich die Substitution der Lösungen (20) des Systems (7) anzeigt:

$$\frac{dV}{dx} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\overline{\partial H}}{\partial v_h},$$

und hieraus folgt nach (29) und (28'):

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + \bar{H} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial x} + H\left(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_n}\right) \equiv 0.$$

In dieser Identität kann man aber die Substitutionen (26) durch die Substitution ihrer Auflösungen (25) wieder aufheben und erkennt auf diese Weise, daß $V = W$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial V}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right) = 0. \tag{12}$$

Beachtet man schließlich noch, daß die Gleichungen (5″), denen unsere Lösungen (21) der Differentialgleichungen (2) identisch genügen, durch die Identitäten (28′) übergehen in die Gleichungen:

$$y_i' = p_i\left(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_n}\right),$$

$$\lambda_\varrho = \mu_\varrho\left(x, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_n}\right),$$

so kann man nunmehr den Satz aussprechen:

V. *Hat man die Differentialgleichungen* (2) *vollständig integriert und eliminiert nun aus den gewonnenen vollständigen Lösungen:*

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \cdots, c_{2n}), \quad \lambda_\varrho = \Theta_\varrho(x, c_1, \cdots, c_{2n})$$

die $2n$ *Integrationskonstanten* $c_1, \cdots, c_{2n}$ *mit Hilfe der* $2n$ *Gleichungen:*

$$\varphi_i(a, c_1, \cdots, c_{2n}) = a_i, \quad \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right]_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial a_i},$$

in denen a *eine neue willkürliche Konstante oder auch ein passend gewählter bestimmter Wert von* x *ist, so erhält man ein neues System Lösungen dieser Differentialgleichungen:*

$$y_i = \bar{y}_i(x, a_1, \cdots, a_n), \quad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho(x, a_1, \cdots, a_n),$$

dessen n *willkürliche Konstanten* $a_1, \cdots, a_n$ *die Anfangswerte der Variabeln* $y_1, \cdots, y_n$ *für* $x = a$ *sind, und diese neuen Lösungen der Differentialgleichungen* (2) *gehören einer bestimmten Lösung* $V = W$ *der partiellen Differentialgleichung* (12), *und zwar einer Lösung, die für* $x = a$ *den Wert*

$$W = A(a, y_1, \cdots, y_n)$$

annimmt, in solcher Weise zu, daß sie für $V = W$ *den* $n + r$ *Gleichungen* (5′) *identisch genügen.*

§ 4.

Tragweite des Satzes V.

Lassen wir im Vorhergehenden den Anfangswert a von x ganz willkürlich, so können wir die Formel (23) auch nach a partiell differentiieren*) und erhalten dann auf demselben Wege, der zur Formel (24) führte, zunächst:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} - \left[\sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\overline{\partial H}}{\partial v_h} - \overline{H}\right]_{x=a} + \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a} - \left[\sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}\right]_{x=a},$$

d. h., da für $x = a$:

*) Die folgende Rechnung ist im wesentlichen dieselbe, die zu der zweiten Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung des Problems I führt.

$$\bar{y}_h = a_h, \quad \bar{v}_h = \frac{\partial A}{\partial a_h}, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_h} = \left[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x}\right]_{x=a}$$

wird:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \cdots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \cdots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) + \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}$$

$$- \sum_1^n {}^h \frac{\partial A}{\partial a_h}\left[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}\right]_{x=a}.$$

Nunmehr aber hat $\bar{y}_h$ die Form:

$$\bar{y}_h \equiv \bar{y}_h(x, a, a_1, \cdots, a_n).$$

Aus $a_h \equiv [\bar{y}_h]_{x=a}$ folgt daher durch partielle Differentiation nach a:

$$0 \equiv \frac{\partial a_h}{\partial a} \equiv \left[\frac{\partial \bar{y}_h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}\right]_{x=a},$$

und demnach bleibt nur:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \cdots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \cdots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right) + \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a}.$$

Andererseits erhält man indirekt aus der Formel

(27′) $$V \equiv \overline{W}$$

durch partielle Differentiation nach a:

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial a} + \sum_1^n {}^h \frac{\overline{\partial W}}{\partial y_h} \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a},$$

oder nach (28′)

$$\frac{\partial V}{\partial a} \equiv \frac{\overline{\partial W}}{\partial a} + \sum_1^n {}^h \bar{v}_h \frac{\partial \bar{y}_h}{\partial a},$$

und der Vergleich dieser beiden Werte von $\frac{\partial V}{\partial a}$ liefert sofort die Formel:

(30) $$\frac{\overline{\partial W}}{\partial a} \equiv \frac{\partial A}{\partial a} + H\left(a, a_1, \cdots, a_n, \frac{\partial A}{\partial a_1}, \cdots, \frac{\partial A}{\partial a_n}\right).$$

Ist daher im besondern die von a freie Funktion:

$$V = A(x, y_1, \cdots, y_n)$$

selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (12), so ergibt sich:

$$\frac{\overline{\partial W}}{\partial a} \equiv 0,$$

und damit zugleich, wenn man die Substitution der Lösungen (26) durch die Substitution ihrer Auflösungen (25) wieder aufhebt,

$$\frac{\partial W}{\partial a} \equiv 0,$$

d. h. es ist dann auch die aus (23) abgeleitete neue Lösung $V = W$ der

partiellen Differentialgleichung (12) frei von a. Sie erhält aber für $x = a$ den Wert

$$W = A(a, y_1, \cdots, y_n),$$

und fällt also, da jede von der willkürlichen Konstante a freie Funktion $F(x, y_1, \cdots, y_n)$ bereits unmittelbar gegeben ist durch ihren Wert $F(a, y_1, \cdots, y_n)$ für $x = a$, überhaupt zusammen mit der Lösung

$$V = A(x, y_1, \cdots, y_n).$$

Um daher ein System Lösungen der Differentialgleichungen (2) zu erhalten, das für eine beliebig gegebene Lösung

$$V = F(x, y_1, \cdots, y_n)$$

der partiellen Differentialgleichung (12) den Gleichungen (5′) genügt, braucht man nur im Satze V die Konstante a ganz willkürlich zu lassen und

$$A(a, a_1, \cdots, a_n) \equiv F(a, a_1, \cdots, a_n)$$

zu nehmen.

Nach Satz III hängt aber jedes System Lösungen $p_1, \cdots, p_n$, $\mu, \cdots, \mu_r$ des Problems II mit einer Lösung V der partiellen Differentialgleichung (12) durch die Gleichungen (5′) zusammen, und nach Satz IV entspricht jeder solchen Lösung V ein System Lösungen $y_1, \cdots, y_n$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ der Differentialgleichungen (2), das den Gleichungen (5′) genügt. Man sieht somit:

VI. *Nach vollständiger Integration der Differentialgleichungen* (2) *gestattet Satz* V *überhaupt jedes System Lösungen dieser Differentialgleichungen zu erhalten, welches mit irgend einem System Lösungen des Problems* II *in den Beziehungen steht:*

$$(\alpha) \qquad y_i' = p_i, \quad \lambda_\varrho = \mu_\varrho.$$

Und zwar ergibt sich zur gleichzeitigen Auffindung solcher zusammengehöriger Lösungen der Differentialgleichungen (2) und des Problems II aus dem Satze V und den Identitäten (28) zunächst unmittelbar die folgende Regel:

Nachdem man der Vorschrift des Satzes V gemäß aus den vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen (2) das neue System Lösungen:

$$(21) \qquad x_i = \bar{y}_i(x, a_1, \cdots, a_n), \quad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho(x, a_1, \cdots, a_n)$$

dieser Gleichungen abgeleitet hat, substituiert man diese neuen Lösungen in die partiellen Differentialquotienten der Funktion Ω nach den y_i' und eliminiert aus den so erhaltenen Werten

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i'} = \bar{v}_i(x, a_1, \cdots, a_n)$$

die n Konstanten $a_1, \cdots, a_n$ mittels der n ersten Gleichungen (21). Hat sich hierdurch ergeben:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = (\bar{v}_i) \equiv w_i(x, y_1, \cdots, y_n),$$

so löst man diese n Gleichungen zusammen mit den r gegebenen Bedingungsgleichungen des Problems I:

$$(1) \qquad f_\varrho = 0$$

nach den $n + r$ Unbekannten $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ auf. Die Auflösungen (α) dieser $n + r$ Gleichungen bilden dann ein System Gleichungen, denen die Lösungen (21) identisch genügen, und deren rechte Seiten zugleich Lösungen des Problems II sind.

Die Berechnung der Werte der partiellen Differentialquotienten von Ω ist jedoch nur ein unnötiger Umweg.

Die Lösungen (21) genügen nämlich einerseits den Gleichungen (1) und (β), andererseits aber selbstverständlich auch den Gleichungen:

$$(\gamma) \qquad y_i' = \frac{\partial \bar{y}_i}{\partial x}, \qquad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho.$$

Mit den letzteren Gleichungen befriedigen sie daher zugleich diejenigen, die aus diesen Gleichungen entstehen, wenn man $a_1, \cdots, a_n$ mit Hilfe der n ersten Gleichungen (21) eliminiert, also müssen die auf diese Weise erhaltenen Werte der y_i' und λ_ϱ ausgedrückt in den Variabeln $x, y_1, \cdots, y_n$, notwendig zusammenfallen mit den Auflösungen (α) der Gleichungen (1) und (β).

Man erhält demnach diejenigen Lösungen des Problems II, mit denen die Lösungen (21) der Differentialgleichungen (2) durch die Formeln (α) verbunden sind, einfach dadurch, daß man in den aus (21) folgenden Gleichungen (γ) für $a_1, \cdots, a_n$ die Auflösungen der n ersten Gleichungen (21) einsetzt.

§ 5.

Die Grenzen der Anwendbarkeit des Unabhängigkeitssatzes selbst.

Die in meiner ersten Mitteilung gewonnenen besonderen zusammengehörigen Lösungen der Differentialgleichungen (2) und des Problems II existieren ebenso wie die Jacobi-Hamiltonsche Lösung der partiellen Differentialgleichung (12) nur, solange das Problem I wirklich möglich und bestimmt ist, solange also die vollständigen Lösungen

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \cdots, c_{2n})$$

seiner Differentialgleichungen gerade $2n$ Integrationskonstanten in solcher Art enthalten, daß man diesen Lösungen für zwei gegebene Werte von x fest gegebene Werte vorschreiben kann. Satz V dagegen setzt nur voraus,

daß die $n+r$ Gleichungen (4) auflösbar seien nach den $n+r$ Unbekannten $y_1', \cdots, y_n', \lambda_1, \cdots, \lambda_r$, oder daß das System Differentialgleichungen (2) wirklich von der Ordnung $2n$ sei, und er gilt unter dieser Voraussetzung auch dann noch, wenn die vollständigen Lösungen $y_1, \cdots, y_n$ dieser Differentialgleichungen weniger als $2n$ willkürliche Konstanten enthalten. Dies tritt im besonderen immer dann ein, wenn im Problem I die Funktion f ein vollständiger Differentialquotient ist. Daraus folgt aber leider noch durchaus nicht, daß ein *Hilbertscher Unabhängigkeitssatz* auch für das folgende Problem der Variationsrechnung existierte:

VII. *Unter allen stetigen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ von x, die $r < n$ gegebenen, nach $y_1', \cdots, y_r'$ auflösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$f_\varrho(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0,$$
$$(\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

genügen, und von denen die $n-1$ letzten für zwei gegebene Werte x_0 und $x_1 > x_0$ von x gegebene Werte besitzen, während von y_1 nur der Wert für $x = x_0$ fest vorgeschrieben ist, diejenigen zu finden, denen ein größter oder kleinster Wert dieser ersten Funktion für $x = x_1$ zugehört,

was um so auffallender ist, als es bekanntlich doch auch in diesem Problem eine Funktion gibt, die vollständig die Rolle der Weierstraßschen E-Funktion übernimmt.

Versteht man nämlich unter $p_1, \cdots, p_n, \mu_1, \cdots, \mu_r$ irgend ein bestimmtes System Lösungen des Problems II, so bewahrt für alle, nach den Bedingungen des Problems I zulässigen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ von x, welche den Ausdruck (8), oder, was wegen der Bedingungen (1′) dasselbe ist, den Ausdruck:

$$|f| + \sum_1^n (y_h' - p_h) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h}$$

im Integrationsintervall stetig erhalten, das Integral:

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ |f| + \sum_1^n (y_h' - p_h) \frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h} \right\} dx \tag{31}$$

unveränderlich denselben Wert, da es ja nur abhängt von den Grenzen x_0, x_1 und den Werten jener Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ an den beiden Grenzen und alle diese Grenzwerte fest gegeben sind, und dies Resultat erst ist der eigentliche *Hilbertsche Unabhängigkeitssatz.*

Für ein solches System Lösungen:

$$y_i = \bar{y}_i, \qquad \lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho$$

des Problems I aber, welches den Gleichungen:

$$y_i' = p_i, \qquad \lambda_\varrho = \mu_\varrho$$

genügt, erhält dies Integral den Wert:

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} \bar{f}\,dx.$$

Setzt man daher:

$$E \equiv f - |f| - \sum_1^n {}_h (y_h' - p_h)\frac{\partial |\Omega|}{\partial p_h}, \tag{32}$$

so kann man — immer die Stetigkeitsforderung als erfüllt vorausgesetzt — die Änderung

$$\triangle I = \int_{x_0}^{x_1} f\,dx - \int_{x_0}^{x_1} \bar{f}\,dx,$$

welche das vorgelegte Integral

$$I \equiv \int_{x_0}^{x_1} f\,dx$$

erfährt, wenn es erst mit einem bestimmten System solcher Lösungen und dann mit irgend welchen anderen, den Bedingungen des Problems I genügenden Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ gebildet wird, so ausdrücken:

$$\triangle I = \int_{x_0}^{x_1} E\,dx. \tag{33}$$

Das Problem VII dagegen, obgleich es seiner äußeren Form nach für $f \equiv y_1'$ mit dem Problem I zusammenfällt, unterscheidet sich doch dadurch ganz wesentlich von diesem, daß man bei ihm den Wert von y_1 für $x = x_1$ nicht mehr fest vorschreiben kann, sondern vielmehr notwendig ganz willkürlich lassen muß. Bezieht man daher, indem man f durch y_1' ersetzt, das Integral (31) auf das Problem VII, so bleibt sein Wert nun nicht mehr für alle mit den Problembedingungen verträglichen Funktionen $y_1, \cdots, y_n$ von x unveränderlich, sondern wird abhängig von dem Werte, den die erste dieser Funktionen für $x = x_1$ annimmt, und die fundamentale Formel (33) ist daher auf das Problem VII gar nicht mehr anwendbar.

Zur Variationsrechnung.*)

Von

David Hilbert in Göttingen.

Inhalt.

Notwendigkeit des Bestehens der Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Die Frage nach der Notwendigkeit des Lagrangeschen Kriteriums d. h. des Bestehens der durch das Vreschwinden der ersten Variation bedingten Differentialgleichungen ist insbesondere von A. Mayer**) und A. Kneser***) behandelt worden. Ich möchte hier einen strengen und zugleich sehr einfachen Weg angeben, der zu dem gewünschten Nachweise für die Notwendigkeit des Lagrangeschen Kriteriums führt.

Der Kürze halber nehme ich überall in der vorliegenden Mitteilung die gegebenen Funktionen und Differentialbeziehungen analytisch an, wodurch zugleich der analytische Charakter der zur Verwendung kommenden Lösungen gewährleistet ist.

Wir wählen ferner der angenehmeren Darstellung wegen — die Allgemeinheit der Methode wird dadurch nicht beeinträchtigt — den Fall dreier gesuchter Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ der unabhängigen Veränder-

*) Im wesentlichen unverändert abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten 1905.

**) Math. Ann., Bd. 26 und Leipziger Berichte 1895; in letzterer Note hat A. Mayer seine Begründung der Lagrangeschen Differentialgleichungen auf das allgemeinste Problem ausgedehnt.

***) Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig 1900, § 56—§ 58; daselbst ist ebenfalls das Problem in voller Allgemeinheit in Angriff genommen worden.

lichen x; zwischen ihnen und ihren ersten nach x genommenen Ableitungen

$$\frac{dy}{dx} = y'(x), \quad \frac{dz}{dx} = z'(x), \quad \frac{ds}{dx} = s'(x)$$

seien zwei Bedingungen von der Form

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(y', z', s', y, z, s; x) &= 0, \\ g(y', z', s', y, z, s; x) &= 0 \end{aligned}$$

vorgelegt. Alsdann kommt es darauf an, den folgenden Satz zu beweisen:

Es mögen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ drei besondere den Bedingungen (1) genügende Funktionen von folgender Beschaffenheit bezeichnen: für alle zwischen $x = a_1$ und $x = a_2$ liegenden Werte von x falle

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial z'} \\ \frac{\partial g}{\partial y'} & \frac{\partial g}{\partial z'} \end{vmatrix} \neq 0$$

aus; wählen wir irgend drei andere ebenfalls den Bedingungen (1) genügende Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$, für die

$$\begin{aligned} Y(a_1) &= y(a_1), \\ Z(a_1) &= z(a_1), \quad Z(a_2) = z(a_2), \\ S(a_1) &= s(a_1), \quad S(a_2) = s(a_2), \end{aligned}$$

gilt, so sei — vorausgesetzt, daß die Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$, $S(x)$ nebst ihren Ableitungen bez. von jenen besonderen Funktionen $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ und deren Ableitungen hinreichend wenig verschieden sind — stets

$$(3) \qquad Y(a_2) \geqq y(a_2);$$

ist diese Minimalforderung erfüllt, so gibt es notwendig zwei Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$, *die nicht beide identisch für alle* x *verschwinden, und die zusammen mit den Funktionen* $y(x)$, $z(x)$, $s(x)$ *die aus dem Nullsetzen der ersten Variation des Integrals*

$$\int_{a_1}^{a_2} \{\lambda f(y', z', s', y, z, s; x) + \mu g(y', z', s', y, z, s; x)\} dx$$

entspringenden Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(4) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z} = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} - \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} = 0$$

erfüllen.

Um den Nachweis dieses Satzes zu führen, nehmen wir irgend zwei bestimmte Funktionen $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, die für $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwinden, und setzen in (1) an Stelle von y, z, s bez.

$$Y = Y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$
$$Z = Z(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$
$$S = s(x) + \varepsilon_1\sigma_1(x) + \varepsilon_2\sigma_2(x)$$

ein, wo ε_1, ε_2 zwei Parameter bedeuten. Die so entstehenden Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} &f(Y', Z', S', Y, Z, S; x) = 0, \\ &g(Y', Z', S', Y, Z, S; x) = 0 \end{aligned}$$

fassen wir als ein System von zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung der zwei Funktionen Y, Z auf. Wie die Theorie der Differentialgleichungen lehrt*), gibt es wegen der Voraussetzung (2) für genügend kleine Werte von ε_1, ε_2 gewiß ein System zweier jene Gleichungen identisch in x, ε_1, ε_2 erfüllenden Funktionen

$$Y(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{und} \quad Z(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

die für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ bez. in $y(x)$, $z(x)$ übergehen und ferner für $x = a_1$ bei beliebigen ε_1, ε_2 bez. die Werte $y(a_1)$, $z(a_1)$ annehmen.

Da wegen unserer Minimumsforderung (3) $Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ als Funktion von ε_1, ε_2 gewiß für $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ ein Minimum haben muß, während zwischen ε_1, ε_2 die Gleichung

$$Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z(a_2)$$

besteht, so lehrt die Theorie des relativen Minimums einer Funktion zweier Veränderlicher, daß es notwendig zwei Konstante l, m geben muß, die nicht beide Null sind, und für welche

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial(l\,Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + m\,Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0, \\ &\left[\frac{\partial(l\,Y(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + m\,Z(a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2))}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0 \end{aligned}$$

wird, wobei jedesmal der Index 0 bedeutet, daß beide Parameter ε_1, ε_2 Null zu setzen sind.

Wir bestimmen nunmehr, was wegen (2) gewiß möglich ist, zwei Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ der Veränderlichen x, die den beiden für sie linearen homogenen Differentialgleichungen (4), (5) genügen und für die an der Stelle $x = a_2$ die Randbedingungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y'}\right]_{x=a_2} = l, \\ &\left[\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z'}\right]_{x=a_2} = m \end{aligned}$$

*) Vgl. É. Picard, Traité d'Analyse, t. III, ch. VIII.

gelten. Da l, m nicht beide Null sind, so verschwinden auch die beiden so bestimmten Funktionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ gewiß ebenfalls nicht identisch.

Durch Differentiation der Gleichungen (7) nach ε_1, ε_2 und nachheriges Nullsetzen dieser beiden Parameter erhalten wir die Gleichungen

$$\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \sigma_1' \frac{\partial f}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z} + \sigma_1' \frac{\partial g}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial g}{\partial s} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \sigma_2' \frac{\partial f}{\partial s'} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y'} + \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial y} + \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z'} + \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \frac{\partial g}{\partial z} + \sigma_2' \frac{\partial g}{\partial s'} + \sigma_2 \frac{\partial g}{\partial s} = 0,$$

wobei wiederum jedesmal der Index 0 bedeutet, daß beide Parameter ε_1, ε_2 Null zu setzen sind. Von diesen Gleichungen werden einerseits die erste und zweite bez. mit λ, μ multipliziert, die entstehenden Gleichungen addiert und dann zwischen den Grenzen $x = a_1$, $x = a_2$ integriert; andererseits werden die dritte und die vierte Gleichung bez. mit λ, μ multipliziert und die entstehenden Gleichungen addiert und dann zwischen den Grenzen $x = a_1$ und $x = a_2$ integriert. Dadurch erhalten wir

$$(10)\quad \begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2} \Big\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} \left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y} \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 \\ &\qquad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z} \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'} \sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s} \sigma_1 \Big\} dx = 0, \\ &\int_{a_1}^{a_2} \Big\{ \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} \left[\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y} \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} \left[\frac{\partial Z'}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 \\ &\qquad + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z} \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s'} \sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial s} \sigma_2 \Big\} dx = 0. \end{aligned}$$

Nun haben wir einerseits wegen der getroffenen Bestimmungen

$$Y(a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y(a_1), \quad Z(a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z(a_1)$$

und daher für die Stelle $x = a_1$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0, \quad \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0,$$

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0, \quad \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0;$$

andererseits entnehmen wir aus den Gleichungen (8) und (9) für die Stelle $x = a_2$

$$\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_1}\right]_0 = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y'} \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 + \frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial z'} \left[\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_2}\right]_0 = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf folgen aus (10) und vermöge (4), (5) mittels der Formel für die Integration eines Produktes (partieller Integration) die Gleichungen:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} \sigma_1' + \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} \sigma_1 \right\} dx = 0,$$

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} \sigma_2' + \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} \sigma_2 \right\} dx = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(\lambda\mu, \sigma) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s'} \sigma' + \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial s} \sigma \right\} dx,$$

so können wir das eben erhaltene Resultat wie folgt aussprechen: *Für irgend zwei in $x = a_1$ und $x = a_2$ verschwindende Funktionen σ_1, σ_2 gibt es stets ein nicht identisch verschwindendes Lösungssystem λ, μ der Differentialgleichungen* (4), (5), *so daß*

$$(\lambda\mu, \sigma_1) = 0 \quad \textit{und} \quad (\lambda\mu, \sigma_2) = 0$$

ausfällt.

Nehmen wir nun an, es gäbe für dieses Lösungssystem λ, μ eine Funktion σ_3, so daß die Ungleichung

$$(\lambda\mu, \sigma_3) \neq 0 \tag{11}$$

stattfindet, so bilden wir irgend ein nicht identisch verschwindendes Lösungssystem λ', μ' der Differentialgleichungen (4), (5), so daß

$$(\lambda'\mu', \sigma_3) = 0 \tag{12}$$

ausfällt. Nehmen wir wiederum an, es gäbe eine Funktion σ_4, für die die Ungleichung

$$(\lambda'\mu', \sigma_4) \neq 0 \tag{13}$$

stattfindet, so können wir unser voriges Resultat auf die Funktionen σ_3, σ_4 anwenden und erkennen daraus die Existenz eines Lösungssystemes λ'', μ'' von (4), (5), derart daß die Gleichungen

$$(\lambda''\mu'', \sigma_3) = 0, \tag{14}$$

$$(\lambda''\mu'', \sigma_4) = 0 \tag{15}$$

stattfinden. Da λ, μ; λ', μ'; λ'', μ'' Lösungen eines Systems zweier homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung sind, so müssen zwischen ihnen zwei homogene lineare Relationen von der Gestalt

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 0,$$
$$a\mu + a'\mu' + a''\mu'' = 0$$

bestehen, wo a, a', a'' Konstante bedeuten, die nicht sämtlich Null sind. Aus (11), (12), (14) würde dann aber notwendig $a = 0$ und sodann aus (13), (15) $a' = 0$ folgen, was nicht möglich ist, da ja nunmehr $a'' \neq 0$ ist und das Lösungssystem λ'', μ'' nicht identisch in x verschwindet.

Unsere Annahmen sind daher unzutreffend und wir schließen daraus, daß entweder λ, μ oder λ', μ' ein solches System von Lösungen von (4), (5) ist, daß die betreffende Integralbeziehung

$$(\lambda\mu, \sigma) = 0 \quad \text{bez.} \quad (\lambda'\mu', \sigma) = 0$$

für jede Funktion σ gilt. Die Anwendung der Produktintegration (partiellen Integration) auf diese Beziehung zeigt dann, daß für das Lösungssystem λ, μ bez. λ', μ' notwendig die Gleichung (6) gelten muß, und damit ist der gewünschte Nachweis vollständig erbracht.

Unabhängigkeitssatz und Jacobi-Hamiltonsche Theorie des zugehörigen Integrationsproblems.

In meinem Vortrage*) „Mathematische Probleme" habe ich zur Aufstellung der weiteren notwendigen und hinreichenden Kriterien in der Variationsrechnung folgende Methode angegeben:

Es handle sich um das einfachste Problem der Variationsrechnung, nämlich das Problem, eine Funktion y der Veränderlichen x derart zu finden, daß das Integral

$$J = \int_a^b F(y', y;\ x)\, dx, \quad \left[y' = \frac{dy}{\partial x}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt $y(x)$ andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten in das Integral einsetzen.

Wir betrachten nun das Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y' - p) F_p\}\, dx$$

$$\left[F = F(p, y;\ x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, y;\ x)}{\partial p}\right]$$

und wir fragen, wie darin p als Funktion von x, y zu nehmen ist, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege in der xy-Ebene, d. h. von der Wahl der Funktion y der Variabeln x unabhängig wird.

---

*) Gehalten auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Die Antwort ist: man nehme irgend eine einparametrige Schar von Integralkurven der Lagrangeschen Differentialgleichung

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad [F = F(y', y;\, x)]$$

und bestimme in jedem Punkte x, y den Wert der Ableitung y' der durch diesen Punkt gehenden Kurve der Schar. Der Wert dieser Ableitung y' ist eine Funktion $p(x, y)$ von der verlangten Beschaffenheit.

Aus diesem „Unabhängigkeitssatze" folgen nicht nur unmittelbar die bekannten Kriterien für das Eintreten des Minimums, sondern auch alle wesentlichen Tatsachen der Jacobi-Hamiltonschen Theorie des zugehörigen Integrationsproblems.

Für den Fall mehrerer Funktionen hat A. Mayer*) den entsprechenden Satz durch Rechnung bewiesen und seinen Zusammenhang mit der Jacobi-Hamiltonschen Theorie dargelegt. Im folgenden möchte ich zeigen, daß der Unabhängigkeitssatz noch einer allgemeineren Fassung fähig ist und auch ohne Aufwand von Rechnung, durch Zurückführung auf den soeben angegebenen und in meinem Vortrag erledigten Spezialfall sehr einfach bewiesen werden kann.

Der leichteren Faßlichkeit wegen lege ich nur zwei Funktionen $y(x)$, $z(x)$ zugrunde; das Variationsproblem bestehe darin, diese so zu wählen, daß das Integral

$$J = \int_a^b F(y', z', y, z;\, x)\,dx, \quad \left[y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt $y(x)$, $z(x)$ andere Funktionen von x mit den nämlichen gegebenen Anfangs- und Endwerten einsetzen.

Wir betrachten nun das Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx$$

$$\left[F = F(p, q, y, z;\, x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, q, y, z;\, x)}{\partial p}, \quad F_q = \frac{\partial F(p, q, y, z;\, x)}{\partial q}\right]$$

und fragen, wie darin p, q als Funktionen von x, y, z zu nehmen sind, damit der Wert dieses Integrals J^* von dem Integrationswege im xyz-Raume, d. h. von der Wahl der Funktionen $y(x)$, $z(x)$ unabhängig wird.

Um diese Frage zu beantworten, wählen wir im xyz-Raume eine beliebige Fläche $T(x, y, z) = 0$ und denken uns auf derselben die Funk-

*) Math. Ann., Bd. 58.

tionen p, q derart bestimmt, daß das Integral J^*, wenn wir dasselbe zwischen zwei Punkten der Fläche $T = 0$ über irgend eine auf $T = 0$ gelegene Kurve erstrecken, einen von der Wahl dieser Kurve unabhängigen Wert erhält. Alsdann konstruieren wir durch jeden Punkt P der Fläche $T = 0$ diejenige im xyz-Raume gelegene Integralkurve der Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad [F = F(y', z', y, z; x)],$$
$$\frac{d\frac{\partial F}{\partial z'}}{dx} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

für welche in jenem Punkte P

(16) $$y' = p, \quad z' = q$$

wird, so daß auf diese Weise eine zweiparametrige, ein räumliches Feld erfüllende Schar von Integralkurven entsteht. Wir denken uns nun für jeden Punkt x, y, z dieses Feldes die hindurchgehende Integralkurve der Schar bestimmt. *Die Werte der Ableitungen y', z' in jenem Punkte x, y, z sind dann Funktionen $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ von der verlangten Beschaffenheit.*

Um diese Behauptung zu beweisen, verbinden wir einen bestimmten Punkt A der Fläche $T = 0$ mit einem beliebigen Punkte Q des räumlichen Feldes mittels eines Weges w; durch jeden Punkt dieses Weges w denken wir uns die Integralkurve unserer zweiparametrigen Schar gelegt: die so entstehende einparametrige Schar von Integralkurven werde durch die Gleichungen

(17) $$y = \psi(x, \alpha), \quad z = \chi(x, \alpha)$$

dargestellt. Diejenigen Punkte der Fläche $T = 0$, von denen diese Integralkurven (17) ausgehen, bilden ihrerseits auf der Fläche $T = 0$ einen Weg w_T, der vom Punkte A bis zu demjenigen Punkte P auf $T = 0$ führt, von dem die durch Q laufende Integralkurve der Schar ausgeht.

Durch die einparametrige Kurvenschar (17) wird eine Fläche erzeugt, deren Gleichung

(18) $$z = f(x, y)$$

man erhält, wenn man aus den zwei Gleichungen (17) den Parameter α eliminiert.

Führen wir nun in F an Stelle von z die Funktion $f(x, y)$ ein und setzen

$$F\left(y', \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y', y, f(x, y); x\right) = \Phi(y', y; x),$$

so ist für jede auf der Fläche (18) gelegene Kurve

$$\int_a^b F(y', z', y, z; x)\,dx = \int_a^b \Phi(y', y, x)\,dx,$$

und folglich verschwindet in der xy-Ebene für jede Kurve der Schar

$$(19) \qquad y = \psi(x, \alpha)$$

gewiß auch die erste Variation des Integrals

$$(20) \qquad \int_a^b \Phi(y', y, x)\,dx,$$

d. h. die Kurvenschar (19) in der xy-Ebene ist eine Schar von Integralkurven derjenigen Lagrangeschen Differentialgleichungen, die durch das Verschwinden der ersten Variation des Integrals (20) bedingt wird. Aus der Gültigkeit des Unabhängigkeitssatzes für *eine* Funktion y folgt mithin, daß das Integral

$$(21) \qquad \int_a^b \{\Phi + (y' - p)\Phi_p\}\,dx, \quad [\Phi = \Phi(p, y; x)]$$

einen von der Wahl der Funktion y unabhängigen Wert besitzt.

Wegen

$$z' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y',$$

$$q = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} p$$

wird aber

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y' - p) = z' - q$$

und folglich haben wir

$$\begin{aligned} \Phi(p, y; x) + (y' - p)\Phi_p &= F(p, q, y, z; x) + (y' - p)\left(F_p + F_q \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= F(p, q, y, z; x) + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q. \end{aligned}$$

Die eben bewiesene Unabhängigkeit des Integrals (21) bringt es also mit sich, daß auch unser ursprüngliches Integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx$$

seinen Wert beibehält, wenn wir als Integrationsweg statt w einen anderen auf der Fläche (18) gelegenen, von A nach Q führenden Weg, nämlich etwa denjenigen Weg wählen, der sich aus dem Wege w_T und der von P ausgehenden nach Q laufenden Integralkurve der Schar (17) zusammen-

setzt. Diese Tatsache läßt sich, wenn wir noch berücksichtigen, daß auf dem Wegstücke PQ die Gleichungen (16) gelten, durch die Gleichung

$$(22)\quad \int_{(w)} \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx$$
$$= \int_{(w_T)} \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx + \int_P^Q F\,dx$$

ausdrücken.

Bezeichnen wir mit $\bar{w}$ irgend einen anderen in unserem räumlichen pq-Felde von A nach Q führenden Weg und mit $\bar{w}_T$ den entsprechenden von A nach P führenden Weg auf der Fläche $T = 0$, so folgt durch die nämlichen Überlegungen auch die Gleichung

$$(23)\quad \int_{(\bar{w})} \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx$$
$$= \int_{(\bar{w}_T)} \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx + \int_P^Q F\,dx$$

und da die ersten Integrale auf den rechten Seiten von (22) und (23) unserer Annahme zufolge, weil w_T und $\bar{w}_T$ auf $T = 0$ verlaufen, gleiche Werte haben, so folgt, daß auch die links stehenden Integrale in (22) und (23) einander gleich sind, womit unser Unabhängigkeitssatz bewiesen ist.

Die einfachste Art, auf der Fläche $T = 0$ die Funktionen p, q unserer Forderung gemäß zu wählen, besteht darin, sie aus den Gleichungen

$$(24)\qquad F - pF_p - qF_q : F_p : F_q = \frac{\partial T}{\partial x} : \frac{\partial T}{\partial y} : \frac{\partial T}{\partial z}$$

zu bestimmen; alsdann verschwindet für jeden auf $T = 0$ verlaufenden Weg der Integrand des Integrals J^* und dieses Integral hat daher auf $T = 0$ den vom Wege unabhängigen Wert Null.

Insbesondere kann man die Fläche $T = 0$ durch einen Punkt ersetzen; dann bilden die sämtlichen durch diesen Punkt laufenden Integralkurven der Lagrangeschen Differentialgleichungen eine zweiparametrige Kurvenschar, die man zur Konstruktion des räumlichen pq-Feldes zu verwenden hat.

Da das Integral J^* vom Wege unabhängig wird, so stellt dasselbe bei variabler oberer Grenze eine Ortsfunktion, d. h. eine Funktion des Endpunktes x, y, z im räumlichen pq-Felde dar; wir setzen

$$(25)\qquad J(x, y, z) = \int_A^{x,y,z} \{F + (y' - p)F_p + (z' - q)F_q\}\,dx.$$

Diese Funktion befriedigt offenbar die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial x} = F - pF_p - qF_q,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = F_p,$$

$$\frac{\partial J}{\partial z} = F_q.$$

Eliminieren wir hieraus die Größen p, q, so entsteht die „Jacobi-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung" erster Ordnung für die Funktion $J(x, y, z)$. Sind insbesondere bei der Konstruktion des räumlichen pq-Feldes die Werte von p, q auf $T = 0$ in der Weise bestimmt worden, daß der Integrand des Integrals J^* verschwindet, d. h. daß (24) besteht, so ist $J(x, y, z)$ diejenige Lösung jener Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung, die auf $T = 0$ verschwindet.

Denken wir uns die Fläche $T = 0$ einer zweiparametrigen Flächenschar angehörig und bezeichnen mit a, b die Parameter dieser Schar, so werden auch die Funktionen p, q des rämlichen Feldes und mithin auch die Funktion $J(x, y, z)$ von diesen Parametern abhängig. Die Differentiation der Gleichung (25) nach diesen Parametern a, b liefert

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int\limits_A^{x, y, z} \left\{ (y' - p) \frac{\partial F_p}{\partial a} + (z' - q) \frac{\partial F_q}{\partial a} \right\} dx,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \int\limits_A^{x, y, z} \left\{ (y' - p) \frac{\partial F_p}{\partial b} + (z' - q) \frac{\partial F_q}{\partial b} \right\} dx,$$

und da offenbar die Integranden der Integrale rechter Hand wegen (16) beim Fortschreiten auf einer Integralkurve verschwinden, so stellen diese Integrale Funktionen von x, y, z dar, die auf jeder einzelnen Integralkurve denselben Wert annehmen, d. h. die Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial a} = c,$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = d$$

sind, wenn c, d ebenso wie a, b Integrationskonstanten bedeuten, nichts anderes als die Integrale der Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Diese Hinweise mögen genügen, um zu zeigen, wie unmittelbar die wesentlichen Sätze der Jacobi-Hamiltonschen Theorie aus dem Unabhängigkeitssatze entspringen.

Übertragung der Methode des unabhängigen Integrals auf Doppelintegrale.

Wenn es sich lediglich um die Frage nach den Bedingungen des Minimums eines Integrals handelt, so bedarf es nicht der angegebenen Konstruktion eines räumlichen pq-Feldes; es genügt vielmehr eine einparametrige Schar von Integralkurven (17) der Lagrangeschen Gleichungen zu konstruieren, derart, daß die durch sie erzeugte Fläche die variierte Kurve w enthält. Die Anwendung des Unabhängigkeitssatzes für *eine* Funktion in der vorhin dargelegten Weise führt alsdann zum Ziel.

Diese Bemerkung ist von Nutzen, wenn man die Methode des unabhängigen Integrals auf das Problem übertragen will, das Minimum eines Doppelintegrals zu finden, welches mehrere unbekannte Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher enthält.

Um ein solches Problem zu behandeln, bezeichnen wir mit z, t zwei Funktionen der zwei Veränderlichen x, y und suchen diese Funktionen derart zu bestimmen, daß das über ein gegebenes Gebiet Ω der xy-Ebene zu erstreckende Doppelintegral

$$J = \int\limits_{(\Omega)} F(z_x, z_y, t_x, t_y, z, t;\, x, y)\, d\omega,$$

$$\left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad t_x = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad t_y = \frac{\partial t}{\partial y}\right]$$

einen Minimalwert erhält im Vergleich zu denjenigen Werten, die das Integral annimmt, wenn wir statt z, t irgend welche andere Funktionen $\bar{z}, \bar{t}$ einsetzen, die auf dem Rande S des Gebietes Ω die nämlichen vorgeschriebenen Werte wie z, t besitzen. Die Lagrangeschen Gleichungen, wie sie durch das Verschwinden der ersten Variation geliefert werden, lauten in diesem Falle

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial z_y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial t_x} + \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial t_y} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Nunmehr legen wir eine bestimmte Lösung z, t der Lagrangeschen Gleichungen zugrunde, und $\bar{z}, \bar{t}$ sei ein irgendwie variiertes Funktionensystem, das ebenso wie z, t die Randbedingung erfüllt. Wir bestimmen dann eine solche Funktion $S(x, y)$ der Variabeln x, y, daß die Gleichung $S(x, y) = 0$ die Randkurve von Ω in der xy-Ebene darstellt, während $S(x, y) = 1$ nur durch die Koordinaten eines einzigen Punktes innerhalb Ω erfüllt wird; endlich soll die Gleichung $S(x, y) = \alpha$, wenn α die Werte

zwischen 0 und 1 durchläuft, eine Schar von Kurven darstellen, die das Innere des Gebietes Ω einfach und lückenlos ausfüllt. Sodann bestimmen wir diejenigen Funktionen

$$(26) \qquad \begin{aligned} z &= \psi(x, y, \alpha), \\ t &= \chi(x, y, \alpha), \end{aligned}$$

die den Lagrangeschen Differentialgleichungen genügen und auf der Kurve $S(x, y) = \alpha$ die daselbst durch das variierte Funktionensystem $\bar{z}(x, y)$, $\bar{t}(x, y)$ vorgeschriebenen Werte besitzen, so daß für $\alpha = 0$ die Funktionen (26) in die zugrunde gelegte Lösung z, t übergehen. Diese Funktionen (26) bilden dann offenbar eine einparametrige Schar von Lösungssystemen der Lagrangeschen Gleichungen, für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{z}(x, y) &= \psi(x, y, S(x, y)), \\ \bar{t}(x, y) &= \chi(x, y, S(x, y)) \end{aligned}$$

identisch in x, y erfüllt sind.

Deuten wir in dem vierdimensionalen $xyzt$-Raume die zugrunde gelegte Lösung z, t der Lagrangeschen Gleichungen und ebenso das beliebig variierte Funktionensystem $\bar{z}, \bar{t}$ als eine zweidimensionale Fläche, so erzeugen in diesem $xyzt$-Raume die zweidimensionalen Integralflächen der einparametrigen Schar (26) einen dreidimensionalen Raum, dessen Gleichung sich durch Elimination von α aus (26) ergibt; die Gleichung dieses dreidimensionalen Raumes sei von der Gestalt

$$t = f(x, y, z).$$

Wir nehmen an, daß die einparametrige Schar (26) diesen dreidimensionalen Raum einfach und lückenlos ausfüllt.

Führen wir in F an Stelle von t die Funktion $f(x, y, z)$ ein und setzen

$$F\left(z_x, z_y, \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} z_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_y, \quad z, f(x, y, z); x, y\right) = \Phi(z_x, z_y, z; x, y),$$

so haben wir nur nötig, den von mir im genannten Vortrage bewiesenen Unabhängigkeitssatz für *eine* unbekannte Funktion und die daran anknüpfende Überlegung auf das Integral

$$\int\limits_{(\Omega)} \Phi(z_x, z_y, z; x, y)\, d\omega$$

anzuwenden, um zu erkennen, daß das Integral J unter der Voraussetzung einer positiven E-Funktion für das vorgelegte Funktionensystem $z(x, y)$, $t(x, y)$ wirklich einen Minimalwert annimmt. Das Eintreten des Minimums ist hiernach an folgende zwei Forderungen gebunden:

1. Konstruierbarkeit der Schar (26). Diese Forderung ist gewiß erfüllt, wenn die Lagrangeschen partiellen Differentialgleichungen stets

Systeme von Lösungen z, t besitzen, die auf einer jeden innerhalb Ω verlaufenden geschlossenen Kurve K irgendwie vorgeschriebene Werte besitzen, während sie innerhalb K reguläre Funktionen von x, y sind.

2. Einfache und lückenlose Überdeckung des dreidimensionalen Raumes durch die Schar (26). Diese Forderung ist gewiß erfüllt, wenn jedes System von Lösungen z, t der Lagrangeschen Gleichungen durch seine Randwerte auf irgend einer beliebigen innerhalb Ω verlaufenden geschlossenen Kurve K *eindeutig* bestimmt ist.

Das Resultat können wir kurz wie folgt zusammenfassen:

Unser Kriterium für das Eintreten des Minimums verlangt, daß die Randwertaufgabe für die Lagrangeschen Differentialgleichungen bezüglich einer jeden innerhalb Ω verlaufenden geschlossenen Kurve K bei beliebigen Randwerten eindeutig lösbar ist. Unsere Betrachtung zeigt, daß dieses Kriterium gewiß ein hinreichendes ist.

Wenn insbesondere in dem zu behandelnden Problem die gegebene Funktion F unter dem Integralzeichen nur vom zweiten Grade in z_x, z_y, t_x, t_y, z, t ausfällt, so werden die Lagrangeschen Differentialgleichungen linear in diesen Größen, und in diesem Falle läßt sich das zur Anwendung unseres Kriteriums erforderliche Randwertproblem vollständig mit Hilfe meiner Theorie der Integralgleichungen behandeln.

Um die in diesem Falle zur Anwendung kommende Überlegung näher zu entwickeln, bilden wir dasjenige *homogene* lineare Differentialgleichungssystem, welches aus den Lagrangeschen Gleichungen durch Fortlassen der von z, t freien Glieder entsteht; wir wollen dieses Gleichungssystem als die „Jacobischen Gleichungen" bezeichnen. Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, daß die Randwertaufgabe für eine Kurve K nur dann mehrere Lösungssysteme zuläßt, wenn die Jacobischen Gleichungen ein System von Lösungen z, t besitzen, die auf einer Kurve K, nicht aber überall innerhalb des von K begrenzten Gebietes Null sind. Nun zeigt die Theorie der Integralgleichungen, daß der letztere Fall zugleich der einzige ist, in dem die Randwertaufgabe für die Kurve K bei gewissen vorgeschriebenen Randwerten *nicht* lösbar wird.

Unser Kriterium für das Eintreten des Minimums läuft also in dem Falle eines quadratischen F auf die Forderung hinaus, daß die Jacobischen Gleichungen außer Null kein System von Lösungen z, t zulassen, die auf dem Rande S oder auf einer innerhalb von Ω verlaufenden, geschlossenen Kurve Null sind. (Das Erfülltsein des Kriteriums ist in diesem Falle auch notwendig.)

Im allgemeinen Falle, wenn die gegebene Funktion F unter dem Integralzeichen nicht speziell quadratisch, sondern beliebig von den zu bestimmenden Funktionen z, t und deren Ableitungen abhängt, haben

wir das eben ausgesprochene Kriterium auf die zweite Variation des Integrals J anzuwenden und gelangen so zu einem Kriterium, welches dem bekannten Jacobischen Kriterium im Falle *einer* unabhängigen Veränderlichen oder *einer* zu bestimmenden Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher genau analog ist und daher hier kurz als Jacobisches Kriterium bezeichnet werden möge.

Minimum der Summe eines Doppelintegrals und eines einfachen Randintegrals.

Wir behandeln endlich das Problem, die Funktion z der Veränderlichen x, y derart zu bestimmen, daß ein über ein gegebenes Gebiet Ω der xy-Ebene zu erstreckendes Doppelintegral, vermehrt um ein über einen Teil S_1 des Randes von Ω zu erstreckendes Integral, nämlich die Integralsumme

$$J = \int_{(\Omega)} F(z_x, z_y, z;\, x, y)\, d\omega + \int_{(S_1)} f(z_s, z;\, s)\, ds$$

$$\left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y},\quad z_s = \frac{dz}{ds}\right]$$

einen Minimalwert erhält, während z auf dem übrigen Teile S_2 des Randes vorgeschriebene Werte haben soll; dabei sind F, f gegebene Funktionen ihrer Argumente und s bedeutet die von einem festen Punkte an in positivem Umlauf gerechnete Bogenlänge der Randkurve S von Ω.

Das Verschwinden der ersten Variation verlangt, daß die gesuchte Funktion z als Funktion von x, y im Innern von Ω die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z_x} + \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial z_y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{27}$$

erfüllen muß, während auf dem Rande S_1 die Differentialbeziehung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_y}\right)_{S_1}\frac{dx}{ds} - \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}\right)_{S_1}\frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial z_s} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{28}$$

zu gelten hat; dabei sind unter $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ die Ableitungen der Funktionen $x(s), y(s)$ zu verstehen, die die Randkurve S_1 definieren.

Wir betrachten nun die Integralsumme

$$J^* = \int_{(\Omega)} \{F + (z_x - p)F_p + (z_y - q)F_q\}\, d\omega + \int_{(S_1)} \{f + (z_s - \pi) f_\pi\}\, ds$$

$$\left[F = F(p, q, z;\, x, y),\quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p},\quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q},\right.$$
$$\left. f = f(\pi, z;\, s),\quad f_\pi = \frac{\partial f}{\partial \pi}\right]$$

und wollen darin p, q als Funktionen von x, y, z und π als Funktion von s, z derart zu bestimmen suchen, daß der Wert dieser Integralsumme von der über Ω ausgebreiteten Fläche $z = z(x, y)$ d. h. von der Wahl der Funktion z unabhängig wird, wenn diese nur in S_2 die vorgeschriebenen Randwerte hat. Die Integralsumme J^* hat die Form

$$\int\limits_{(\Omega)}\{Az_x + Bz_y - C\}\,d\omega + \int\limits_{(S_1)}\{az_s - b\}\,ds,$$

wo A, B, C Funktionen von x, y, z und a, b Funktionen von s, z darstellen. Diese Integralsumme ist, wie man leicht erkennt, in dem verlangten Sinne von der Fläche $z = z(x, y)$ unabhängig, wenn innerhalb des sich auf das Gebiet Ω projizierenden xyz-Raumes die Differentialgleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \tag{29}$$

identisch in x, y, z und in der auf die Randkurve S_1 sich projizierenden sz-Zylinderfläche die Differentialgleichung

$$(B)_{S_1}\frac{dx}{ds} - (A)_{S_1}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial a}{\partial s} + \frac{\partial b}{\partial z} = 0 \tag{30}$$

identisch in s, z erfüllt ist. Die beiden Gleichungen (29), (30) stellen, wenn wir für A, B, C, a, b ihre Werte

$$\begin{aligned} A &= F_p, \\ B &= F_q, \\ C &= pF_p + qF_q - F, \\ a &= f_\pi, \\ b &= \pi f_\pi - f \end{aligned} \tag{31}$$

eintragen, partielle Differentialgleichungen für die Funktionen p, q, π dar.

Wir bestimmen nun eine einparametrige Schar von Funktionen

$$z = \psi(x, y, \alpha), \tag{32}$$

die den Lagrangeschen Gleichungen (27), (28) genügen, und setzen auf dem Rande

$$z = \psi(x(s), y(s), \alpha) = \psi(s, \alpha); \tag{33}$$

wir nehmen an, daß diese einparametrige Schar das räumliche Feld eindeutig und lückenlos erfüllt. Sodann berechnen wir aus (32) α als Funktion von x, y, z und aus (33) α als Funktion von s, z und bilden die Ausdrücke

$$p(x,y,z)=\left[\frac{\partial\psi(x,y,\alpha)}{\partial x}\right]_{\alpha=\alpha(x,y,z)},$$
$$q(x,y,z)=\left[\frac{\partial\psi(x,y,\alpha)}{\partial y}\right]_{\alpha=\alpha(x,y,z)},$$
$$\pi(s,z)=\left[\frac{\partial\psi(s,\alpha)}{\partial s}\right]_{\alpha=\alpha(s,z)}.$$

Die so entstehenden Funktionen p, q von x, y, z und π von s, z sind solche von der verlangten Eigenschaft.

In der Tat, daß die Funktionen p, q der Gleichung (29) genügen, folgt unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}$$

leicht, wenn wir bedenken, daß $\psi(x,y,\alpha)$ identisch für alle Werte x, y, α die Lagrangesche Gleichung erfüllen soll. Um auch das Bestehen von (30) nachzuweisen, setzen wir in die Lagrangesche Gleichung (28), die identisch in s, α erfüllt ist,

$$z_x=p,$$
$$z_y=q,$$
$$z_s=\pi,$$
$$\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\partial\pi}{\partial s}+\pi\frac{\partial\pi}{\partial z}$$

ein, dieselbe geht dann in die identisch für alle s, z geltende Gleichung

$$(F_q)_{S_1}\frac{dx}{\partial s}-(F_p)_{S_1}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2 f}{\partial\pi^2}\left(\frac{\partial\pi}{\partial s}+\pi\frac{\partial\pi}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial\pi\,\partial z}\pi+\frac{\partial^2 f}{\partial\pi\,\partial s}-\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

über. Genau die nämliche Gleichung erhalten wir, wenn wir in Formel (30) die Ausdrücke (31) eintragen. Damit ist der Beweis des Unabhängigkeitssatzes für das vorliegende Problem erbracht.

Aus dem Unabhängigkeitssatz folgt wie früher:

$$E(z_x,z_y,p,q)\equiv F(z_x,z_y)-F(p,q)-(z_x-p)F_p-(z_y-q)F_q>0,$$
$$E(z_s,\pi)\equiv f(z_s)-f(\pi)-(z_s-\pi)f_\pi>0,$$

so daß im vorliegenden Problem *zwei Weierstraßsche E-Funktionen in Betracht kommen: eine für das Innere und eine für den Rand* S_1.

Damit andererseits eine einparametrige Schar (32) existiere, die in verlangter Weise ein einfach und lückenlos überdecktes räumliches Feld erzeugt, stellen wir *die Forderung, daß jede Lösung z der Lagrangeschen Gleichungen* (27), (28) *durch ihre Randwerte auf irgend einem beliebigen innerhalb* Ω *verlaufenden, geschlossenen oder in* S_1 *beginnenden und endigenden Kurvenzuge K eindeutig bestimmt sei. Unsere Betrachtung zeigt dann, daß dieses Kriterium gewiß ein hinreichendes ist.*

Wenn insbesondere in dem zu behandelnden Problem die gegebenen Funktionen F, f unter den Integralzeichen nur vom zweiten Grade in z_x, z_y, z bez. z_s, s ausfallen, so werden die Lagrangeschen Differentialgleichungen linear. Bilden wir dann diejenigen *homogenen* linearen Differentialgleichungen, die aus den Lagrangeschen Gleichungen durch Fortlassen der von z freien Glieder entstehen, und bezeichnen diese als Jacobische Gleichungen, so ist unmittelbar ersichtlich, daß die Randwertaufgabe für eine Kurve K nur dann mehrere Lösungen zuläßt, wenn die Jacobischen Gleichungen eine Lösung z besitzen, die auf K, nicht aber überall innerhalb des von K bez. von K und S_1 begrenzten Gebietes Null ist.

Unser Kriterium für das Eintreten des Minimums läuft also in dem Falle quadratischer F, f auf die Forderung hinaus, daß die Jacobischen Gleichungen außer Null keine Lösung z zulassen, die auf dem Rande S_2 oder auf einer innerhalb von Ω verlaufenden geschlossenen oder in S_1 beginnenden und endigenden Kurve K Null ist.

Im allgemeinen Falle, wenn die gegebenen Funktionen F, f nicht speziell quadratisch, sondern beliebig von der zu bestimmenden Funktion z und deren Ableitungen abhängen, haben wir das eben ausgesprochene Kriterium auf die zweite Variation der Integralsumme J anzuwenden und gelangen so zu einem Kriterium, welches dem bekannten Jacobischen Kriterium genau analog ist und daher hier kurz als solches bezeichnet werden möge.

Wenn das Problem gestellt ist, das Doppelintegral

$$\int\limits_{(\Omega)} F(z_x, z_y, z;\ xy)\, d\omega$$

zu einem Minimum zu machen, während die Randwerte der gesuchten Funktion z die Nebenbedingung

$$f(z_s, z;\ s) = 0$$

erfüllen sollen, so können wir die Formeln und Überlegungen des eben behandelten Problems unmittelbar anwenden; es ist nur nötig, die Gleichung $f = 0$ hinzuzufügen und in den Formeln überall $f(s)$ durch $\lambda(s) f$ zu ersetzen, wo der Lagrangesche Faktor $\lambda(s)$ als eine mitzubestimmende Funktion von s anzusehen ist.

Allgemeine Regel für die Behandlung von Variationsproblemen und Aufstellung eines neuen Kriteriums.

Zum Schluß sei mir gestattet, eine aus den oben behandelten Fällen abstrahierte, allgemeine Regel für die Behandlung von solchen Variationsproblemen auszusprechen, bei denen überall auf dem Rande die Werte der zu bestimmenden Funktionen vorgeschrieben sind.

Zunächst gewinnt man durch Nullsetzen der ersten Variation die Lagrangeschen Gleichungen L des Variationsproblems. Es sei dann ein System Z von solchen Lösungen dieser Differentialgleichungen L bekannt, die zugleich alle das Innere sowie den Rand betreffenden gegebenen Bedingungen B des Variationsproblems erfüllen.

Wenn die Weierstraßschen E-Funktionen für unser Lösungssystem Z positiv ausfallen, so bezeichnen wir das Lösungssystem Z als ein solches *von positiv definitem Charakter*

Wir fassen nun irgend einen Teil T des Integrationsgebietes ins Auge und bezeichnen den Rand dieses Teilgebietes T, soweit er dem Rande des ursprünglichen Integrationsgebietes angehört, mit S_T, soweit er jedoch in das Innere des ursprünglichen Integrationsgebietes fällt, also als neue Grenze entstanden ist, mit s_T. Für den ersteren Rand S_T sowie für das Innere von T seien die Bedingungen B, wie sie daselbst das vorgelegte Variationsproblem fordert, gültig, für s_T schreiben wir die dort vorhandenen Werte der Funktionen des Lösungssystems Z als Randwerte vor: das dadurch für das Teilgebiet T entstehende System von Bedingungen werde mt B_T bezeichnet.

Wenn alsdann kein anderes Lösungssystem der Lagrangeschen Gleichung L existiert, das die Bedingungen B erfüllt, außer dem Lösungssystem Z; wenn ferner auch für jedes Teilgebiet T kein anderes Lösungssystem der Lagrangeschen Gleichungen L existiert, das die Bedingungen B_T erfüllt, außer dem Lösungssystem Z innerhalb T: so heiße das Lösungssystem Z ein solches *von innerlich eindeutigem Charakter.*

Für das Lösungssystem Z tritt gewiß Minimum ein, wenn dasselbe von positiv definitem und von innerlich eindeutigem Charakter ist.

In der hiermit ausgesprochenen allgemeinen Behauptung tritt, wie man sieht, neben die Weierstraßsche Forderung des definiten Charakters der Lösung Z noch eine neue Forderung, nämlich die Forderung des innerlich eindeutigen Charakters der Lösung Z. Die letztere Forderung steht nun zu dem Jacobischen Kriterium — soweit dasselbe bisher in der Variationsrechnung formuliert worden ist — in dem entsprechenden Verhältnisse, wie das Weierstraßsche zu dem Legendreschen Kriterium, wenn man das Weierstraßsche Kriterium als die bei beliebigen Variationen

notwendige sachgemäße Vertiefung des Legendreschen auffaßt. In der Tat, wie aus dem Weierstraßschen Kriterium durch Anwendung auf die zweite Variation das Legendresche wird, so entsteht aus dem von mir aufgestellten Kriterium (Forderung des innerlich eindeutigen Charakters der Lösung Z) durch Anwendung auf die zweite Variaton das Jacobische. Bilden wir nämlich in leicht erkennbarer Analogie aus den Lagrangeschen Gleichungen L die *homogenen linearen* Jacobischen $[L]$ und aus den gegebenen Bedingungen B ebenfalls die *homogenen linearen* zugehörigen Bedingungen $[B]$, so läuft unser Kriterium auf die Forderung hinaus, daß dieses homogene lineare Gleichungs- und Bedingungssystem außer Null keine Lösung besitzen darf und zwar auch nicht für irgend ein Teilgebiet T, wenn man auch an der neu entstehenden Berandung s_T dieses Teilgebietes die Randwerte Null vorschreibt. Das von mir aufgestellte Kriterium ist aber — in Analogie zum Weierstraßschen Kriterium — als hinreichendes Kriterium unbeschränkt gültig, auch wenn beliebige Variationen, nicht bloß solche in genügend naher Nachbarschaft in Betracht kommen; desgleichen ist es beispielsweise dann anwendbar, wenn die Entscheidung über das Minimum für eine Kurve zwischen zwei konjugierten Punkten getroffen werden soll, wo das Jacobische Kriterium versagt.

Inwieweit das von mir aufgestellte Kriterium auch bei nicht festgegebenen Randwerten hinreicht bezw. wie dasselbe alsdann zu modifizieren ist, bedarf im besonderen Falle einer Untersuchung.

Die hinreichenden Bedingungen des Extremums in der Theorie des Mayerschen Problems.

Von

D. Egorow in Moskau.

Im 58. Bande dieser Annalen*) hat Herr Mayer den sogenannten Hilbertschen Unabhängigkeitssatz auf den Fall des Extremums eines einfachen Integrals mit beliebig vielen Funktionen und Bedingungsgleichungen ausgedehnt und dadurch die Mittel geliefert für eine einfache Ableitung der hinreichenden Bedingungen des Extremums. Im folgenden werden analoge Betrachtungen entwickelt für das allgemeinste Problem der Variationsrechnung mit einer unabhängigen Veränderlichen, welches als das *„Mayersche Problem"* bezeichnet wird und folgendermaßen lautet:

„Unter allen stetigen Funktionen $y_0, y_1, \cdots, y_n$ der unabhängigen Veränderlichen x, welche $r+1$ gegebene Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\varphi_k(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, y_0', y_1', \cdots, y_n') = 0 \tag{1}$$
$$(k = 0, 1, \cdots, r < n)$$

identisch erfüllen, und von denen überdies die n letzten für zwei gegebene Werte x_0 und x_1 von x, die erste y_0 dagegen nur für $x = x_0$ gegebene Werte besitzen, diejenige zu finden, denen ein größter oder kleinster Wert der Funktion y_0 an der Stelle $x = x_1$ zugehört."**)

§ 1.

Wenn die Werte der Funktionen y_i für $x = x_0$ und $x = x_1$ bez. mit y_{i0} und y_{i1} bezeichnet werden, so handelt es sich darum, das Extremum von y_{01} zu ermitteln bei vorgeschriebenen

$$y_{00}, y_{10}, \cdots, y_{n0} \quad \text{und} \quad y_{11}, y_{21}, \cdots, y_{n1}.$$

---

*) Vgl. Leipziger Berichte 1903.

**) A. Mayer, Die Lagrangesche Multiplicatorenmethode, Leipziger Berichte 1895.

Setzt man

$$\Omega = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k \varphi_k, \tag{2}$$

so werden die $n+1$ Funktionen y_i und die $r+1$ Multiplikatoren λ_k durch die Gleichungen (1) und

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{3}$$

bestimmt*); die Mannigfaltigkeiten

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \cdots, y_n = y_n(x),$$

die auf diese Weise erhalten werden, nennen wir Extremalen. Die Punkte $(x_0, y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0})$ und $(x_1, y_{11}, y_{21}, \cdots, y_{n1})$, die kurz als Punkte 0 und 1 bezeichnet werden mögen, bestimmen, zusammen mit dem vorgeschriebenen Anfangswerte y_{00} der Funktion y_0, eine Extremale C, welche für dieselbe Funktion einen bestimmten Endwert y_{01} liefert.

Wir betrachten nun „Vergleichskurven" C'

$$y_1 = \bar{y}_1(x),\ y_2 = \bar{y}_2(x), \cdots, y_n = \bar{y}_n(x), \tag{4}$$

welche insgesamt durch die Punkte 0 und 1 hindurchgehen und außerdem folgender Beschränkung unterliegen: Die Einsetzung der Werte (4) in die Gleichungen (1) führt auf keinen Widerspruch und liefert, bei vorgeschriebenem Anfangswerte y_{00}, eine bestimmte Funktion $y_0 = \bar{y}_0(x)$. Für $x = x_1$ erhalten wir demnach einen bestimmten Endwert $\bar{y}_{01}$ auf jeder Vergleichskurve C', und es handelt sich darum zu ermitteln, unter welchen Bedingungen die Differenz

$$\Delta y_{01} = \bar{y}_{01} - y_{01} = (\bar{y}_{01} - y_{00}) - (y_{01} - y_{00})$$

für alle in Betracht kommenden Vergleichskurven ein konstantes Vorzeichen besitzt. Wie leicht ersichtlich, hat man ferner

$$\Delta y_{01} = \int\limits_{C'} y_0'\, dx - \int\limits_{C} y_0'\, dx, \tag{5}$$

wobei die Integrale bez. über die Bogen 01 der Vergleichskurve C' und der Extremale C zu erstrecken sind und der Anfangswert von y_0 gleich y_{00} angenommen wird.

Betrachten wir nun irgend eine q-parametrige Schar $(q \leqq n)$ von Extremalen, welche insgesamt dem Anfangswerte y_{00} entsprechen und unter denen die Extremale C vorkommt. Durch die Elimination der q Parameter, von denen die Funktionen $y_i(x)$ und ihre Ableitungen $y_i'(x)$ abhängen, erhalten wir unter anderen die Gleichungen

*) A. Mayer, l. c.

$$(6)\qquad \begin{aligned} y_0 &= Y(x, y_1, y_2, \cdots, y_q), \\ y_i' &= p_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_q) \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

welche für alle Extremalen der Schar identisch erfüllt sind. Indem wir die erste dieser Gleichungen differentiieren, erhalten wir für jede Extremale der Schar

$$(7)\qquad y_0' = \frac{dY}{dx} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial Y}{\partial y_h} y_h',$$

folglich

$$\int_C y_0'\, dx = \int_C \frac{dY}{dx}\, dx = Y(x_1, y_{11}, \cdots, y_{q1}) - Y(x_0, y_{10}, \cdots, y_{q0}),$$

oder, da das letzte Integral augenscheinlich vom Integrationsweg unabhängig ist:

$$(8)\qquad \int_C y_0'\, dx = \int_C \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial Y}{\partial y_h} y_h'\right) dx.$$

Wenn die Werte der Ableitungen y_i' aus den Gleichungen (6) in die Gleichung (7) eingesetzt werden, so erhält man, wie leicht ersichtlich, eine Identität:

$$(9)\qquad p_0 = \frac{\partial Y}{\partial x} + \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial Y}{\partial y_h} p_h.$$

Setzt man den Wert von $\frac{\partial Y}{\partial x}$ hieraus in die Gleichung (8) ein und den so erhaltenen Wert des Integrals in die Gleichung (5), so erhält man schließlich

$$(10)\qquad \Delta y_{01} = \int_C E\, dx,$$

wobei der Ausdruck E durch die Gleichung

$$(11)\qquad E = y_0' - p_0 - \sum_{h=1}^{q} \frac{\partial Y}{\partial y_h} (y_h' - p_h)$$

definiert wird. Bei einer sachgemäßen Wahl der Schar der Extremalen und folglich der Funktion Y gestatten die Formeln (10) und (11) eine unmittelbare Ausdehnung der Theorien von Weierstraß und Hilbert auf das betrachtete Problem.*)

§ 2.

Indem wir zu den Differentialgleichungen (1) und (3) des Mayerschen Problems zurückkehren, bemerken wir, daß die Anzahl der willkürlichen Konstanten, welche die vollständige Integration dieser Gleichungen

*) Vergl. die Darstellung bei Kneser, Lehrbuch, §§ 59—61.

mit sich bringt, gleich $2(n+1)$ ist, eine von diesen Konstanten aber für das Problem unwesentlich ist, so daß die Funktionen y_i und die Verhältnisse $\lambda_k : \lambda_0$ nur $2n+1$ Konstanten enthalten.*)

Verlangen wir nun, daß die Anfangsbedingungen

$$y_i = y_{i0} \quad \text{für} \quad x = x_0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

befriedigt werden, so bleiben nur n willkürliche Konstanten übrig, und wir erhalten eine n-parametrige Schar von Extremalen, welche die Extremale C enthält. Setzt man noch

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_0} = -\mu_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, r), \tag{12}$$

so bestehen für die erwähnte Extremalenschar die Gleichungen

$$\begin{gathered} y_1 = y_1(x, a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad y_2 = y_2(x, a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \cdots y_n = y_n(x, a_1, a_2, \cdots, a_n);\\ y_0 = y_0(x, a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad y_i' = y_i'(x, a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \mu_s = \mu_s(x, a_1, a_2, \cdots, a_n)\\ (i = 0, 1, \cdots, n;\ s = 1, 2, \cdots, r), \end{gathered} \tag{13}$$

und die Parameter $a_1, a_2, \cdots, a_n$ können aus den n ersten dieser Gleichungen als Funktionen von $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ bestimmt werden für alle in Betracht kommenden Werte der Veränderlichen, für welche die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(a_1, a_2, \cdots, a_n)} \tag{14}$$

nicht verschwindet. Durch Einsetzung der so erhaltenen Werte der Parameter $a_1, a_2, \cdots, a_n$ in die übrigen Gleichungen (13) kommt man zu den Relationen

$$\begin{gathered} y_0 = Y(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),\quad y_i' = p_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),\\ \mu_s = \pi_s(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ (i = 0, 1, \cdots, n;\quad s = 1, 2, \cdots, r), \end{gathered} \tag{15}$$

die für alle Extremalen der Schar identisch erfüllt sind.

Die Funktion Y genügt bekanntlich**) einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, deren Charakteristiken mit den Extremalen zusammenfallen, und es bestehen die Identitäten

$$\frac{\partial Y}{\partial y_h} = -\frac{\dfrac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h}}{\dfrac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_0}} \qquad (h = 1, 2, \cdots, n), \tag{16}$$

*) A. Mayer, l. c.

**) A. Mayer, l. c. § 2.

wobei rechterseits für y_0, y_i', μ_s bez. ihre Werte Y, p_i, π_s aus den Gleichungen (15) einzusetzen sind; diese Substitution ist durch einen Strich über Ω angedeutet. Wenn wir die allgemeinen Entwicklungen des § 1 auf die zuletzt betrachtete Extremalenschar anwenden und dabei die Identitäten (16) benutzen, so nimmt der durch die Gleichung (11) definierte Ausdruck E folgende Form an:

$$E = \frac{1}{\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_0}} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_i} (y_i' - p_i). \tag{17}$$

Nehmen wir nun an, eine der Gleichungen (1) sei aufgelöst in bezug auf y_0' und der so erhaltene Wert in die übrigen Gleichungen eingesetzt, wodurch das System (1) die Form

$$\begin{gathered} \varphi_0 = y_0' - \psi(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0, \\ \varphi_s(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, r) \end{gathered} \tag{1*}$$

annimmt, dann erhält man, wie leicht ersichtlich,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_0'} = \lambda_0$$

und folglich, wenn

$$\omega(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = \psi + \sum_{s=1}^{r} \pi_s \varphi_s \tag{18}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_h}}{\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial p_0}} = - \frac{\partial \omega(x, Y, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \cdots, n).$$

Berücksichtigt man ferner, daß die Gleichung $\varphi_0 = 0$ einerseits für jede Vergleichskurve C' gilt, andererseits aber auch für jede Extremale unserer Schar, woraus die Identität

$$p_0 = \psi(x, Y, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n)$$

folgt, so gelangt man endgültig zu der Formel

$$\begin{aligned} E = {} & \psi(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') - \psi(x, Y, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n) \\ & - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \omega(x, Y, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial p_h} (y_h' - p_h). \end{aligned} \tag{19}$$

Da die Gleichungen $\varphi_s = 0$ sowohl für alle Vergleichskurven C', als auch für alle Extremalen der Schar gelten, so kann der Ausdruck E auch in die äquivalente Form

$$
(19^*)\quad \begin{aligned} E = \omega(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') - \omega(x, Y, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n) \\ - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \omega(x, Y, y_1, \cdots, y_n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial p_h} (y_h' - p_h) \end{aligned}
$$

gesetzt werden.

Aus den Entwicklungen der §§ 1 und 2 ist nun ohne weiteres klar, daß der Bogen 01 der Extremale C sicher ein Extremum liefert, wenn einerseits die Jacobische Determinante (14) beständig von Null verschieden ist, andererseits der Ausdruck E (19) ein konstantes Vorzeichen besitzt für alle in Betracht kommenden Vergleichskurven. Werden ferner die Gleichungen (1) als analytisch vorausgesetzt und unendliche Werte der y_i' ausgeschlossen, so daß nur solche Vergleichskurven in Betracht gezogen werden, für welche die $|y_i'|$ sämtlich unter einer bestimmten Grenze bleiben, so ergibt sich in bekannter Weise durch Kontinuitätsbetrachtungen, daß die vorstehenden hinreichenden Bedingungen des Extremums auch durch folgende ersetzt werden können: Der zu 0 „konjugierte" Punkt der Extremale C soll jenseits von 1 liegen, und in jedem Punkte des Bogens 01 der Extremale soll der Ausdruck E bei beliebigen Werten der y_i' beständig positiv oder negativ sein, ohne zu verschwinden, den Fall des „ordentlichen" Verschwindens ($y_i' = p_i$) ausgenommen. Für das schwache Extremum ist es hinreichend, daß die letzte Bedingung erfüllt sei nur für solche Werte der y_i', welche hinreichend wenig von den p_i abweichen.

§ 3.

Es fragt sich nun, inwieweit die soeben gegebenen hinreichenden Bedingungen auch notwendig sind für das Vorhandensein des Extremums. Indem wir uns im folgenden auf den Fall $n = 1$ beschränken, wollen wir zeigen, daß für das Vorhandensein des Minimums (Maximums) ebenso, wie bei dem gewöhnlichen Problem der Variationsrechnung, folgende Bedingungen notwendig sind:

1. Der zu 0 konjugierte Punkt soll nicht im Inneren des Bogens 01 der Extremale liegen.

2. In allen Punkten des Bogens soll $E \geqq 0$ ($E \leqq 0$) sein.

Da wir $n = 1$ angenommen haben, so sind nur zwei Funktionen y_0, y_1 vorhanden, die wir resp. durch u und y bezeichnen werden, und die der Gleichung

$$
(1^{**})\qquad u' = \psi(x, u, y, y')
$$

genügen. Die Gesamtheit der Extremalen, die durch den Punkt 0 hin-

durchgehen und dem Anfangswerte u_0 entsprechen, bildet eine einparametrige Schar, und für jede Extremale dieser Schar haben wir

$$u = Y(x, y), \quad y' = p(x, y). \tag{15*}$$

Die Formeln (10) und (19) der §§ 1 und 2 nehmen die Form

$$\Delta u_1 = \int_{C'} E\,dx, \tag{10*}$$

$$E = \psi(x, u, y, y') - \psi(x, Y, y, p) - \frac{\partial \psi(x, Y, y, p)}{\partial p}(y' - p) \tag{19**}$$

an, wobei durch u_1 der Endwert der Funktion u bezeichnet ist; und die Jacobische Determinante (14) wird gleich der Ableitung von y nach dem Parameter a der Extremalenschar, woraus unmittelbar erhellt, daß der zu 0 konjugierte Punkt der Berührungspunkt der Extremale C mit der Enveloppe der Extremalenschar ist.

Der Beweis für die Notwendigkeit der ersten der oben gegebenen Bedingungen wird in bekannter Weise erbracht, indem gezeigt wird, daß man mit demselben Endwerte u_1 zum Punkte 1 gelangt, wenn man, statt der Extremale C, einen Weg benutzt, der aus dem Bogen 02 (Fig. 1) irgend einer Extremale der oben erwähnten Schar und dem Bogen 21 der Enveloppe besteht. Die Richtigkeit dieser Behauptung wird ohne weiteres klar, wenn man bedenkt, daß auf dem Bogen 21

Fig. 1.

$$u = Y(x, y)$$

gesetzt werden kann, weil bei dieser Annahme einerseits die Funktion u im Punkte 2 denselben Wert erhält, wie auf der Extremale 02, andererseits aber die Gleichung (1**) befriedigt wird; die Einsetzung von

$$u = Y(x, y)$$

in diese Gleichung liefert nämlich*)

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} p = \psi(x, Y, y, p), \tag{20}$$

und man sieht ohne weiteres, daß (20) eine Identität ist, wenn man die Gleichung (1**) für die oben betrachtete Extremalenschar hinschreibt.

Indem wir uns nun zur Betrachtung der zweiten der am Anfange des Paragraphen gegebenen Bedingungen wenden, wollen wir uns auf den Fall des Minimums beschränken (der Fall des Maximums wird in analoger Weise erledigt). Der übliche Beweis für die Notwendigkeit dieser

) Auf der Enveloppe besteht augenscheinlich die zweite der Gleichungen (15).

Bedingung ist hier nicht unmittelbar anwendbar, da die den vorstehenden Entwickelungen zugrunde gelegte Extremalenschar wesentlich vom Anfangswerte der Funktion u abhängt. Nehmen wir jedoch an, daß nicht nur der Bogen 01 der Extremale, sondern auch jedes Stück 03 dieses Bogens ein Minimum liefere für den Wert der Funktion u in seinem Endpunkte 3, so genügt es offenbar, den Beweis für den Endpunkt des Bogens 01 zu führen, und dies kann in üblicher Weise geschehen. Es sei nämlich $E < 0$ im Punkte 1 für irgend einen Wert von y', das heißt für irgend ein Linienelement im Punkte 1. Dann betrachten wir irgend eine Kurve, die durch den Punkt 1 hindurchgeht und deren Tangente in diesem Punkte mit der Geraden des Linienelementes zusammenfällt. Es sei 2 ein Punkt auf dieser Kurve (Fig. 2), der vom Punkte 1 hinreichend wenig entfernt ist, und dessen Abszisse kleiner ist als die Abszisse x_1 von 1; verbinden wir diesen Punkt mit dem Punkte 0 durch eine Extremale der oben betrachteten Schar und benutzen als Vergleichskurve den Linienzug 021, so ist $E = 0$ auf 02 und $E < 0$ auf 21, wenn nur der Punkt 2 hinreichend nahe an dem Punkt 1 gewählt ist. Demgemäß erhalten wir aus Formel (10*) $\Delta u_1 < 0$, was der Annahme des Minimums für die Extremale 01 zuwider ist.

Fig. 2.

Es erübrigt nun die Annahme zu rechtfertigen, die wir soeben über alle inneren Punkte des Extremalenbogens 01 gemacht haben. Dies wird erreicht, sobald der Beweis erbracht wird, daß jeder innere Punkt 3 des Bogens 01 ein „Minimumpunkt" ist, wenn dies für den Endpunkt 1 der Fall ist. Dabei nennen wir den Punkt 3 einen Minimumpunkt, wenn der Extremalenbogen 03 ein Minimum liefert für den Wert u_3 der Funktion u im Punkte 3. Die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung ist ohne weiteres klar für das gewöhnliche Problem der Variationsrechnung; für den Fall des Mayerschen Problems kann der Beweis, unter Beschränkung auf das schwache Minimum, etwa in folgender Weise geführt werden:

Es sei 3 (Fig. 3) kein Minimumpunkt. Dann kann man in beliebig enger Nachbarschaft mit dem Extremalenbogen 03 solch eine „Vergleichskurve" C ziehen, daß Δu_3 negativ ausfällt; der absolute Betrag von Δu_3 kann dabei beliebig klein angenommen werden, weil u aus der Gleichung (1**) bestimmt wird, und die Werte von y und y' auf der Kurve C, gemäß unserer Annahme, beliebig wenig abweichen von den Werten dieser Größen längs des Extremalenbogens 03. Betrachten wir nun irgend einen Punkt rechts von 3 auf dem Extremalenbogen 01; um keine neue Bezeichnungen ein-

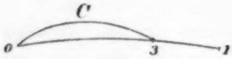

Fig. 3.

zuführen, nehmen wir an, daß dieser Punkt mit dem Punkte 1 auf Fig. 3 zusammenfällt. Wenn wir als Vergleichskurve den Linienzug einführen, der aus der Kurve C und dem Extremalenbogen 31 besteht, so können wir den zugehörigen Wert der Funktion u im Punkte 1 in folgender Weise berechnen: man setze in die Gleichung (1**) für y und y' ihre Werte auf der Extremale 01 ein und integriere die so erhaltene Differentialgleichung bei vorgeschriebenem Werte $\bar{u}_3$ der Funktion u im Punkte 3. Man erhält schließlich

$$u = \varphi(x, \bar{u}_3), \tag{21}$$

und der Wert von u im Punkte 1 ist gleich $\varphi(x_1, \bar{u}_3)$; fällt die Kurve C mit dem Extremalenbogen 03 zusammen, so ist $\bar{u}_3 = u_3$ und $\varphi(x_1, u_3) = u_1$. Unserer Annahme gemäß ist $\varphi(x_3, u_3)$ gleich u_3, die Ableitung

$$\frac{\partial \varphi(x, u_3)}{\partial u_3}$$

also gleich 1 im Punkte 3. Wenn der Punkt 1 hinreichend nahe bei dem Punkt 3 gewählt ist, so erkennt man ohne weiteres aus Kontinuitätsbetrachtungen, daß dieselbe Ableitung in diesem Punkte jedenfalls positiv ist und folglich $\bar{u}_1 = \varphi(x_1, \bar{u}_3)$ mit $\bar{u}_3$ zugleich zu- und abnimmt in der Nachbarschaft von $\bar{u}_3 = u_3$. Da ferner $\Delta u_3 < 0$ ist für die Vergleichskurve C, so ist auch $\Delta u_1 < 0$ und der Punkt 1 folglich kein Minimumpunkt. Wir haben also bewiesen, daß alle Punkte eines gewissen Bereiches rechts von einem Punkte, der kein Minimumpunkt ist, ebenfalls keine Minimumpunkte sind. Indem wir vom Punkte 3 ausgehen, sodann irgend einen Punkt des oben erwähnten Bereiches benutzen und dieselbe Konstruktion anwenden usw., kommen wir dem Endpunkte des Extremalenbogens 01 immer näher und näher. Es sind nun zwei Fälle a priori denkbar: entweder erreichen wir schließlich den Endpunkt des Bogens, oder kommen wir über einen gewissen Grenzpunkt im Inneren des Bogens nicht hinaus. Im ersten Falle wäre der Endpunkt 1, entgegen unserer Annahme, kein Minimumpunkt, und die Unmöglichkeit der Existenz eines Punktes, der kein Minimumpunkt ist, im Inneren des Bogens 01 wäre bewiesen. Im zweiten Falle wäre der soeben erwähnte Grenzpunkt gewiß ein Minimumpunkt, während alle Punkte einer gewissen Nachbarschaft links von diesem Punkte keine Minimumpunkte sind. Nun ist aber eine solche Punktverteilung unmöglich, wie im folgenden dargetan werden soll. Es sei in der Tat (Fig. 3) 1 ein Minimumpunkt und 3 ein Punkt, der kein Minimumpunkt ist und beliebig nahe an 1 gewählt werden darf. Nun betrachten wir eine beliebige Kurve C, die nur hinreichend nahe an der Extremale verläuft, und benutzen als Vergleichskurve den Linienzug, der aus C und dem Extremalenbogen 31 besteht. Unserer Annahme gemäß

wird Δu_1 für diese Vergleichskurve gewiß positiv ausfallen. Zur Berechnung von $\Delta u_3 = \bar{u}_3 - u_3$ können wir ebenso verfahren, wie oben bei der Berechnung von $\bar{u}_1$ aus $\bar{u}_3$, und kommen dabei zu dem Resultate, daß gleichzeitig mit Δu_1 auch Δu_3 für *jede* Vergleichskurve C positiv ist, entgegen unserer Annahme, daß 3 kein Minimumpunkt ist.

Hiermit wäre der gewünschte Beweis zu Ende gebracht und die am Anfange des Paragraphen aufgeworfene Frage erledigt, wenigstens für den Fall eines schwachen Extremums.

Moskau, den 22. Mai 1905.

Eine Verallgemeinerung der Hamiltonschen Gruppen.

Von

Ernst Wendt in Bremen.

Alle nicht kommutativen Gruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind, hat Herr Dedekind bestimmt und *Hamiltonsche Gruppen* genannt*). Zu einer etwas allgemeineren Gruppenart**) gelangt man durch Lösung der folgenden Aufgabe: Alle Gruppen zu finden, welche die Eigenschaft haben, daß alle diejenigen ihrer Untergruppen, deren Ordnung durch mindestens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist, Normalteiler sind. Bei der Bestimmung aller derartigen Gruppen wird man auf eine die Untergruppen der homogenen linearen Kongruenzgruppe betreffende Frage geführt, deren Beantwortung an den Anfang dieser Arbeit gestellt werden soll, weil erst mit ihrer Hilfe obige Aufgabe erledigt werden kann.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{B}$ eine Abelsche Gruppe, deren sämtliche Elemente die Primzahl b zur Ordnung haben; $B_0, B_1, \cdots, B_{\beta-1}$ sei eine Basis derselben. Die Isomorphismengruppe von $\mathfrak{B}$ kann bekanntlich als homogene lineare Kongruenzgruppe von β Variabeln dargestellt werden, welche aus den Substitutionen

$$
(1)\qquad \begin{array}{l}
z_0' \equiv c_{00}\, z_0 + c_{01}\, z_1 + \cdots + c_{0,\beta-1}\, z_{\beta-1},\\
z_1' \equiv c_{10}\, z_0 + c_{11}\, z_1 + \cdots + c_{1,\beta-1}\, z_{\beta-1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_{\beta-1}' \equiv c_{\beta-1,0} z_0 + c_{\beta-1,1} z_0 + \cdots + c_{\beta-1,\beta-1} z_{\beta-1}
\end{array}\qquad (\text{mod. } b)
$$

*) Dedekind, Math. Ann. Bd. 48, S. 548.
Weitere Literatur:
Miller, C. R., vol. 126, p. 1406; Bull. of the Am. Math. Soc., vol. 4, p. 510 und vol. 5, p. 292.
D'Alessandro, Giorn. di mat. di Batt., vol. 37, p. 138.
Vergl. auch meine Arbeit, Math. Ann., Bd. 59, S. 187 und meine Notiz, Math. Ann., Bd. 60, S. 319.

**) Eine andere Verallgemeinerung der Hamiltonschen Gruppen hat Herr Miller inzwischen in dieser Zeitschrift, Bd. 60, S. 597 veröffentlicht.

besteht, deren Determinante $|c_{ik}|$ nicht durch b teilbar ist. Man denke sich nun die *holomorphe* Gruppe*) $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{B}$ konstruiert. Dieselbe enthält $\mathfrak{B}$ als Normalteiler und ist in der Form darstellbar $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{L}$, wo $\mathfrak{L}$ eine in $\mathfrak{H}$ enthaltene, mit folgenden Eigenschaften versehene Untergruppe bedeutet. $\mathfrak{L}$ ist einstufig isomorph zur Isomorphismengruppe von $\mathfrak{B}$ und so beschaffen, daß die Substitutionen, welche durch Transformation mit den Elementen von $\mathfrak{L}$ unter den Elementen von $\mathfrak{B}$ hervorgerufen werden, alle Isomorphismen von $\mathfrak{G}$ in sich erschöpfen. Jeder Substitution 1) entspricht ein bestimmtes Element G in $\mathfrak{L}$, für welches

$$(2) \qquad G^{-1}\left(B_0^{z_0} B_1^{z_1} \cdots B_{\beta-1}^{z_{\beta-1}}\right) G = B_0^{z'_0} B_1^{z'_1} \cdots B_{\beta-1}^{z'_{\beta-1}}$$

ist und dessen Ordnung mit der der Substitution 1) übereinstimmt, und umgekehrt.

Ich frage nun nach allen denjenigen Untergruppen von $\mathfrak{L}$, welche die Eigenschaft haben, daß keins ihrer Elemente außer der Einheit mit einer Untergruppe von $\mathfrak{B}$ außer mit 1 und $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist, speziell nach solchen derartigen Untergruppen, deren Ordnung eine Potenz einer Primzahl ist. Zur Beantwortung dieser Frage stelle ich zunächst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß ein Element A von Primzahlordnung a mit keiner Untergruppe von $\mathfrak{B}$ außer mit $\mathfrak{B}$ und 1 vertauschbar ist. Wenn ein solches Element A besteht, so müssen sämtliche Elemente außer 1, ebenso wie sämtliche Untergruppen gleicher Ordnung in $\mathfrak{B}$ in Komplexe von je a zerfallen, derart, daß die zu einem Komplex gehörigen Elemente bezw Untergruppen durch A zyklisch permutiert werden. Nun ist die Anzahl aller von 1 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{B}$ gleich $b^\beta - 1$, die aller Untergruppen von der Ordnung b gleich $\frac{b^\beta - 1}{b-1}$, die aller Untergruppen von der Ordnung b^λ gleich

$$\frac{(b^\beta - 1)(b^{\beta-1} - 1)\cdots(b^{\beta-\lambda+1} - 1)}{(b-1)(b^2-1)\cdots(b^\lambda - 1)},$$

folglich müssen die Kongruenzen erfüllt sein:

$$(3) \qquad b^\beta - 1 \equiv 0 \pmod{a},$$

$$(4) \qquad \frac{b^\beta - 1}{b-1} \equiv 0 \pmod{a},$$

$$(5) \qquad \frac{(b^\beta - 1)(b^{\beta-1} - 1)\cdots(b^{\beta-\lambda+1} - 1)}{(b-1)(b^2-1)\cdots(b^\lambda - 1)} \equiv 0 \pmod{a}.$$

Die Kongruenz (3) zeigt, daß a teilerfremd zu b sein muß.

*) Burnside, Theory of groups, p. 228.

Ist nun B_0 irgend ein Element aus $\mathfrak{B}$ und wird

(6) $$A^{-i}B_0A^i = B_i; \qquad (i = 1, 2, \cdots, a-1)$$

gesetzt, so folgt, wie leicht ersichtlich,

$$B_0B_1 \cdots B_{a-1} = (B_0A^{-1})^a.$$

Nun ist nach Voraussetzung A, also auch B_0A^{-1} mit keinem Element von $\mathfrak{B}$ außer mit 1 vertauschbar. Wären aber beide Seiten der letzten Gleichung von 1 verschieden, so müßte das Element B_0A^{-1} mit dem in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Element $B_0B_1 \cdots B_{a-1}$ als seiner a^{ten} Potenz vertauschbar sein. Es ist daher

(7) $$B_0B_1 \cdots B_{a-1} = 1.$$

Die durch die konjugierten Elemente $B_0, B_1, \cdots, B_{a-1}$ erzeugte Gruppe hat infolgedessen höchstens die Ordnung b^{a-1}. Da aber A mit dieser Gruppe vertauschbar sein muß, so kann sie wegen der über A gemachten Voraussetzung kein echter Teiler der Gruppe $\mathfrak{B}$ sein, sondern muß mit letzterer übereinstimmen. Das ist aber nur möglich, wenn

(8) $$a - 1 \geqq \beta$$

ist.

Die Kongruenz (3) besagt, daß $b^\beta - 1$ durch a teilbar ist. Der Exponent ε, zu dem b nach dem Modul a gehört, ist also ein Divisor von β. Ich will jetzt zeigen, daß $\varepsilon = \beta$ ist.

Zunächst folgt aus (4) und (8), daß ε von 1 verschieden ist. Denn wäre $b \equiv 1 \pmod{a}$, so würde der Ausdruck

$$\frac{b^\beta - 1}{b - 1} \quad \text{oder} \quad b^{\beta-1} + b^{\beta-2} + \cdots + b + 1 \equiv \beta \pmod{a}$$

sein, könnte also, da nach (8) $a > \beta$ ist, nicht, wie es die Kongruenz (4) verlangt, durch a teilbar sein. Den Beweis, daß $\varepsilon = \beta$ ist, führe ich nun durch vollständige Induktion. Ich nehme an, daß bereits gezeigt ist, daß ε nicht kleiner als eine Zahl λ ($< \beta$) ist, dann ist bloß noch nachzuweisen, daß ε nicht gleich λ sein kann. Da jeder gemeinsame Primfaktor von irgend zwei der Zahlen

$$b^\beta - 1, \; b^{\beta-1} - 1, \cdots, b^{\beta-\lambda+1} - 1$$

auch in deren Differenz und folglich in einer der Zahlen

$$b^{\beta-1}, \; b - 1, \; b^2 - 1, \cdots, b^{\lambda-1} - 1$$

aufgehen muß, von diesen aber keine durch a teilbar ist, so kann die Kongruenz (5) in der Form geschrieben werden

(9) $$\frac{b^\beta - 1}{b^\lambda - 1} \equiv 0 \pmod{a}.$$

Wäre nun $\varepsilon = \lambda$, also a Teiler von $b^\lambda - 1$ und λ Teiler von β, so könnte der auf der linken Seite der Kongruenz (9) stehende Ausdruck, der dann $\equiv \frac{\beta}{\lambda}$ wäre, zufolge der Ungleichung (8) nicht durch a teilbar sein. Es kann also ε nicht gleich λ $(\lambda < \beta)$ sein.

Die notwendige Bedingung, die erfüllt sein muß, damit ein Element von $\mathfrak{L}$ von Primzahlordnung a mit keiner Untergruppe von $\mathfrak{L}$ außer mit $\mathfrak{B}$ und 1 vertauschbar ist, ist also die, daß b nach dem Modul a zum Exponenten β gehört. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, das heißt: Wenn ein Element A aus $\mathfrak{L}$ von Primzahlordnung a der Bedingung genügt, daß b zum Exponenten β nach dem Modul a gehört, so ist es, wie ich behaupte, mit keinem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar.

Es sei $\mathfrak{B}'$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}$, welche aus sämtlichen mit A vertauschbaren Elementen von $\mathfrak{B}$ besteht. Dieselbe ist, wie aus der Definition der Gruppe $\mathfrak{L}$ unmittelbar folgt, von $\mathfrak{B}$ verschieden, ihre Ordnung sei $b^{\beta'}$ $(\beta' < \beta)$. Es kann dann A mit keinem Element von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$ vertauschbar sein. Denn wäre etwa

$$A^{-1}BA = BB',$$

wo B ein nicht zu $\mathfrak{B}'$ gehöriges Element von $\mathfrak{B}$ und B' ein Element von $\mathfrak{B}'$ bedeutet, so würde durch wiederholte Transformation mit A:

$$A^{-\tau}BA^{\tau} = BB'^{\tau},$$

also für $\tau = a$ die Gleichung $B'^a = 1$ folgen, die nicht bestehen kann, weil a teilerfremd zu b ist. Dem Element A entspricht daher ein von 1 verschiedener Isomorphismus der Gruppe $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$ in sich, seine Ordnung a muß also in der Ordnung der homogenen linearen Kongruenzgruppe von $\beta - \beta'$ Variabeln, d. h. in der Zahl

$$(b^{\beta-\beta'} - 1)\,(b^{\beta-\beta'} - b) \cdots (b^{\beta-\beta'} - b^{\beta-\beta'-1})$$

und daher in einer der Zahlen $b^{\beta-\beta'} - 1,\ b^{\beta-\beta'-1} - 1, \cdots, b - 1$ aufgehen. Das ist aber, da b nach Voraussetzung zum Exponenten β nach dem Modul a gehört, nur möglich, wenn $\beta' = 0$, also $\mathfrak{B}' = 1$ ist. A ist also mit keinem Element von $\mathfrak{B}$ außer 1 vertauschbar. Es kann aber auch mit keiner echten Untergruppe von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sein, weil, wenn es eine solche gäbe und b^{β_1} $(\beta_1 < \beta)$ ihre Ordnung wäre, a Divisor der Ordnung

$$(b^{\beta_1} - 1)\,(b^{\beta_1} - b) \cdots (b^{\beta_1} - b^{\beta_1 - 1})$$

der homogenen linearen Kongruenzgruppe von β_1 Variabeln sein müßte, also b nicht zum Exponenten β nach dem Modul a gehören könnte. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ich wende mich nun der Frage zu, wie alle diejenigen in $\mathfrak{L}$ enthaltenen Untergruppen $\mathfrak{L}'$ beschaffen sind, deren sämtliche Elemente

außer 1 mit keinem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Gruppe $\mathfrak{L}'$ ist, wie ich jetzt zeigen will, die, daß die Ordnung l' von $\mathfrak{L}'$ nur durch solche Primzahlen teilbar ist, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört. Ist nämlich $\mathfrak{L}'$ eine solche Gruppe und a irgend eine in deren Ordnung l' aufgehende Primzahl, so enthält $\mathfrak{L}'$ nach dem Cauchyschen Satze ein Element von der Ordnung a. Da dieses nach der über $\mathfrak{L}'$ gemachten Voraussetzung mit keinem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist, so muß b nach den vorstehenden Untersuchungen (mod a) zum Exponenten β gehören. Die erwähnte Bedingung ist somit notwendig. Sie ist aber auch hinreichend. Sei nämlich $\mathfrak{L}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{L}$, deren Ordnung l' nur durch solche Primzahlen teilbar ist, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört. Wäre nun ein Element G aus $\mathfrak{L}'$ mit einer Untergruppe von $\mathfrak{B}$ vertauschbar, so müßte auch jede Potenz desselben mit dieser Untergruppe vertauschbar sein. Unter diesen Potenzen befindet sich aber ein Element A von Primzahlordnung. Da letztere Divisor von l' ist und demnach b nach ihrem Modul zufolge der Voraussetzung zum Exponenten β gehört, so könnte A nach den früheren Untersuchungen mit keiner Untergruppe von $\mathfrak{B}$ außer mit $\mathfrak{B}$ und 1 vertauschbar sein. Mithin kommt auch G diese Eigenschaft zu.

Es bedeute jetzt a irgend eine Primzahl, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört, und sei a^α eine in $b^\beta - 1$ enthaltene Potenz von a. Dann muß $\mathfrak{L}$ nach dem Sylowschen Satze eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ von der Ordnung a^α enthalten, weil $b^\beta - 1$, und somit a^α in der Ordnung von $\mathfrak{L}$ aufgeht. Nach dem eben bewiesenen Satze besitzen alle von 1 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft, daß sie mit keiner echten Untergruppe von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind. In den Fällen $\beta = 1$ und $\beta = 2$ sind, wie bekannt, alle derartigen Untergruppen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{L}$ zyklisch. Diese Tatsache gilt aber auch für jedes beliebige β, wie jetzt gezeigt werden soll. Im Falle $\beta > 1$ ist a ungerade zufolge der Ungleichung (8). Nun besitzt jede Gruppe, deren Ordnung gleich der Potenz einer ungeraden Primzahl a ist, falls sie nicht zyklisch ist, zwei vertauschbare Elemente von der Ordnung a, die nicht Potenzen voneinander sind. Diese Behauptung läßt sich sehr leicht auf direktem Wege nachweisen, sie folgt aber unmittelbar aus den Sätzen, daß eine nicht zyklische Gruppe, deren Ordnung Potenz einer ungeraden Primzahl a ist, stets mehr als eine Untergruppe von der Ordnung a enthalten muß*), und mindestens eine Untergruppe von der Ordnung a, deren Elemente mit allen Elementen der Gruppe vertauschbar sind. Wird also die Gruppe $\mathfrak{A}$ als nicht zyklisch

*) Burnside, Theory of groups, p. 73.

angenommen, so besitzt sie für $\beta > 1$ zwei vertauschbare Elemente A und A' von der Ordnung a, die nicht Potenzen voneinander sind. Man setze

$$(A'^i A^k)^{-1} B_0 (A'^i A^k) = B_{i,k}; \quad B_0 = B_{00},$$

wo B_0 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}$ bedeutet. Die Gleichung (7) nimmt, auf A angewandt, die Gestalt an

$$B_{00} B_{01} \cdots B_{0,a-1} = 1 \quad \text{oder} \quad \prod_{k=0}^{a-1} B_{0k} = 1.$$

Hieraus folgen, wenn man beide Seiten mit den Potenzen von A' transformiert und berücksichtigt, daß A und A' vertauschbar sind, die Gleichungen

$$\prod_{k=0}^{a-1} B_{ik} = 1; \quad i = 1, 2, \cdots, a-1,$$

welche wegen der Beziehungen

$$B_{i,k'} = B_{i,k}, \quad \text{falls} \quad k' \equiv k \pmod{a},$$

auch in der Form geschrieben werden können

$$\prod_{k=0}^{a-1} B_{i,ik} = 1; \quad i = 1, 2, \cdots, a-1,$$

da ja, wenn k die Zahlen $1, 2, \cdots, a-1$ durchläuft, auch $i \cdot k$ $(i < a)$ diese Zahlen, bloß in anderer Reihenfolge, durchläuft und die Elemente $B_{i,k}$ miteinander vertauschbar sind. Die für das Element A gültige Gleichung (7) wende man nun der Reihe nach auf die Elemente

$$A' A^k; \quad k = 0, 1, \cdots, a-1$$

an, die alle die Ordnung a haben, dann ergibt sich

$$B_{00} \prod_{i=1}^{a-1} B_{i,ik} = 1; \quad k = 0, 1, \cdots, a-1.$$

Durch Multiplikation dieser a Gleichungen folgt

$$B_{00}^a \prod_{k=0}^{a-1} \prod_{i=1}^{a-1} B_{i,ik} = 1$$

oder

$$B_{00}^a \prod_{i=1}^{a-1} \prod_{k=0}^{a-1} B_{i,ik} = 1,$$

und hieraus mit Hilfe des obigen Gleichungssystems

$$B_{00}^a = 1,$$

also eine Gleichung, die nicht möglich ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Gruppe $\mathfrak{A}$ nur zyklisch sein kann.

Die gewonnenen Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ist b eine Primzahl und $\mathfrak{B}$ eine Abelsche Gruppe, deren Basis aus β Elementen von der Ordnung b besteht, und ist die Ordnung einer in der holomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{B}$ enthaltenen Untergruppe $\mathfrak{G}$ nur durch solche Primzahlen teilbar, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört, so ist keins der Elemente von $\mathfrak{G}$ außer 1 mit einer Untergruppe von $\mathfrak{B}$ außer mit $\mathfrak{B}$ und 1 vertauschbar. Besitzen umgekehrt die sämtlichen von 1 verschiedenen Elemente einer in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Untergruppe in $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft, daß sie mit keinem echten) Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind, so ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nur durch solche Primzahlen teilbar, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört.*

Ist a eine Primzahl, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört, und ist a^α eine in $b^\beta - 1$ aufgehende Potenz von a, so sind alle in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Untergruppen von der Ordnung a^α zyklisch; es gibt also in $\mathfrak{H}$ Elemente von der Ordnung a^α, die mit keinem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind.

Als unmittelbare Folge dieser Sätze führe ich noch die folgenden Tatsachen an:

Ein in $\mathfrak{H}$ enthaltenes Element G von der Ordnung g ist dann und nur dann nebst seinen von 1 verschiedenen Potenzen mit keinem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar, wenn b nach dem Modul jeder in g aufgehenden Primzahl zum Exponenten β gehört; die einem solchen Element G entsprechende Substitution (1) *hat für $\beta > 1$ die Determinante* 1.

Der erste Teil dieser Behauptung ist klar, wenn man bedenkt, daß die Potenzen von G einen zyklischen Teiler von $\mathfrak{H}$ bilden, und auf diese die obigen Sätze anwendet. Auch der zweite Teil ist leicht einzusehen. Es sei D die Determinante der dem Element G entsprechenden Substitution (1). Dann folgt aus $G^g = 1 : D^g \equiv 1 \pmod{b}$, während nach dem Fermatschen Satze $D^{b-1} \equiv 1 \pmod{b}$ ist, mithin $D \equiv 1$ für $\beta > 1$, weil g nur durch solche Primzahlen teilbar ist, nach deren Modul b zum Exponenten β gehört, und weil demnach g und $b - 1$ teilerfremd sind.

§ 2.

Auf die weiteren Folgerungen, die sich aus den vorstehenden Untersuchungen in bezug auf die homogene lineare Kongruenzgruppe ziehen lassen, will ich hier nicht eingehen; ich werde dieselben in einer besonderen Arbeit darlegen.

Mit Hilfe der am Schlusse von § 1 aufgestellten Sätze wird es aber möglich sein, die bereits in der Einleitung erwähnte Aufgabe zu erledigen:

---

*) außer $\mathfrak{B}$ und 1.

Alle Gruppen zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß alle diejenigen ihrer Untergruppen, deren Ordnung durch mehr als eine Primzahl teilbar ist, Normalteiler sind. Diese Eigenschaft kommt allen Gruppen von Primzahlpotenzordnung, ferner allen Abelschen und Hamiltonschen Gruppen zu. Es fragt sich aber, ob es noch andere Gruppen dieser Art gibt. Ich schicke folgenden Hilfssatz I voraus:

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der hier verlangten Art und ist $\mathfrak{A}$ irgend eine von 1 verschiedene Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Primzahlpotenz a^ν ist, bedeutet ferner $\mathfrak{N}$ die Gruppe aller mit $\mathfrak{A}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{G}$, so gibt es nur zwei Möglichkeiten, entweder ist die Ordnung von $\mathfrak{N}$ eine Potenz von a, oder $\mathfrak{G}$ besitzt einen Normalteiler, dessen Ordnung eine Potenz von a ist.

Ist nämlich die Ordnung von $\mathfrak{N}$ außer durch a auch noch durch eine von a verschiedene Primzahl a' teilbar, so ist $\mathfrak{N}$ nach der über $\mathfrak{G}$ gemachten Voraussetzung ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Andererseits ist $\mathfrak{A}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}$. Jede der zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Untergruppen in $\mathfrak{G}$ ist infolgedessen auch Normalteiler von $\mathfrak{N}$ und hat die Ordnung a^ν, während das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller dieser zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Untergruppen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Die Ordnung des letzteren ist aber notwendig eine Potenz von a, weil zwei in einer Gruppe $\mathfrak{N}$ enthaltene invariante Untergruppen, deren Ordnungszahlen Potenzen derselben Primzahl a sind, bekanntlich zusammen eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{N}$ erzeugen, deren Ordnung wieder eine Potenz von a ist. Damit ist der Hilfssatz I bewiesen.

Es sei jetzt a eine in der Ordnung g von $\mathfrak{G}$ aufgehende Primzahl. Wir wollen sehen, was aus der Annahme folgt, daß $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler besitzt, dessen Ordnung eine Potenz von a ist. Es sei a^α die höchste in g enthaltene Potenz von a, und $\mathfrak{A}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung a^α, die nach dem Sylowschen Satze sicher existiert. Zufolge des Hilfssatzes I sind die Elemente von $\mathfrak{A}$ die einzigen in $\mathfrak{G}$, die mit $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind. Mithin besitzt $\mathfrak{A}$ genau $\frac{g}{a^\alpha}$ verschiedene konjugierte Untergruppen, welche

$$(1) \qquad \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2, \cdots$$

heißen mögen. Je zwei dieser Gruppen $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_k$ haben einen größten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{A}_{i,k}$, dessen Ordnung mit $a^{\alpha_{i,k}}$ bezeichnet werde. Die Zeiger i, k denke ich mir nun so gewählt, daß $\alpha_{i,k}$ den größtmöglichen Wert erhält. Nach einem bekannten Satze*) ist $\mathfrak{A}_{i,k}$ Normalteiler einer

*) Frobenius, „Über endliche Gruppen". Berl. Sitz. 1895, p. 173; Burnside, „Notes on the theory of groups of finite order". Proc. L. M. S., vol. 26, p. 209. Der

in $\mathfrak{A}_i$ enthaltenen Gruppe von der Ordnung $a^{\alpha_{i,k}+1}$, desgleichen Normalteiler einer in $\mathfrak{A}_k$ enthaltenen Gruppe von derselben Ordnung. Es gibt also in $\mathfrak{A}_i$ sowohl als in $\mathfrak{A}_k$ außerhalb $\mathfrak{A}_{i,k}$ Elemente, die mit $\mathfrak{A}_{i,k}$ vertauschbar sind. Ich betrachte jetzt die Gruppe aller mit $\mathfrak{A}_{ik}$ vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{G}$. Dieselbe muß, falls $\mathfrak{A}_{i,k}$ von 1 verschieden ist, nach dem Hilfssatz I eine Potenz von a zur Ordnung haben, nach dem Sylowschen Satze also in einer der Gruppen (1), etwa in $\mathfrak{A}_l$ enthalten sein. Nach den soeben gemachten Bemerkungen hat aber $\mathfrak{A}_l$ mit $\mathfrak{A}_i$ sowohl als mit $\mathfrak{A}_k$ einen Teiler gemeinsam, dessen Ordnung mindestens gleich $a^{\alpha_{i,k}+1}$ ist. Es hätten also zwei der Gruppen (1) einen Teiler von höherer Ordnung als $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_k$ gemeinsam. Da dies gegen unsere Annahme verstößt, so bleibt nur übrig, daß $\mathfrak{A}_{i,k} = 1$ ist, oder daß mit andern Worten je zwei der Gruppen (1) außer der Einheit kein Element gemeinsam haben können, falls $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler besitzt, dessen Ordnung eine Potenz von a ist. Die Gruppen von (1) enthalten für diesen Fall insgesamt genau

$$(2) \qquad (a^\alpha - 1) \cdot \frac{g}{a^\alpha} = g - \frac{g}{a^\alpha}$$

von 1 verschiedene Elemente, die alle eine Potenz von a zur Ordnung haben. Ihre Anzahl ist $= \frac{g}{2}$, falls $a = 2$, $\alpha = 1$ ist, sonst aber größer als $g - \frac{g}{2} = \frac{g}{2}$.

Bedeutet b eine andere in g aufgehende Primzahl, so würde aus der Annahme, daß $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler von der Ordnung $b^{\beta'}$ $(\beta' > 0)$ besäße, geschlossen werden können, daß G für $b = 2$, $\beta = 1$ genau $\frac{g}{2}$, sonst aber mehr als $\frac{g}{2}$ Elemente enthielte, deren Ordnung eine Potenz von b ist und die daher von den Elementen der Gruppen (1) verschieden sein müßten. Mit diesen zusammen würden sie, da sicher eine der beiden Primzahlen a, b von 2 verschieden ist, mehr als g Elemente ausmachen, während $\mathfrak{G}$ nur g verschiedene Elemente enthält. Daraus folgt:

Hilfssatz II. Ist $g = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots$, wo $a, b, c, \cdots$ voneinander verschiedene Primzahlen sind, die Ordnung einer Gruppe der hier betrachteten Art, und ist in $\mathfrak{G}$ kein Normalteiler enthalten, dessen Ordnung eine Potenz von a ist, so besitzt $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler, dessen Ordnung eine Potenz von b ist, ebenso einen solchen, dessen Ordnung eine Potenz von c ist usw.

---

benutzte Satz lautet: „Jede in einer Gruppe $\mathfrak{A}$ von Primzahlpotenzordnung a^α enthaltene Untergruppe von der Ordnung $a^{\alpha'}$ $(\alpha' < \alpha)$ ist Normalteiler einer in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Untergruppe von der Ordnung $a^{\alpha'+1}$."

Hilfssatz III. Hat eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der hier betrachteten Art die Ordnung $a^\alpha b^\beta$, wo a und b zwei verschiedene Primzahlen sind, und besitzt $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler, dessen Ordnung eine Potenz von a ist, so enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler von der Ordnung b^β.

Denn außer der Einheit und den $g - \frac{g}{a^\alpha} = g - b^\beta$ Elementen unter (2) kann $\mathfrak{G}$ nur noch $b^\beta - 1$ andere Elemente enthalten.

Für den Fall, daß g durch mehr als zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist, darf nach dem eben bewiesenen Satze angenommen werden, daß $\mathfrak{G}$ Normalteiler $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \cdots$ von der Ordnung $b^{\beta'}, c^{\gamma'}, \cdots$ besitzt. Jede Untergruppe $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $a^{\alpha'}$ bildet dann mit $\mathfrak{B}'$ einerseits, mit $\mathfrak{C}'$ andererseits zusammen zwei Gruppen $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'\mathfrak{A}'$, deren Ordnungen $a^{\alpha'} b^{\beta'}$ bezw. $a^{\alpha'} c^{\gamma'}$ sind und die den Durchschnitt $\mathfrak{A}'$ haben. Nach der über $\mathfrak{G}$ gemachten Voraussetzung sind dieselben Normalteiler von $\mathfrak{G}$, das gilt also auch von $\mathfrak{A}'$. Ist jetzt $\mathfrak{B}''$ irgend eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz von b ist, so folgt aus der Betrachtung der Gruppen $\mathfrak{B}''\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{B}''\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'\mathfrak{B}''$, daß $\mathfrak{B}''$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. So zeigt sich, daß jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die zur Ordnung eine Primzahlpotenz hat, invariant ist. Dann muß überhaupt jede Untergruppe invariant sein, und es gilt der Satz:

Ist die Ordnung einer Gruppe der hier betrachteten Art durch mehr als zwei Primzahlen teilbar, so muß diese eine Hamiltonsche oder Abelsche sein.

Es ist also jetzt noch der Fall zu erledigen, daß

$$g = a^\alpha b^\beta$$

ist. Ich nehme zunächst an, daß $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{A}'$ von der Ordnung $a^{\alpha'}$ $(0 < \alpha' \leqq \alpha)$ und ebenso einen Normalteiler $\mathfrak{B}'$ von der Ordnung $b^{\beta'}$ $(0 < \beta' \leqq \beta)$ enthält. Dann muß jedes Element von $\mathfrak{A}'$ mit jedem Element von $\mathfrak{B}'$ vertauschbar sein, weil $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ kein Element außer 1 gemeinsam haben. Nach dem Cauchyschen Satze besitzt $\mathfrak{A}'$ eine Untergruppe $\mathfrak{A}''$ von der Ordnung a, $\mathfrak{B}'$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}''$ von der Ordnung b. Jedes Element von $\mathfrak{A}''$ ist mit jedem Element von $\mathfrak{B}''$ vertauschbar. Das direkte Produkt von $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$ hat die Ordnung $a \cdot b$, ist also nach unserer Voraussetzung Normalteiler von $\mathfrak{G}$, folglich sind auch $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, weil $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$ die einzigen in dem direkten Produkt enthaltenen Untergruppen von der Ordnung a bezw. b sind.

Man nehme jetzt an, daß a die kleinere der beiden Primzahlen a und b ist. Es bedeute dann $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung b^β und B irgend ein Element aus $\mathfrak{B}$, seine Ordnung sei $b^{\beta'}$; R bezeichne ein Element des zyklischen Normalteilers $\mathfrak{A}''$, dann muß sein:

$$B^{-1} R B = R^r,$$

und für beliebige ganzzahlige Werte von σ

$$B^{-\sigma} R B^{\sigma} = R^{\nu^{\sigma}}.$$

Für $\sigma = b^{\beta'}$ folgt hieraus

$$\nu^{b^{\beta'}} \equiv 1 \pmod a,$$

weil $R^a = 1$ ist. Nach dem Fermatschen Satze ist aber $\nu^{a-1} \equiv 1 \pmod a$, folglich $\nu = 1$, da $a < b$ und deswegen b zu $a - 1$ teilerfremd ist. Es ist also jedes Element von $\mathfrak{B}$ mit R vertauschbar. $\mathfrak{B}$ und R erzeugen daher zusammen eine Gruppe von der Ordnung $a b^{\beta}$, die das direkte Produkt der Gruppe $\mathfrak{B}$ und der durch R erzeugten zyklischen Gruppe $\mathfrak{A}''$ ist und die nach unserer Voraussetzung Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein muß. Hieraus folgt weiter, daß jeder Faktor des direkten Produktes, also $\mathfrak{B}$ selbst Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Diese Eigenschaft kommt auch jeder Untergruppe von $\mathfrak{B}$ zu, wie genau ebenso zu erweisen ist. Hiernach ist jede Untergruppe von $\mathfrak{B}$ invariant, folglich muß $\mathfrak{B}$, da $b > a$, also von 2 verschieden ist, eine Abelsche Gruppe sein.

Da $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und deswegen nach dem Sylowschen Satze die einzige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung b^{β} ist, so ist $\mathfrak{B}''$ in ihr enthalten. Es sei jetzt $\mathfrak{D}$ irgend eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $a^{\delta} (0 < \delta \leqq \alpha)$. Die durch $\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{D}$ erzeugte Gruppe

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{D}\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}''\mathfrak{D}$$

hat die Ordnung $a^{\delta} \cdot b$, ist also nach unserer Voraussetzung Normalteiler von $\mathfrak{G}$; ihr größter gemeinschaftlicher Divisor mit $\mathfrak{B}$ ist $\mathfrak{B}''$. Nach einem bekannten Satze sind daher die Elemente der Gruppe $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}''}$ mit jedem Element der Gruppe $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}''}$ vertauschbar. Bedeutet also D irgend ein Element von $\mathfrak{D}$, B irgend ein Element von $\mathfrak{B}$, so muß sein

$$BD\mathfrak{B}'' = DB\mathfrak{B}''$$

oder

$$D^{-1}BD = BB'',$$

wo B'' ein Element von $\mathfrak{B}''$ ist. Durch Erheben beider Seiten dieser Gleichung auf die b^{te} Potenz ergibt sich

$$D^{-1}B^{b}D = B^{b},$$

weil B'' und B als Elemente der Abelschen Gruppe $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbar sind und $B''^{b} = 1$ ist. Es müssen also alle Elemente von $\mathfrak{D}$ mit B^{b} vertauschbar sein. Wäre B^{b} von 1 verschieden, so müßte das direkte Produkt von $\mathfrak{D}$ und der durch die Potenzen von B^{b} gebildeten zyklischen Gruppe Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein, weil seine Ordnung durch beide Primzahlen a und b teilbar wäre. Dann würde aber folgen, daß auch $\mathfrak{D}$ als Faktor des direkten Produktes Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{G}$

eine Hamiltonsche oder Abelsche Gruppe wäre, weil jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung invariant wäre. Mithin ist $B^b = 1$. Die durch B erzeugte zyklische Gruppe ist als Untergruppe von $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, sie erzeugt daher mit $\mathfrak{D}$ zusammen eine Gruppe, welche die Ordnung $a^\delta b$ hat und deswegen nach unserer Voraussetzung Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Diese Gruppe würde, falls B nicht in $\mathfrak{B}''$ enthalten wäre, mit $\mathfrak{G}'$ den Durchschnitt $\mathfrak{D}$ haben, $\mathfrak{D}$ also Normalteiler von $\mathfrak{G}$, mithin $\mathfrak{G}$ eine Abelsche oder Hamiltonsche Gruppe sein. Daher ist jedes Element B aus $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}''$ enthalten, d. h. $\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}$, also $\beta = 1$, $g = a^\alpha b$, $\mathfrak{G}' = \mathfrak{D}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}$.

Bedeutet nun $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{D}$ enthaltende Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung a^α, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, und $\mathfrak{D}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{A}$, weil $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}}$ Normalteiler von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}}$ und weil ferner $\mathfrak{D}$ einstufig isomorph zu $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{A}$ einstufig isomorph zu $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}}$ ist. Alle Untergruppen von $\mathfrak{A}$ sind also invariant, d. h. $\mathfrak{A}$ ist eine Abelsche oder Hamiltonsche Gruppe.

Ich betrachte jetzt die Gruppe $\mathfrak{R}$ aller Elemente von $\mathfrak{A}$, die mit den Elementen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind. Ihre Ordnung sei a^γ. Als Untergruppe von $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{R}$ eine Abelsche oder Hamiltonsche Gruppe. Das direkte Produkt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ heiße $\mathfrak{H}$. Offenbar ist jedes Element von $\mathfrak{H}$ mit jedem Element von $\mathfrak{B}$ vertauschbar, weil es die Form $R'B^\nu = B^\nu R'$ hat, wo R' ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Außerhalb $\mathfrak{H}$ gibt es keine Elemente in $\mathfrak{G}$, die mit den Elementen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind. Denn jedes Element von $\mathfrak{G}$ hat die Form AB^ν, wo A ein Element von $\mathfrak{A}$ ist; wenn dasselbe also mit B vertauschbar sein sollte, so müßte A diese Eigenschaft haben und demnach zu $\mathfrak{R}$ gehören. Die Gruppe

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{R}$$

von der Ordnung $a^\gamma b$ enthält also genau die Elemente von $\mathfrak{G}$, die mit den Elementen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind. Da $\mathfrak{H}$ als direktes Produkt zweier Abelschen oder Hamiltonschen Gruppen selbst eine Abelsche oder Hamiltonsche Gruppe ist, so muß $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ verschieden sein. $\mathfrak{H}$ ist aber auch von $\mathfrak{B}$, und somit $\mathfrak{R}$ von 1 verschieden, weil, wie oben gezeigt wurde, das Element R von der Ordnung a mit allen Elementen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist.

Transformiert man die Elemente von $\mathfrak{B}$ mit einem Element A_1 von $\mathfrak{A}$, so entsteht ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ in sich. Alle Elemente des Komplexes $A_1\mathfrak{R}$ rufen denselben Isomorphismus hervor. Sind ferner A_1 und A_2 irgend zwei Elemente von $\mathfrak{A}$, denen derselbe Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ entspricht, so entspricht $A_1^{-1}A_2$ der Isomorphismus 1, d. h. $A_1^{-1}A_2$ gehört der Gruppe $\mathfrak{R}$, also A_2 dem Komplexe $A_1\mathfrak{R}$ an. Die zu $\mathfrak{R}$ kom-

plementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$, deren Ordnung $a^{\alpha-\eta}$ ist, ist daher einstufig isomorph zu einer Untergruppe der Isomorphismengruppe von $\mathfrak{B}$. Da diese Isomorphismengruppe zyklisch ist und die Ordnung $b-1$ hat, so muß die Gruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ ebenfalls zyklisch, ihre Ordnung ein Teiler von $b-1$ sein. Das erzeugende Element von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ heiße $A\mathfrak{N}$, wo A ein Element aus $\mathfrak{A}$ ist und die Eigenschaft besitzt, daß seine $a^{\alpha-\eta}$te Potenz, aber keine niederere, in $\mathfrak{N}$ enthalten ist. Dann müssen die Bedingungen erfüllt sein

(3) $$A^{-1}BA = B^{\nu}; \quad A^{-\tau}B^{\sigma}A^{\tau} = B^{\sigma\cdot\nu^{\tau}},$$

wobei ν eine Zahl ist, die (mod. b) zum Exponenten $a^{\alpha-\eta}$ gehört.

Hat also eine Gruppe der verlangten Art die Ordnung $g = a^{\alpha}b^{\beta}$, wo a und b Primzahlen sind ($a < b$), und besitzt sie einen Normalteiler, dessen Ordnung eine Potenz von a ist, ebenso einen Normalteiler, dessen Ordnung eine Potenz von b ist, so muß $\beta = 1$, also $g = a^{\alpha}b$ sein; $\mathfrak{G}$ enthält dann einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von der Ordnung b und eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ von der Ordnung a^{α}, die eine Abelsche oder Hamiltonsche Gruppe ist und die einen von $\mathfrak{A}$ und 1 verschiedenen Normalteiler $\mathfrak{N}$ besitzt, dessen Elemente mit jedem Element von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind und dessen komplementäre Gruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ zyklisch ist. Die erzeugenden Elemente B von $\mathfrak{B}$ und $A\mathfrak{N}$ von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}}$ sind durch die Gleichung (3) *verbunden.*

Ich betrachte zunächst den Fall weiter, daß $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe ist. Man kann sich die Basis von $\mathfrak{A}$ so gewählt denken, daß A eines ihrer Elemente ist, weil $\mathfrak{A}$ kein Element enthalten darf, von welchem A die $a$te Potenz ist. Setzt man

(4) $$A^{a^{\alpha-\eta}} = A_1; \quad 0 < \eta < \alpha$$

und definiert die Gruppen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B}$ durch die Gleichungen

(5) $$\begin{cases} A_i^{a^{\alpha_i}} = 1; \quad (i = 1, 2, \cdots, \varrho); \quad B^b = 1 \\ A_iA_k = A_kA_i; \quad BA_i = A_iB; \quad (i, k = 1, 2, \cdots, \varrho) \\ \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\varrho = \eta \end{cases}$$

und fügt noch die Bedingungen hinzu

(6) $$AA_i = A_iA; \quad (i = 1, 2, \cdots, \varrho),$$

so wird durch die Gleichungen (3) *bis* (6) *eine Gruppe der verlangten Art von der Ordnung $a^{\alpha}b$ definiert, falls a und b Primzahlen sind und ν zum Exponenten $a^{\alpha-\eta}$* (mod. b) *gehört. Jedes Element derselben kann auf die Form gebracht werden*

(7) $$A^x A_1^{x_1} A_2^{x} \cdots A_\varrho^{x_\varrho} B^y.$$

Zwei Elemente setzen sich nach der Regel zusammen

$$(8) \qquad (A^x A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_\varrho^{x_\varrho} B^y)(A^{x'} A_1^{x_1'} A_2^{x_2'} \cdots A_\varrho^{x_\varrho'} B^{y'})$$
$$= A^{x+x'} A_1^{x_1+x_1'} A_2^{x_2+x_2'} \cdots A_\varrho^{x_\varrho+x_\varrho'} B^{y\cdot\nu^{x'}+y'}.$$

Es ist noch zu zeigen, daß die so definierte Gruppe $\mathfrak{G}$ wirklich die verlangte Eigenschaft hat, daß also jede Untergruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $a^{\alpha'}b (0 < \alpha')$ invariant ist. Die durch B erzeugte zyklische Gruppe $\mathfrak{B}$ von der Ordnung b ist zufolge der Bedingungen (3) und (5) Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}'$ enthält nach dem Sylowschen Satze eine Untergruppe von der Ordnung b, die, da sie auch Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, $\mathfrak{G}$ aber nur eine einzige Untergruppe von der Ordnung b, nämlich $\mathfrak{B}$, besitzt, mit $\mathfrak{B}$ identisch sein muß. Denkt man sich jedes Element von $\mathfrak{G}$ in der Form (7) geschrieben, so wird zufolge (8) jedes Element G' aus $\mathfrak{G}'$ von irgend einem Element von $\mathfrak{G}$ in ein anderes transformiert, das sich von G nur durch den Exponenten unterscheiden kann, den das Element B hat, also, da die Potenzen von B der Gruppe $\mathfrak{G}'$ angehören, wieder in ein Element von $\mathfrak{G}'$, d. h. $\mathfrak{G}'$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Ist ν eine Zahl, die (mod. b) zum Exponenten $a^{\alpha-\eta}$ gehört, so ist bekanntlich jede andere derartige Zahl ν' in der Form darstellbar $\nu' \equiv \nu^r$, wo r relativ prim zu a ist. Nimmt man $A'\mathfrak{R} = A^r\mathfrak{R}$ als erzeugendes Element von $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$, so ist zufolge (3) $A'^{-1}BA' = B^{\nu'}$. Daraus erkennt man, daß *alle möglichen Werte ν zu derselben Gruppe führen.*

Es sei jetzt $\mathfrak{A}$ eine Hamiltonsche Gruppe, also das direkte Produkt der Quaternionengruppe $\mathfrak{Q}$ und einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}'$ von der Ordnung $2^{\alpha-3}$, deren sämtliche Elemente die Ordnung 2 haben. $\mathfrak{Q}$ sei durch die Gleichungen definiert

$$(9) \qquad Q_1^2 = Q_2^2 = Q; \quad Q^2 = 1; \quad Q_2 Q_1 = Q_1 Q_2 Q.$$

Da $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ zyklisch ist, aber $\mathfrak{Q}$ nicht zyklisch ist, so muß ein von 1 verschiedenes Element von $\mathfrak{Q}$, also auch dessen Quadrat der Gruppe $\mathfrak{R}$ angehören. Da aber das Quadrat eines in $\mathfrak{Q}$ enthaltenen von Q und 1 verschiedenen Elementes $= Q$ ist, so gehört Q der Gruppe $\mathfrak{R}$ an. Nun ist aber das Quadrat von A, wie das jedes Elementes aus $\mathfrak{A}$ gleich Q oder 1, folglich hat $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ die Ordnung 2. Von den Elementen Q_1, Q_2, $Q_1 Q_2$ gehört wenigstens eins der Gruppe $\mathfrak{R}$ an. Sind nämlich Q_1 und Q_2 nicht in $\mathfrak{R}$ enthalten, so folgt, da $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ von der zweiten Ordnung ist, $Q_1\mathfrak{R} = Q_2\mathfrak{R}$, und daher $Q_1^2\mathfrak{R} = Q_1 Q_2 \mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R} = Q_1 Q_2 \mathfrak{R}$. Man kann sich die Bezeichnung so gewählt denken, daß Q_2 jedenfalls der Gruppe $\mathfrak{R}$ angehört.

Gehört dann außerdem noch Q_1 zu $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{Q}$ ganz in $\mathfrak{R}$ enthalten. Da alsdann die Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}'$ nicht auch in $\mathfrak{R}$ enthalten sein kann, so kann man für A ein in $\mathfrak{A}'$, aber nicht in $\mathfrak{R}$ enthaltenes Element nehmen. Dann ist

$$A^2 = 1 \tag{10}$$

und

$$A^{-1}BA = B^{-1}; \quad A^{-x}B^{\sigma}A^{x} = B^{\sigma\cdot(-1)^x}. \tag{11}$$

Durch die Gleichungen (9) *bis* (11) *wird dann zusammen mit den folgenden*

$$\begin{cases} A_i^2 = 1; \quad A_kA_i = A_iA_k; \quad (i, k = 1, 2, \cdots, \alpha - 4) \\ \left.\begin{array}{l} AA_i = A_iA; \quad AQ_k = Q_kA; \quad Q_kA_i = A_iQ_k \\ B^b = 1; \quad BQ_k = Q_kB; \quad BA_i = A_iB \end{array}\right\} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, \alpha - 4 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix} \\ b \text{ eine ungerade Primzahl} \end{cases} \tag{12}$$

eine Gruppe der verlangten Art von der Ordnung $2^{\alpha}\cdot b$ *definiert, deren allgemeines Glied die Form*

$$A^{x} A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_{\alpha-4}^{x_{\alpha-4}} Q_1^{y_1} Q_2^{y_2} Q^{y} B^{z} \tag{13}$$

hat, und in welcher sich zwei Elemente nach der Regel zusammensetzen:

$$\begin{aligned} &\left(A^{x} A_1^{x_1} \cdots A_{\alpha-4}^{x_{\alpha-4}} Q_1^{y_1} Q_2^{y_2} Q^{y} B^{z}\right)\left(A^{x'} A_1^{x_1'} \cdots A_{\alpha-4}^{x'_{\alpha-4}} Q_1^{y_1'} Q_2^{y_2'} Q^{y'} B^{z'}\right) \\ &= A^{x+x'} A_1^{x_1+x_1'} \cdots A_{\alpha-4}^{x_{\alpha-4}+x'_{\alpha-4}} Q_1^{y_1+y_1'} Q_2^{y_2+y_2'} Q^{y+y'+y_2y_1'} B^{z\cdot(-1)^{x'}+z'}. \end{aligned} \tag{14}$$

Jede Untergruppe $\mathfrak{G}'$ der so definierten Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $a^{\alpha'}b$ $(0 < \alpha')$ enthält, wie sich ebenso zeigen läßt wie im vorigen Falle, die durch B erzeugte zyklische Gruppe $\mathfrak{B}$ als Normalteiler. Die zweite Potenz eines in der Form (13) geschriebenen Elementes G aus $\mathfrak{G}$ ist zufolge (10), (12) und (14) gleich

$$Q^{y_1+y_2+y_1\cdot y_2} B^{z\cdot(-1)^x+z}.$$

Die Ordnung von G ist also dann und nur dann durch 4 teilbar, wenn wenigstens eine der Zahlen y_1, y_2 ungerade ist, in diesem Falle ist $G^2 = QB^{z\cdot(-1)^x+z}$. Enthält also $\mathfrak{G}'$ ein Element, dessen Ordnung durch 4 teilbar ist, so muß Q zu $\mathfrak{G}'$ gehören. Ist nun G' irgend ein Element von $\mathfrak{G}'$ und G'' ein zu G' konjugiertes Element in $\mathfrak{G}$, und stellt man beide in der Form (13) dar, so unterscheiden sich beide zufolge (14) nur durch die Exponenten, welche Q und B haben; G'' gehört mithin auch zu $\mathfrak{G}'$, weil Q und B Elemente von $\mathfrak{G}'$ sind, d. h. $\mathfrak{G}'$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Enthält aber $\mathfrak{G}'$ kein Element, dessen Ordnung durch 4 teilbar

ist, so hat, weil dann y_1 und y_2 für jedes Element G' von $\mathfrak{G}'$ gerade sind, dieses die Gestalt

$$G' = A^x A_1^{x_1} \cdots A_{\alpha-4}^{x_{\alpha-4}} Q^y B^z.$$

Ein zu G' konjugiertes Element in $\mathfrak{G}$ unterscheidet sich von G' nur durch den Exponenten von B, gehört also ebenfalls $\mathfrak{G}'$ an, weil B ein Element aus $\mathfrak{G}'$ ist. In jedem Falle ist also $\mathfrak{G}'$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, mithin $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der verlangten Art.

Es sei jetzt Q_1 nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten. Dann muß sein

$$(15) \qquad Q_1^{-1} B Q_1 = B^{-1}; \quad Q_1^{-r} B^\sigma Q^r = B^{\sigma \cdot (-1)^r}.$$

Die Gleichungen (9) *und* (15) *mit den folgenden zusammen*

$$(16) \quad \begin{cases} A_i^2 = 1; \quad A_k A_i = A_i A_k; \quad (i, k = 1, 2, \cdots, \alpha - 3) \\ A_i Q_k = Q_k A_i; \quad B^b = 1; \quad A_i B = B A_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, \alpha - 3;\ k = 1, 2) \\ Q_2 B = B Q_2, \end{cases}$$

wo b eine ungerade Primzahl bedeutet, definieren eine Gruppe der verlangten Art von der Ordnung $2^\alpha \cdot b$, deren allgemeines Glied die Form

$$(17) \qquad Q_1^{y_1} Q_2^{y_2} Q^y A_1^{x_1} A_2^{x_2} \cdots A_{\alpha-3}^{x_{\alpha-3}} B^z$$

hat, und in der sich zwei Elemente nach der Regel zusammensetzen:

$$(18) \quad \left(Q_1^{y_1} Q_2^{y_2} Q^y A_1^{x_1} \cdots A_{\alpha-3}^{x_{\alpha-3}} B^z\right)\left(Q_1^{y_1'} Q_2^{y_2'} Q^{y'} A_1^{x_1'} A_2^{x_2'} \cdots A_{\alpha-3}^{x_{\alpha-3}'} B^{z'}\right)$$
$$= Q_1^{y_1+y_1'} Q_2^{y_2+y_2'} Q^{y+y'+y_2 y_1'} A_1^{x_1+x_1'} \cdots A_{\alpha-3}^{x_{\alpha-3}+x_{\alpha-3}'} B^{z\cdot(-1)^{y_1'}+z'}.$$

Da die zweite Potenz des Elementes (17) nach (16) und (18) gleich

$$Q^{y_1+y_2+y_1 y_2} B^{z\cdot(-1)^{y_1}+z}$$

ist, so gestaltet sich der Beweis, daß die so definierte Gruppe von der verlangten Art ist, ebenso wie im vorigen Falle.

Es bleibt nun noch der Fall zu erledigen übrig, in welchem $\mathfrak{G}$ nicht gleichzeitig Normalteiler von den Ordnungszahlen $a^{\alpha'}$ und $b^{\beta'}$ enthält. Ich will annehmen, daß $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler besitze, dessen Ordnung eine Potenz von a ist; dann enthält $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz III einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von der Ordnung b^β. Bezeichnet man eine der Untergruppen von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung gleich a^α ist, mit $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

Ein Element A aus $\mathfrak{A}$ darf mit keiner echten Untergruppe $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sein. Denn andernfalls würde A mit $\mathfrak{B}'$ zusammen einen Normalteiler $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ erzeugen, der mit $\mathfrak{B}$ den Durchschnitt $\mathfrak{B}'$ hätte, welcher demnach ebenfalls Normalteiler von $\mathfrak{G}$ wäre. $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}'}$ hätte dann die Normalteiler $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}'}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$, welche nur das Einheitselement $\mathfrak{B}'$ miteinander

gemeinsam hätten. Folglich müßten die Elemente von $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}'}$ mit denen von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$ vertauschbar sein. Da die Ordnung von $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}'}$ eine Potenz von a, die von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$ eine Potenz von b wäre, so müßte das direkte Produkt der Gruppen $\frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{B}'}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'}$ ein Element von der Ordnung $a \cdot b$ enthalten. Daraus würde aber folgen, daß $\mathfrak{G}$ ein Element enthielte, dessen $a \cdot b^{\text{te}}$ Potenz die erste in $\mathfrak{B}'$ enthaltene Potenz, dessen Ordnung also von der Form ab^ν $(0 < \nu)$ wäre. Die Potenzen desselben würden einen zyklischen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ darstellen, dessen einzige Untergruppe von der Ordnung a Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein müßte. Es darf also A nicht mit $\mathfrak{B}'$ vertauschbar sein.

Nun besitzt $\mathfrak{B}$ wie jede Gruppe von Primzahlpotenzordnung Elemente, die mit allen Elementen dieser Gruppe vertauschbar sind. Alle diejenigen unter ihnen, deren Ordnung gleich b ist, bilden eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{B}$, die, da sie einzig in ihrer Art ist, auch Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein muß. Daraus folgt, daß $\mathfrak{B}$ eine Abelsche Gruppe sein muß, deren sämtliche Elemente die Ordnung b haben, weil andernfalls die Elemente von $\mathfrak{G}$ mit einem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar wären.

Da $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, so gilt für jedes Element A von $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$A^{-1}\left(B_0^{z_0} B_1^{z_1} \cdots B_{\beta-1}^{z_{\beta-1}}\right) A = B_0^{z_0'} B_1^{z_1'} \cdots B_{\beta-1}^{z'_{\beta-1}}, \tag{19}$$

wo $B_0, B_1, \cdots, B_{\beta-1}$ eine Basis von $\mathfrak{B}$ bedeutet und

$$\begin{cases} z_0' \equiv c_{00} z_0 + c_{01} z_1 + \cdots + c_{0,\beta-1} z_{\beta-1}, \\ z_1' \equiv c_{10} z_0 + c_{11} z_1 + \cdots + c_{1,\beta-1} z_{\beta-1}, \quad \pmod{b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z'_{\beta-1} \equiv c_{\beta-1,0} z_0 + c_{\beta-1,1} z_1 + \cdots + c_{\beta-1,\beta-1} z_{\beta-1} \end{cases} \tag{20}$$

ist. Dabei entspricht keinen zwei Elementen A und A' dieselbe Substitution (20), weil sonst $A^{-1}A'$ die Einheitssubstitution entsprechen würde, d. h. $A^{-1}A'$ mit allen Elementen von $\mathfrak{B}$ vertauschbar wäre. Demnach ist $\mathfrak{G}$ ein Teiler der holomorphen Gruppe von $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{A}$ kann als Teiler der in § 1 mit $\mathfrak{L}$ bezeichneten Gruppe angenommen werden. Weil die Ordnung von $\mathfrak{A}$ eine Primzahlpotenz und jedes der Elemente von $\mathfrak{A}$ außer der Einheit mit keiner Untergruppe von $\mathfrak{B}$ außer mit $\mathfrak{B}$ und 1 vertauschbar ist, so ist $\mathfrak{A}$ nach dem in § 1 bewiesenen Satze zyklisch, und die Primzahl a muß der Bedingung genügen, daß b (mod a) zum Exponenten β gehört und daß a^α in $b^\beta - 1$ aufgeht. Zu den bereits aufgezählten drei Typen der hier betrachteten Gruppenart kommt also noch ein vierter Typ hinzu. Es gilt der Satz:

Sind a und b zwei Primzahlen und gehört b nach dem Modul a zum Exponenten β, ist ferner $\mathfrak{B}$ eine durch die Relationen

$$B_i^b = 1; \quad B_i B_k = B_k B_i; \quad (i, k = 0, 1, \cdots, \beta - 1) \tag{21}$$

definierte Abelsche Gruppe, so bestimmen die Gleichungen (19) *bis* (21) *und die Gleichung*

$$A^{a^\alpha} = 1 \tag{22}$$

eine Gruppe der verlangten Art von der Ordnung $a^\alpha b^\beta$, falls a^α in $b^\beta - 1$ aufgeht und die Substitution (20) *die Ordnung a^α hat.*

Die Existenz einer durch die Gleichungen (19) bis (22) definierten Gruppe $\mathfrak{G}$ ergibt sich unmittelbar aus den in § 1 geführten Untersuchungen als Untergruppe der holomorphen Gruppe von $\mathfrak{B}$. Aus denselben geht auch hervor, daß die von 1 verschiedenen Potenzen von A mit keinem echten Teiler von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind, weil die Substitution (20) die Ordnung a^α haben soll und b (mod a) zum Exponenten β gehört. Diese Bedingung erfüllt überhaupt jedes nicht zu $\mathfrak{B}$ gehörige Element von $\mathfrak{G}$, weil man sich dasselbe durch Komposition aus einem Element von $\mathfrak{B}$ und einem Element von $\mathfrak{A}$ entstanden denken kann. Es ist auch leicht ersichtlich, daß die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gleich $a^\alpha b^\beta$ ist. Es ist aber noch nachzuweisen, daß alle Untergruppen von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $a^{\alpha'} b^{\beta'}$ $(0 < \alpha'; \; 0 < \beta')$ invariant sind. Es sei $\mathfrak{G}'$ eine solche Untergruppe. Nach dem Sylowschen Satze besitzt dieselbe eine Untergruppe $\mathfrak{B}'$ von der Ordnung $b^{\beta'}$, die auch Teiler von $\mathfrak{G}$ und infolgedessen, da $\mathfrak{B}$ die einzige in $\mathfrak{G}$ enthaltene Untergruppe von der Ordnung b^β ist, Teiler von $\mathfrak{B}$ ist. Auch die zu $\mathfrak{B}'$ konjugierten Untergruppen in $\mathfrak{G}'$ und somit deren kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches $\mathfrak{C}$, das Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist, müssen in $\mathfrak{B}$ enthalten sein. Weil aber kein Element von $\mathfrak{G}$ außerhalb $\mathfrak{B}$ mit einer echten Untergruppe von $\mathfrak{B}$ vertauschbar sein darf, so muß $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, $\beta' = \beta$ sein. *Nun hat jedes Element von $\mathfrak{G}$ die Form $A^\varrho B$, wo B ein Element von $\mathfrak{B}$ ist; das aus zwei Elementen $A^\varrho B$ und $A^{\varrho'} B'$ zusammengesetzte Element ist $= A^{\varrho + \varrho'} B''$, wo B'' ein durch* (19) *und* (20) *wohlbestimmtes Element von $\mathfrak{B}$ ist.* Ist daher $G' = A^\varrho B$ ein Element aus $\mathfrak{G}'$, so hat jedes zu G' in $\mathfrak{G}$ konjugierte Element die Gestalt $A^\varrho B'$, wo B' ein Element aus $\mathfrak{B}$ ist, gehört mithin der Gruppe $\mathfrak{G}'$ an, weil $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}'$ enthalten ist, d. h. $\mathfrak{G}'$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Die Basis von $\mathfrak{B}$ läßt sich zweckmäßig wählen, indem man

$$B_i = A^{-i} B_0 A^i; \quad (i = 0, 1, \cdots, \beta - 1) \tag{23}$$

nimmt. Setzt man dann

$$B_\beta = A^{-\beta} B_0 A^\beta = B_0^{r_0} B_1^{r_1} \cdots B_{\beta-1}^{r_{\beta-1}}, \tag{24}$$

so hat die Substitution (20) die Gestalt

$$(25)\qquad \begin{cases} z_0' \equiv & + r_0 z_{\beta-1}, \\ z_1' \equiv z_0 & + r_1 z_{\beta-1}, \\ z_2' \equiv \quad z_1 & + r_2 z_{\beta-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ z_{\beta-1}' \equiv & z_{\beta-2} + r_{\beta-1} z_{\beta-1}. \end{cases} \pmod b$$

Da die Determinante derselben nach § 1 $\equiv 1 \pmod b$ ist, so folgt

$$(26)\qquad r_0 \equiv (-1)^{\beta-1} \pmod b.$$

Die übrigen Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_{\beta-1}$ sind durch die Bedingung zu bestimmen, daß die Ordnung der Substitution (25) gleich a^α ist. Ihre Berechnung ist zufolge § 1 stets ausführbar. Die Bestimmung ist aber nicht eindeutig. *Es wird mehrere Substitutionen* (25) *geben, die den verlangten Bedingungen genügen, sie führen aber alle zu derselben Gruppe* $\mathfrak{G}$, wie ich jetzt zeigen will.

Es sei nämlich $\mathfrak{H}$ die holomorphe Gruppe von $\mathfrak{B}$ wie in § 1. Zwei verschiedenen Substitutionen (20) oder (25) entsprechen dann in $\mathfrak{H}$ zwei verschiedene Elemente A und A' von der Ordnung a^α, welche die zyklischen Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ erzeugen mögen. Die höchste in $b^\beta - 1$, also in der Ordnung von $\mathfrak{H}$ aufgehende Potenz von a sei $a^{\bar\alpha}$. Dann ist nach dem Sylowschen Satze jede der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in einer Untergruppe von $\mathfrak{H}$ von der Ordnung $a^{\bar\alpha}$ enthalten, $\mathfrak{A}$ in $\bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}'$ in $\bar{\mathfrak{A}}'$, wobei $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{A}}'$ konjugiert sind. Es sei $\bar{\mathfrak{A}}' = H^{-1}\bar{\mathfrak{A}}H$, wo H ein gewisses Element von $\mathfrak{H}$ bedeutet. Nun sind die Gruppen $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{A}}'$ nach § 1 zyklisch, enthalten also jede nur eine einzige zyklische Untergruppe von der Ordnung a^α, folglich ist auch $\mathfrak{A}' = H^{-1}\mathfrak{A}H$, weil $\mathfrak{A}$ in $\bar{\mathfrak{A}}$, also $H^{-1}\mathfrak{A}H$ in $H^{-1}\bar{\mathfrak{A}}H$, d. h. in $\bar{\mathfrak{A}}'$ enthalten ist, und daher $H^{-1}AH = A'^{\nu}$, wo ν relativ prim zu a ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $\nu = 1$ annehmen, da A' und $\mathfrak{B}$ dieselbe Gruppe erzeugen wie A'^{ν} und $\mathfrak{B}$. Ist aber

$$A' = H^{-1}AH$$

und entspricht dem Element A die Substitution (20) oder (25), wird ferner

$$H^{-1}B_iH = B_i'; \quad (i = 0, 1, \cdots, \beta - 1)$$

gesetzt, so folgt aus der Gleichung

$$A^{-1}\left(B_0^{z_0} B_1^{z_1} \cdots B_{\beta-1}^{z_{\beta-1}}\right) A = B_0^{z_0'} B_1^{z_1'} \cdots B_{\beta-1}^{z_{\beta-1}'}$$

durch Transformation beider Seiten mit H:

$$A'^{-1}\left(B_0'^{z_0} B_1'^{z_1} \cdots B_{\beta-1}'^{z_{\beta-1}}\right) A' = B_0'^{z_0'} B_1'^{z_1'} \cdots B_{\beta-1}'^{z_{\beta-1}'}.$$

Die durch die Elemente A und B_i $(i = 0, 1, \cdots, \beta - 1)$ erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}$

ist daher einstufig isomorph zu der durch A' und B_i' erzeugten Gruppe $\mathfrak{G}'$, wie man erkennt, wenn man den Elementen A und B_i aus $\mathfrak{G}$ die Elemente A' und B_i' aus $\mathfrak{G}'$ zuordnet.

Schlußsatz: *Gruppen, welche die Eigenschaft haben, daß jede in ihnen enthaltene Untergruppe, deren Ordnung durch wenigstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist, invariant ist, müssen, wenn in ihrer Ordnung mehr als zwei verschiedene Primzahlen aufgehen, Abelsche oder Hamiltonsche sein. An Gruppen dieser Art, deren Ordnung durch genau zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist und die nicht Abelsche oder Hamiltonsche Gruppen sind, gibt es vier Typen:*

1) *Gruppen von der Ordnung* $a^\alpha b$, *definiert durch die Gleichungen* (3) *bis* (6),

2) *Gruppen von der Ordnung* $2^\alpha b$, *definiert durch die Gleichungen* (9) *bis* (12),

3) *Gruppen von der Ordnung* $2^\alpha b$, *definiert durch die Gleichungen* (9), (15) *und* (16),

4) *Gruppen von der Ordnung* $a^\alpha b^\beta$, *definiert durch die Gleichungen* (19) *bis* (22).

Zwei Gruppen der ersten Art sind dann und nur dann einstufig isomorph, wenn in beiden die Zahlen a, b, α, η, α_i *die gleichen sind; zwei Gruppen der zweiten Art, ebenso zwei Gruppen der dritten Art sind dann und nur dann einstufig isomorph, wenn in beiden die Zahlen* b *und* α *die gleichen sind; zwei Gruppen der vierten Art sind dann und nur dann einstufig isomorph, wenn in beiden die Zahlen* a, b, α, β *die gleichen sind.*

Die Zerlegung von Zahlen mit Hilfe periodischer Kettenbrüche.

Von

Freiherrn M. v. Thielmann in Berlin.

Die Darstellung der Quadratwurzel einer ganzen Zahl als Kettenbruch bietet die Möglichkeit, mit gewissen Beschränkungen eine jede Zahl, die aus mindestens zwei voneinander und von der 1 verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt ist, in zwei Faktoren zu zerlegen. Die Untersuchung des hierzu einzuschlagenden Verfahrens geht aus von der Pellschen Gleichung:

$$t^2 - D \cdot u^2 = \pm 1.$$

Die Gleichung ist mit doppeltem Vorzeichen zu schreiben, und es ist ihre Auflösung in niedrigsten Zahlen für die weitere Rechnung zu benutzen.

Typus einer Zahl D — Typ (D) — soll die Gesamtheit aller derjenigen Zahlen genannt werden, deren Quadratwurzeln, als Kettenbruch dargestellt, mit D (der niedrigsten von ihnen) die gleiche Periode mit Ausschluß des letzten Periodengliedes $\left(\text{Partialnenner } 2 \cdot E\sqrt{D}\right)$ besitzen. Der Typus einer jeden Zahl D ist eine nach oben unendliche Reihe zweiter Ordnung, von welcher jedes Glied die Form hat:

$$\mathrm{Typ}_n(D) = u^2 \cdot n^2 + 2tn + D.$$

Der Beweis hierfür ist leicht ersichtlich, indem man $E\sqrt{D} = x$, $D = y$ setzt, den Kettenbruch des Typus in einen gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$ verwandelt, und dann die Lösungen der diophantischen Gleichung

$$(bx + a)^2 = b^2 \cdot y \pm 1$$

in ganzen Zahlen findet. Bei $n = 0$ wird also $\mathrm{Typ}_0\,(D) = D$; D soll deshalb das Fußglied des Typus heißen.

Die Typen scheiden sich in zwei Gruppen, die nach der Anzahl ihrer Kettenglieder (der Partialnenner) geraden und die ungeraden; die ersteren entsprechen den Zahlen mit ungeradzahliger Kettenbruchsperiode der Quadratwurzel, die letzteren denjenigen mit geradzahliger; die geraden

Typen haben in ihrer Kette also nur paarige Partialnenner, während die ungeraden in der Mitte einen unpaarigen zeigen. Dieser Unterschied ist für die Untersuchung grundlegend, denn es gehören

1) alle Primzahlen von der Form $4m+1$ zu geraden Typen,
2) alle Primzahlen von der Form $4m+3$ zu ungeraden Typen,
3) die zusammengesetzten Zahlen in sehr überwiegender Mehrzahl zu ungeraden Typen.

Zu geraden Typen gehört nur ein Teil derjenigen zusammengesetzten Zahlen, deren Primfaktoren von der Form $4m+1$ mit oder ohne Hinzutritt der 2 (nicht aber deren höherer Potenzen) sind; in den ungeraden Typen kommen dagegen Zahlen der verschiedenartigsten Zusammensetzung vor, so auch Produkte von lauter Primfaktoren der Form $4m+1$.

Die Kette der geraden Typen führt stets zu einer niedrigsten Lösung der Pellschen Gleichung mit negativem Vorzeichen; unter den Reihengliedern der geraden Typen, sowohl Fußgliedern wie Folgegliedern, erscheinen Primzahlen $4m+1$ und zusammengesetzte Zahlen durcheinander. Die Kette der ungeraden Typen führt dagegen zur Lösung der Pellschen Gleichung mit positivem Vorzeichen; ihr Fußglied ist teils prim von der Form $4m+3$, teils zusammengesetzt, während ihre Folgeglieder ausnahmslos zusammengesetzte Zahlen sind.

Da bei den ungeraden Typen die Pellsche Gleichung auch so geschrieben werden kann: $t^2 - 1 = (t+1)\cdot(t-1) = D\cdot u^2$, ist es möglich, sie zur Zerlegung von Typ (D) zu benutzen. Die oben gegebene allgemeine Typusformel: $\text{Typ}_n\,(D) = u^2\cdot n^2 + 2tn + D$ läßt sich nämlich bei ungeraden Typen stets als ein Produkt zweier Faktoren darstellen, nach einer der beiden folgenden Gleichungen:

ungerader $\text{Typ}_n\,(D) =$

$$\text{(A)}\qquad \left(Q^2\cdot n + \frac{t_D \pm 1}{M^2}\right)\cdot\left(M^2\cdot n + \frac{t_D \mp 1}{Q^2}\right),$$

$$\text{(B)}\qquad \left(2\cdot\left[\frac{Q}{2}\right]^2\cdot n + \frac{t_D \pm 1}{2\cdot M^2}\right)\cdot\left(2\cdot M^2\cdot n + \frac{t_D \mp 1}{2\cdot\left[\frac{Q}{2}\right]^2}\right).$$

Die Gleichung (A) tritt ein, sobald der unpaarige mittlere Partialnenner der Periode (und damit das u der Pellschen Gleichung) ungerade ist, die Gleichung (B), sobald er (und damit u) gerade ist. Das obere Vorzeichen gilt, wenn die Vorkette (Kettenglieder vor dem unpaarigen Mittelglied) geradzahlig ist, das untere Vorzeichen bei ungeradzahliger Vorkette. Die Elemente Q und M sind aus der Kettenpruchperiode von $\sqrt{D}$ zu entnehmen, in folgender Weise: das unpaarige Mittelglied wird mit $\frac{1}{w}$

bezeichnet. Der unterhalb von $\frac{1}{w}$ belegene Teil der Periode, mit Fortlassung des Schlußgliedes $= 2 \cdot E\sqrt{D}$, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, dessen Zähler $= P$, dessen Nenner $= M$ gesetzt wird. Q wird $= w \cdot M + 2P$ angenommen. u ist sodann $= M \cdot Q$.

Aus diesen Formeln läßt sich die Zerlegung einer ihrer Zusammensetzung nach unbekannten Zahl k auf verschiedene Weisen herleiten, wie an dem Beispiel $k = 36\,343\,817$ gezeigt werden soll.

I. Der vollständigste, wenn auch umständlichste Weg bestimmt zunächst den Typus, zu welchem k gehört. Man entwickelt den Kettenbruch von $\sqrt{k}$, und findet seine Periode: (Partialnenner 1, 1, 2, 1, 1, 12056). Die Typuskette ist also 1, 1, 2, 1, 1. In einen gemeinen Bruch verwandelt, ist sie $= \frac{7}{12}$. Man setzt nun an:

$$(12x + 7)^2 = 12^2 \cdot y + 1,$$

und findet als Lösung in kleinsten Zahlen: $x = 4$, $y = 21$. Die obige Zahl k gehört also zu Typ (21) und kann, da sie nicht Fußglied ihres Typus ist, keinenfalls Primzahl sein. Aus der Periode ergeben sich $M = 2$, $Q = 6$, $t_{21} = 55$, $u = 12$; wegen des geraden w tritt die Gleichung (B) ein, wegen der geradzahligen Vorkette das obere Vorzeichen. Sonach ist

$$\text{Typ}\,(21) = 12^2 \cdot n^2 + 2 \cdot 55 \cdot n + 21 = (2 \cdot 3^2 \cdot n + 7) \cdot (2 \cdot 2^2 \cdot n + 3).$$

Für das obige k wird $n = 502$ bestimmt, und dies ergibt:

$$k = 36\,343\,817 = (18 \cdot 502 + 7) \cdot (8 \cdot 502 + 3) = 9043 \cdot 4019.$$

Beide Faktoren sind Primzahlen, und um die Zerlegung auf dem gewöhnlichen Wege durchzuführen, hätte es des Versuches mit den 553 Primzahlen < 4019 bedurft.

Bei der Aufsuchung des Typus ist übrigens ein Irrtum zu vermeiden, der am besten an einem Beispiel erläutert wird. Viele Zahlen haben, gleich der Periode der Zahlen von der Form $m^2 + 1$, in ihrer Typuskette ein einziges Glied, wie z. B. 39 die 4. Setzt man nun die Gleichung an: $(4x + 1)^2 = 16y + 1$, so erhält man $y = x^2 + \frac{x}{2}$. Nähme man hier das niedrigste $x = 2$, so würde $y = 5$. Das wäre aber unrichtig, denn $D = 5$ hat die 4 zwar als einzigen Partialnenner in seiner Kettenbruchperiode, nicht aber in seiner Typuskette; diese besitzt vielmehr gar kein Glied, indem die Kettenbruchperiode nur aus dem der Typuskette nicht mehr angehörigen Schlußgliede $= 2E\sqrt{D}$ besteht. Es muß im vorliegenden Falle vielmehr $x = 4$ angenommen werden, und dies führt auf 18 als Fußglied des Typus, zu welchem 39 gehört.

II. Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn von der Aufsuchung des Typus abgesehen wird, weil dann die Lösung der diophantischen Gleichung entfällt. Man beschränkt die Produktformel auf die rechten Hälften der beiden Faktorenformeln, und setzt in deren Zähler an Stelle von t_D das zu k gehörige t_k ein. Für die Zahl $k = 36\,343\,817$ stellt sich beispielsweise die Rechnung so:

$$M = 2, \quad Q = 6, \quad t_k = 72343,$$

Gleichung (B), oberes Vorzeichen, also:

$$k = \frac{72344}{2 \cdot 4} \cdot \frac{72342}{2 \cdot 9} = 9043 \cdot 4019.$$

III. Die Rechnung läßt sich noch weiter vereinfachen, indem die bei längeren Perioden mühsame Berechnung von t_k vermieden wird. Das Ergebnis ist dann ein angenähertes, aus welchem aber die gesuchten Faktoren mit völliger Sicherheit zu entnehmen sind. Wenn nämlich, nach der Rechenweise II, k in $f \cdot g$ zerlegt wird, so ist nach den gegebenen Gleichungen, jenachdem w ungerade oder gerade ist:

$$t \pm 1 = M^2 \cdot f, \quad t \mp 1 = Q^2 \cdot g$$

oder:

$$t \pm 1 = 2M^2 \cdot f, \quad t \mp 1 = \frac{Q^2}{2} \cdot g;$$

also ist $\frac{f}{g} = \frac{Q^2}{M^2} \pm z$ oder $= \frac{Q^2}{4M^2} \pm z$, wo z einen im Vergleich zu den übrigen in Rechnung stehenden Größen sehr kleinen Wert haben muß. Somit kann z vernachlässigt werden, ohne daß die bei der nachfolgenden Rechnung gefundenen f und g sich von ihrem wahren Werte als ganze Zahlen wesentlich unterscheiden. Man setzt also näherungsweise

$$\frac{f}{g} = \frac{Q^2}{M^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{Q^2}{4M^2}.$$

Da $f \cdot g = k$, so ist annäherungsweise $f = \frac{Q}{M} \cdot \sqrt{k}$ oder $= \frac{Q}{2M} \cdot \sqrt{k}$, je nach der Beschaffenheit des mittleren Partialnenners. Praktisch gestaltet sich diese Berechnungsweise so: Um Teiler der Zahl k zu finden, entwickelt man die Kettenbruchperiode von $\sqrt{k}$ bis einschließlich des unpaarigen mittleren Kettengliedes, und findet daraus die Zahlen M und Q. Dann ist die der Größe $\frac{Q}{M} \cdot \sqrt{k}$ (beziehungsweise $\frac{Q}{2M} \cdot \sqrt{k}$) absolut nächstgelegene ganze Zahl oder, bei sehr niedrigem M und Q, eine von deren beiden Nachbarzahlen der gesuchte eine Teiler von k; der andere ergibt sich durch Umkehrung der Gleichung. Je länger die Periode und je

größer die Partialnenner sind, desto mehr sind die so gefundenen Teiler ihrem wahren Werte angenähert. Für $k = 36\,343\,817$ ergibt diese Rechnung beispielsweise: $k = 9042{,}87 \cdots$ mal $4019{,}05 \cdots$, also trotz kurzer Periode und niedriger Partialnenner ein fast genaues Ergebnis.

IV. Es gibt noch einen anderen Weg, um unter Vermeidung der Ausrechnung von t, einen Faktor von D zu finden. Löst man aus der Kettenbruchsperiode von $\sqrt{D}$ denjenigen Kettenbruchteil heraus, der zwischen dem Anfangsgliede und dem unpaarigen Mittelgliede (mit Ausschluß dieser beiden) belegen ist, verwandelt diesen Kettenbruchteil in einen gemeinen Bruch und nennt dessen Nenner R, so ist:

bei ungeradem mittlerem Partialnenner der Periode: $\frac{E\sqrt{D}\cdot M + R}{Q}$,

bei geradem mittlerem Partialnenner der Periode: $\frac{2\cdot(E\sqrt{D}\cdot M + R)}{Q}$

eine ganze Zahl und zugleich Teiler von D. Bei den ohne das Schlußglied dreigliedrigen Ketten, welche die gegebene Berechnung von R nicht zulassen, ist $R = 1$ zu setzen. Für die obige Beispielszahl $k = 36\,343\,817$ ist $E\sqrt{k} = 6028$, $M = 2$, $Q = 6$, und R ergibt sich $= 1$. In der Tat ist $\frac{2\cdot(6028\cdot 2 + 1)}{6} =$ dem oben auf auf anderem Wege gefundenen Teiler 4019.

V. Ebenso leicht wie aus dem Kettenbruch selber, ist einer der gesuchten Faktoren von D aus dem üblichen Berechnungswege der Kettenbruchperiode von $\sqrt{D}$ zu entnehmen. In demjenigen Bruche von der Form $\frac{\sqrt{D}+a}{b}$, welcher zur Ermittelung des unpaarigen mittleren Partialnenners der Periode führt, besitzen der Nenner b und der Addend a im Zähler stets einen gemeinsamen Teiler mit D; in gewissen Fällen, die von dem Werte des mittleren Partialnenners abhängig sind, ist a oder b, oder beide zugleich, selber Teiler von D. Bei der obigen Zahl 36 343 817 wird beispielsweise so der Teiler 4019 gefunden. Ausnahmen treten ein für solche zusammengesetzten Zahlen, bei welchen der mittlere Partialnenner der Periode von $\sqrt{D}$ gleich der unterhalb $\sqrt{D}$ nächstgelegenen ungeraden Zahl ist.

Die dargelegte Methode ermöglicht sonach die Zerlegung einer jeden zusammengesetzten Zahl von ungeradem Typus in zwei Faktoren, und zwar uneingeschränkt, wenn diese Folgeglied eines Typus ist, mit einer Einschränkung jedoch, soweit es sich um Fußglieder von Typen handelt. Es gibt nämlich eine Klasse von Zahlen, welche sich in den obigen Formeln wie die Primzahlen von der Form $4m + 3$ verhalten, indem t bei ihnen dem Quadrate von Q benachbart ist, $= Q^2 \pm 1$. Zu dieser Klasse gehören

neben den Primzahlen $4m+3$: a) die ungeraden Potenzen der Primzahlen $4m+3$, b) die nicht primen Zahlen von der allgemeinen Form

$$(2m+1)^2 \pm 2,$$

c) eine Reihe von Zahlen verschiedenartiger Zusammensetzung, und zwar innerhalb des ersten Tausends die folgenden: 187, 267, 339, 387, 391, 411, 451, 459, 511, 603, 679, 699, 771, 779, 803, 867. Bei den Zahlen dieser Klasse tritt die Gleichung $t = Q^2 + 1$ ein, sofern sie der Form $8m+3$ zugehören, die Gleichung $t = Q^2 - 1$ bei der Form $8m+7$. Wo bei diesen Zahlen die Typuskette aus einem einzigen Gliede besteht (Form: $[2m+1]^2 + 2$) und die Zahl Q nach der Formel $w \cdot M + 2P$ also nicht gebildet werden kann, tritt der einzige Partialnenner w an die Stelle von Q, und t ist $= w^2 + 1$. Sämtliche zu dieser Klasse gehörigen Zahlen, Primzahlen und andere, haben zugleich eine besondere Eigenschaft gemein, die, abgesehen von der Zahl 8, bei welcher andere Verhältnisse obwalten, nur ihnen ausschließlich zukommt: sie zeigen nämlich als unpaarigen mittleren Partialnenner die unterhalb ihrer Quadratwurzel nächstgelegene ungerade Zahl. Da sonach das u bei diesen Zahlen stets ungerade ist, lautet für sie die Typusgleichung (A) so:

$$\mathrm{Typ}_n(D) = (M^2 \cdot n + 1) \cdot (Q^2 \cdot n + D),$$

und da ferner alle Zahlen dieser Klasse Fußglieder ihres Typus sind, versagt bei ihnen das Zerlegungsverfahren, das sich indes auf einem weiter unten beschriebenen Umwege auch für sie nutzbar machen läßt. Der innere Grund dafür, daß auch die zusammengesetzten Zahlen dieser Klasse unzerlegt auf der einen Seite der Produktformel erscheinen, ist übrigens aus der unter III. beschriebenen Rechnungsweise leicht ersichtlich. Wird nämlich die unterhalb $\sqrt{k}$ nächstbelegene ungerade Zahl allgemein mit L bezeichnet, und ist der unpaarige mittlere Partialnenner $w = L$, so wird der nach III. gefundene Faktor $f = \frac{Q}{M} \cdot \sqrt{k} = \left(L + 2 \cdot \frac{P}{M}\right) \cdot \sqrt{k}$, also näherungsweise $= k$, und der andere, durch Umkehrung der Gleichung zu gewinnende Faktor g muß $= 1$ sein. Ebenso leicht erklärt sich aus der Rechenweise III. die auffallende Tatsache, daß in der Kettenbruchperiode der Quadratwurzel einer beliebigen Zahl k von ungeradem Typus, sofern $k > 16$ ist, wohl ein gerader, nicht aber ein ungerader unpaariger mittlerer Partialnenner vorkommen kann, der zwischen $\frac{\sqrt{k}}{2}$ und $\sqrt{k} - 2$ liegt. Denn wenn der eine, nach der Gleichung $g = \frac{M}{Q} \cdot \sqrt{k}$ zu gewinnende Faktor sich als >1 ergibt, so muß er mindestens $= 2$ sein. Wird nun

$$\frac{\sqrt{k}}{w + 2 \cdot \frac{P}{M}} = 2$$

gesetzt, so ergibt eine einfache Rechnung, daß $w < \frac{\sqrt{k}}{2}$ sein muß. Für ein gerades w gilt diese Beschränkung nicht, da für ein solches die Gleichung $f = \frac{Q}{2 \cdot M} \cdot \sqrt{k}$ eintritt.

Auf Zahlen von geradem Typus läßt sich die geschilderte Methode nicht anwenden. Auch durch Quadrierung der Pellschen Gleichung ist dann nicht zu helfen; die Quadrierung ergäbe zwar einen ungeraden, also als Produkt darstellbaren Typus, allein es ist leicht ersichtlich, daß eine Zerlegung des (zusammengesetzt gedachten) Fußgliedes D in der Produktformel nicht stattfinden kann. Denn das Schlußglied der ersten Periode, $= 2 \cdot E\sqrt{D}$, wird zum unpaarigen Mittelgliede der verdoppelten Periode und bei Einsetzung der Gleichung (B) wird D aus den gleichen Gründen als $1 \cdot D$ dargestellt, welche oben für diejenigen Fußglieder ungerader Typen dargelegt sind, bei denen $w = L$ ist. Zerlegbare Folgeglieder lassen sich aus dem quadrierten Typus allerdings wie aus jedem anderen ungeraden Typus herleiten; sie gehören aber nicht zugleich zu den Gliedern der Typusreihe des primären geraden Typ(D), sondern sind von diesen durchaus verschieden.

Die Anzahl derjenigen zusammengesetzten Zahlen, welche wegen ihres geraden Typus, oder, bei ungeradem Typus, wegen der Beschaffenheit ihres mittleren Partialnenners, oder wegen Mangels einer eigentlichen Typuskette (Form: $m^2 + 1$), sich der Zerlegung nach dieser Methode entziehen, ist übrigens beschränkt. Im ersten Tausend beträgt sie 103 von 801 unquadratischen, zusammengesetzten Zahlen, also wenig über ein Achtel. Je höher der Zahlenwert steigt, um so weiter rücken die Quadrate auseinander, was für die Formen $m^2 + 1$ und $(2m + 1)^2 \pm 2$ eine verhältnismäßige Abnahme bedingt, und um so größer wird bei zusammengesetzten Zahlen schon deshalb die Wahrscheinlichkeit eines ungeraden Typus und damit der Zerlegbarkeit nach dieser Methode, weil bei wachsender Anzahl der in einer Zahl enthaltenen Primfaktoren die Wahrscheinlichkeit steigt, daß unter ihnen wenigstens ein solcher von der Form $4m + 3$ vorhanden sei. Indessen lassen sich auch alle diese, bei unmittelbarer Anwendung der Methode unzerlegbaren Zahlen, soweit sie nicht Potenzen von Primzahlen sind, auf einem Umwege der Zerlegungsweise unterwerfen. Dies geschieht, indem man der unzerlegbaren Zahl k einen Hilfskoeffizienten h hinzufügt, und hk zu zerlegen sucht. Die 2 eignet sich schlecht als Hilfskoeffizient, weil $2k$ in der Produktformel häufig als $2 \cdot k$ erscheint, die Zahl k selber also nicht zerlegt wird. Dagegen besitzt die 3 (wie wahrscheinlich alle Primzahlen von der Form $4m + 3$) die Eigenschaft, als Hilfskoeffizient in den meisten Fällen einen Faktor

aus der nach der direkten Methode unzerlegbaren Zahl k abzuspalten, und auf ihre Seite der Produktformel hinüberzuziehen. Wenn also $k (= fg)$ bei direkter Anwendung der Methode nicht zerlegt wird, so wird $3k$ meist als $3f \cdot g$ dargestellt, so daß hierdurch die beiden Faktoren von k erkennbar werden. Beispielsweise bleibt 51 (als Zahl von der Form $(2m+1)^2+2$ in der Produktformel unzerlegt; $3 \cdot 51 = 153$ wird dagegen als $9 \cdot 17$ dargestellt. In solchen Fällen freilich, wo $3k$ quadratisch ist, oder in den nicht häufigen Fällen, wo die 3 sonst versagt, muß ein anderer Hilfskoeffizient herangezogen werden; so bleibt 265 (von geradem Typus) sowohl mit der 2 wie mit der 3 als Hilfskoeffizient unzerlegt, während $1855 = 7 \cdot 265$ in $35 \cdot 53$ zerlegt wird, so daß die beiden Faktoren der 265, 5 und 53, offensichtlich werden. So ist die Möglichkeit gegeben, mittels der dargelegten Methode alle diejenigen Zahlen, welche mindestens zwei voneinander und von der 1 verschiedene Primfaktoren enthalten, als Produkt zweier Teiler darzustellen. Bei denjenigen ungeraden Zahlen, deren sämtliche Primfaktoren einander gleich sind, also bei den Potenzen der Primzahlen > 2, ist eine Zerlegung auch bei der Anwendung von Hilfskoeffizienten deshalb undenkbar, weil von den beiden Formen $t+1$, $t-1$ stets nur die eine durch die in Betracht kommende Primzahl teilbar sein kann, und die sämtlichen Faktoren der ungeraden Potenz einer Primzahl > 2 daher auf der gleichen Seite der Produktformel erscheinen müssen. Die ungeraden Potenzen der 2 werden dagegen in der Tat zerlegt.

Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli.

Par

TAMARKINE et FRIEDMANN à St. Pétersbourg.

Prenons la congruence

$$x^2 \equiv q \pmod p \tag{I}$$

où q est un nombre entier, non congru à zéro suivant le module p, p un nombre premier impair. Supposons encore, qu'on ait:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1,$$

c'est-à-dire que cette congruence soit résoluble en nombres entiers.

Dans le cas de $p = 4n - 1$ on sait que le couple des solutions de la congruence (I) sera:

$$x \equiv \pm q^{\frac{p+1}{4}} \pmod p.$$

Mais dans le cas de $p = 4n + 1$ nous ne connaissons aucune formule théorique pour la solution de la congruence (I).

Nous voulons donner ici une formule générale pour la solution de la congruence (I) *dans les deux cas possibles:* $p = 4n \mp 1$,

Théorème. *Les deux solutions de la congruence* (I) *sont:*

$$x \equiv \mp 2 \sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} q^{\frac{p-1}{2} - m} \sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y^{2m+1}.$$

Démonstration. Prenons l'expression:

$$\sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y[1 - (y^2 - q)^{p-1}]. \tag{1}$$

1) Si le nombre $y = y_1$ vérifie la congruence (1), le terme correspondant de la somme est congru à y_1 suivant le module p, car:

$$y_1[1 - (y_1^2 - q)^{p-1}] \equiv y_1 \pmod p.$$

2) Dans le cas contraire, ce terme sera congru à zéro suivant le module p.

Or, entre les limites de la sommation $\left(1 \text{ jusqu'à } \frac{p-1}{2}\right)$ on ne peut rencontrer qu'un seul nombre y_1, qui vérifie la congruence (I). Ainsi la somme (1) est congrue à y_1 suivant le module p, c'est-à-dire à la *racine**) de la congruence (I) qui est $< \frac{p}{2}$. L'autre solution sera évidemment congrue à $-y_1$.

Ainsi on peut écrire:

$$\text{(II)} \qquad x \equiv \pm \sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y[1-(y^2-q)^{p-1}] \pmod p.$$

En transformant cette formule on peut la réduire à la suivante:

$$\text{(III)} \qquad x \equiv \mp 2 \sum_{m=1}^{\frac{p-3}{2}} q^{\frac{p-1}{2}-m} \sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y^{2m+1} \pmod p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La somme $\sum\limits_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y^{2m+1}$ peut être effectuée à l'aide des fonctions de Bernoulli. En nous servant des notations de Markoff (voir «La théorie des différences», St.-Pétersbourg 1899, t. II, pp. 23—33), nous écrirons:

$$\sum_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y^{2m+1} \equiv (2m+1)!\ \varphi_{2m+2}\left(\frac{p+1}{2}\right) \equiv (2m+1)!\ \varphi_{2m+2}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\equiv \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+2}} \pmod p.$$

La dernière forme s'obtient en remplaçant $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur.

Substituant cette valeur de la somme $\sum\limits_{y=1}^{\frac{p-1}{2}} y^{2m+1}$ dans la formule (III) nous trouvons:

$$\text{(IV)} \qquad x \equiv \mp 2 \sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} q^{\frac{p-1}{2}-m} \cdot \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+2}} \pmod p.$$

---

*) Nous appelons *racines* de la congruence celles des solutions positives qui sont $< p$.

Quand $m \leqq \frac{p-5}{2}$, le nombre B_{m+1} ne contient pas le nombre p au dénominateur; mais quand $m = \frac{p-3}{2}$, on sait que:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) B_{\frac{p-1}{2}} \cdot p \equiv 1 \text{ (Mod } p).$$

Ainsi on peut écrire:

$$\text{(V)} \quad x \equiv \mp 2 \sum_{m=0}^{\frac{p-5}{2}} q^{\frac{p-1}{2}-m} \cdot \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+2}} \pm q \frac{2^{p-1}-1}{p} \quad \text{(Mod } p).$$

La formule (V) donne le couple des solutions de la congruence (I).

A l'aide de la formule (V) on peut déduire de nombreuses formules pour les nombres de Bernoulli. Donnons-en les plus intéressantes.

Posons pour abréger:

$$a_m = \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+2}} \quad \left(m \leqq \frac{p-5}{2}\right),$$

$$a_{\frac{p-3}{2}} = -\frac{2^{p-1}-1}{p}.$$

Avec cette notation la formule (V) prendra la forme:

$$\text{(VI)} \qquad x \equiv \mp 2 \sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} a_m q^{\frac{p-1}{2}-m} \quad \text{(Mod } p).$$

1) Posons $q \equiv 1$ (Mod p). Alors nous déduirons de la formule (VI):

$$1 \equiv -2 \sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} a_m \equiv -2 \sum_{m=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{(-1)^{m+1} B_{m+1}}{m+1} \cdot \frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+2}} + \frac{2^{p-1}-1}{p} \quad \text{(Mod } p).$$

2) Nous donnons une méthode générale pour obtenir des formules intéressantes sur les nombres de Bernoulli.

Pour cela, on écrira au lieu de la formule (VI) la formule suivante

$$\text{(VII)} \qquad x \equiv -2 \sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} a_m q^{\frac{p-1}{2}-m} \quad \text{(Mod } p)$$

où x représente maintenant la *racine* positive de la congruence (I), $< \frac{p}{2}$. En appelant β une racine primitive de la congruence

$$\text{(2)} \qquad y^n \equiv 1 \text{ (Mod } p)$$

nous obtenons

$$(3)\qquad (-1)^{\left[\frac{2\beta}{p}\right]}\beta \equiv -2\sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} a_m \beta^{p-1-2m} \text{ (Mod. } p).$$

Multiplions la congruence (3) par β^{2k} ($k < n$) et sommons les expressions obtenues pour *toutes* les racines de la congruence (2). Alors il viendra:

$$\sum_{\beta}(-1)^{\left[\frac{2\beta}{p}\right]}\beta^{2k+1} \equiv -2\sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} a_m \sum_{\beta}\beta^{p-1-2m+2k} \text{ (Mod } p).$$

La somme $\sum_{\beta}\beta^{p-1-2m+2k} \equiv 0$ (Mod p), si n ne divise pas le nombre $p-1-2m-2k$. Dans le cas contraire, cette somme est congrue à n suivant le module p. On trouvera sans difficulté l'expression suivante:

$$\text{(VIII)}\qquad \sum_{\beta}(-1)^{\left[\frac{2\beta}{p}\right]}\beta^{2k+1} \equiv -2n[a_k + a_{k+n} + \cdots + a_{k+tn}],$$

où

$$k + tn \leqq \frac{p-3}{2}, \quad k + (t+1)n > \frac{p-3}{2}.$$

St. Pétersbourg, 6 octobre 1905.

The derivation of Equations in Generalised Coordinates from the Principle of Least Action and allied Principles.

By

Philip E. B. Jourdain of Broadwindsor, England.

In a paper on the general equations of mechanics*), I have proved the equivalence of the principles of Hamilton and of Least Action**) with that extension of Lagrange's equations first given by Routh, who obtained equations in generalised coordinates which were applicable to non-holonomous systems. I there pointed out***) the objections which seem to hold against Voss'†) derivation of Routh's equations from the principle of Least Action, and the same objections apply also to the derivation of M. Réthy††), recently given in these 'Annalen'. For this reason, I propose to state here, in greater detail, my own derivation (§§ 1—2), and then (§ 3) to comment on those of Voss and Réthy.

1.

Both the principle of Hamilton and that of Least Action are special cases of the general principle

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left(2T\frac{d\delta t}{dt} + \delta T + \delta' U\right) dt = 0,$$

where T denotes the kinetic energy of the mechanical system, δ denotes

*) 'On the General Equations of Mechanics', Quart. Journ. of Math., 1904, pp. 61—79; see especially pp. 69—79.

**) Cf. Hölder, „Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis", Gött. Nachr., 1896, pp. 122—157, and my above-cited paper, pp. 69—73.

***) *Loc. cit.*, note on p. 75.

†) „Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis", Gött. Nachr., 1900, pp. 322—327.

††) „Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört", Math. Ann. Bd. 58 (1903), pp. 169—194.

a variation of the motion of this system between the initial and final states (corresponding to t_0, t_1), as defined by Hölder*), and $\delta' U$ is an abbreviation for an element of virtual work**). These special cases result as follows:

a) If we fix that corresponding positions on the actual and varied paths are passed at the same instant, in other words, that

$$\delta t = 0,$$

then (1) becomes the generalised Hamilton's principle:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' U)\, dt = 0;$$

b) If a force-function U, explicitly independent of t, exists, the velocity of the system on the varied path may be determined by fixing that the total energy, $T - U$, is constant with the variation of position from any point on the actual path to the corresponding position on the varied path. For U is a function of the coordinates alone, and so U and $U + \delta U$ are determined when the paths are given; and, since $\delta T - \delta U = 0$, δT, and hence the varied velocity of the system, can be found. Generalising to the cases where the principle of energy does not hold, we suppose that

$$\delta T - \delta' U = 0,$$

and (1) gives the principle of Least Action in its widest form:

$$\int_{t_0}^{t_1} (2T \cdot d\delta t + 2\delta T \cdot dt) \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt = 0.$$

2.

I have shown***) that it is sufficient to restrict our consideration to the obtaining of equations for *holonomous* systems. In fact, if the system is non-holomonous, we can always treat the system, firstly, as holonomous with more (k) than the least number ($k - l$) of parameters (q_ν), and *then* eliminate the l superfluous parameters by Routh's method. Thus, the equations to be obtained are of the classical Lagrangian form†).

*) Cf. my above-cited paper, pp. 69—71, 75 (second note).

**) This symbol does *not* imply that there is a force-function U, and is only used to emphasise that the element of work in question is independent of coordinates.

***) Loc. cit., pp. 75—76.

†) The principle (1) is the general form of all '*integral variational principles*', which give, on development, Lagrange's equations (ibid., pp. 75—76, 78). There are, however, other integral principles, analogous to (1), which furnish equations of motion different in form, but really equivalent, to those of Lagrange (cf. my paper on 'Alternative Forms of the Equations of Mechanics', Quart. Journ. of Math., 1905, pp. 284—296, see esp. pp. 290—204).

The essential point to remark in (1) is that the variations, marked by δ, are *virtual**). This is expressed as follows.

Since we can suppose that the system is holonomous, any rectangular coordinate x of the particles can be expressed as a finite function of k parameters and the time:

$$x = \varphi(q_1, q_2, \cdots, q_k, t).$$

Now, when the variation δx is quite general, that is to say, not restricted to be virtual, we have

$$(2) \qquad \delta x = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t;$$

but if the variation is virtual, we have, if we represent it by $\delta_1 x$,

$$(3) \qquad \delta_1 x = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\nu} \delta q_\nu,$$

so that

$$(3a) \qquad \delta_1 x = \delta x - \frac{\partial x}{\partial t} \delta t.$$

We have, when the displacements are found from (2),

$$\begin{aligned}
\delta T &\equiv \sum_r m_r \left(x_r' \frac{d\,\delta x_r}{dt} + \cdots\right) - 2T \frac{d\,\delta t}{dt} \\
&\equiv \sum_r m_r \Big[x_r' \Big\{ \sum_\nu \frac{\partial x_r'}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \sum_\nu \frac{\partial x_r}{\partial q_\nu} \left(\delta q_\nu' + q_\nu' \frac{d\,\delta t}{dt}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial x_r'}{\partial t} \delta t + \frac{\partial x_r}{\partial t} \frac{d\,\delta t}{dt} \Big\} + \cdots \Big] - 2T \frac{d\,\delta t}{dt} \\
&\equiv \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q_\nu'} \delta q_\nu' + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t.^{**})
\end{aligned}$$

---

*) We assume this when we utilise d'Alembert's principle (in Hölder's method) to derive (1) from the *identity*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\{ 2T \cdot d\,\delta t + \delta T \cdot dt + \sum_r m_r (x_r'' \, \delta x_r + \cdots) \Big\} \equiv 0.$$

**) In this deduction, we make use of the equations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = \frac{\partial x'}{\partial q}, \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial x'}{\partial q'}$$

and

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial x}{\partial q_\nu} q_\nu' = x'.$$

We also deduce, from the last equation,

$$2x'^2 = 2x' \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_\nu q_\nu' \frac{\partial (x'^2)}{\partial q_\nu'},$$

When, on the other hand, the variation of x is virtual $(\delta_1 x)$, we have from (3), denoting now the variation of T by $\delta_1 T$,

$$(4)\quad \delta_1 T \equiv \sum_r m_r\left(x_r' \frac{d\delta_1 x_r}{dt} + \cdots\right) - 2T\frac{d\delta t}{dt}$$

$$\equiv \sum_r m_r\left[x_r'\left\{\sum_v \frac{\partial x_r'}{\partial q_v}\delta q_v + \sum_v \frac{\partial x_r}{\partial q_v}\left(\delta q_v' + q_v'\frac{d\delta t}{dt}\right)\right\} + \cdots\right] - 2T\frac{d\delta t}{dt}$$

$$\equiv \sum_v \frac{\partial T}{\partial q_v}\delta q_v + \sum_v \frac{\partial T}{\partial q_v'}\delta q_v' + \left(\sum_v q_v'\frac{\partial T}{\partial q_v'} - 2T\right)\frac{d\delta t}{dt}{}^{*)}.$$

Now, (1) is more accurately written

$$(5)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\left(2T\frac{d\delta t}{dt} + \delta_1 T + \delta_1' U\right)dt = 0,$$

where

$$\delta_1' U \equiv \sum_v Q_v \cdot \delta q_v,$$

---

and hence

$$2T = \sum_r m_r\left(x_r' \frac{\partial x_r}{\partial t} + \cdots\right) + \sum_v q_v' \frac{\partial T}{\partial q_v'};$$

which is the generalisation, to the case where the equations of condition contain t explicitly, of the well-known formula

$$2T = \sum_v q_v' \frac{\partial T}{\partial q_v'},$$

which holds when this is not the case.

*) The intermediate step in the above deduction of an expression for δT is necessary, since, for example, if

$$W = \sum_r m_r(x_r x_r'' + \cdots),$$

we cannot write

$$\delta W = \sum_v\left(\frac{\partial W}{\partial q_v}\delta q_v + \frac{\partial W}{\partial q_v'}\delta q_v' + \frac{\partial W}{\partial q_v''}\delta q_v''\right) + \frac{\partial W}{\partial t}\delta t,$$

for, as we find from the analogous intermediate step,

$$2\delta W = \sum_v\left\{\frac{\partial W}{\partial q_v}\delta q_v + 2\frac{\partial W}{\partial q_v'}\delta q_v' + \frac{\partial W}{\partial q_v''}\delta q_v''\right\} + \frac{\partial W}{\partial t}\delta t$$

(see Quart. Journ. of Math., 1905, p. 291).

Q_ν being the force acting along the coordinate q_ν. From (5) and (4), the general equation of motion can be written:

$$(6) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} \delta q_\nu{}' + q_\nu{}' \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} \frac{d\delta t}{dt} + Q_\nu \cdot \delta q_\nu \right) = 0.$$

Since

$$\delta q_\nu{}' = \frac{d\delta q_\nu}{dt} - q_\nu{}' \frac{d\delta t}{dt},$$

we get, on substituting in (6) and after a partial integration, since δq_ν vanishes at the limits,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} + Q_\nu \right) \delta q_\nu \cdot dt = 0;$$

and, since the variations δq_ν are all independent, this is equivalent to the system of Lagrange's equations:

$$(7) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k).$$

The system (7) is then equivalent to the equation (5) (which comprises the principles of Hamilton and of Least Action as special cases), provided that the mechanical system is holonomous; and, if the mechanical system is non-holonomous, the equation (5) is equivalent to the system of Routh-Lagrange equations:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial q'_\nu} - \dfrac{\partial T}{\partial q_\nu} - Q_\nu - \displaystyle\sum_{\mu=1}^{l} \lambda_\mu a_\nu^{(\mu)} = 0, & (\nu = 1, 2, \cdots, k') \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k'} a_\nu^{(\mu)} dq_\nu + a^{(\mu)} dt = 0, & (\mu = 1, 2, \cdots, l) \end{cases}$$

where the latter equations are the l relations between the coordinates q_ν and t which are only expressible by linear and non-integrable *differential* equations, and there are still $k = k' - l$ independent parameters.

3.

Voss and Réthy*), assume, as the expression of a *virtual* displacement of x,

$$\delta_1 x = \delta x - x' \delta t;$$

*) Loc. cit., p. 172. Here, indeed, Réthy even obtains

$$\delta' q \equiv \delta q - q' \delta t$$

as the expression of a virtual variation of q. But, if the q's are really independent, any variation of them is *suo ipso* 'virtual'; the question as a to whether certain

that is to say, the projection on the x-axis of a displacement from a position on the actual path to the corresponding position on the varied path *at the same time* is a virtual displacement. But this displacement is only virtual when the path is so varied that Hamilton's principle applies; that is to say, when

$$\delta t = 0;$$

and so the application of the principle of Least Action is precluded with such a path.

Secondly, the variation of T is to be determined by (4), and not by the expression for δT, which latter is used by both Voss und Réthy.

Accordingly the result of these authors*): If the equations

$$\delta' T = \sum_\nu Q_\nu \delta' q_\nu,$$

$$0 = \left[2T \cdot \delta t + \sum_\nu \frac{\partial T}{\partial q_\nu'} \delta' q_\nu\right]_{t_0}^{t_1}$$

are considered as defining the variation for the virtual displacements $\delta' q_\nu$ and for the δt at the times t_0 and t_1, then

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt$$

vanishes when the motion of the material system is the actual motion; is to be replaced by the simpler theorem:

If only the variations are virtual, and

$$\delta_1 T = \sum_\nu Q_\nu \delta q_\nu,$$

then, if the δq's vanish at t_0 and t_1,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt$$

vanishes when the motion of the material system is the actual motion.

The Manor House, Broadwindsor, Dorset, England ,June 29th, 1905.

variations are virtual only arises for coordinates (such as in general the rectangular coordinates x_r) which are not all independent.

*) Réthy, *loc. cit.*, p. 173.

Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball.*)

Von

F. KLEIN in Göttingen.

Sir Robert Ball hat seine langjährigen Untersuchungen über Schraubentheorie im vorigen Jahre in einem stattlichen Bande zusammengefaßt**), der nicht verfehlen kann, dieser geometrischen Weiterbildung der Mechanik starrer Körper erneut das allgemeine Interesse zuzuwenden. Zwei Vorzüge sind es insbesondere, die dem Ballschen Werke von vornherein einen zahlreichen Leserkreis sichern dürften, nämlich die *Anschaulichkeit* und der *elementare Charakter* seiner grundlegenden Entwicklungen. Ich wünsche diese Vorzüge lebhaft anzuerkennen, will aber andererseits hervorheben, daß dieselben von einem gewissen Verzicht auf die Darlegung der im weiteren Verfolg der Theorie notwendig in Betracht kommenden tiefer greifenden Fragen begleitet werden (wie dies übrigens der Verfasser selbst an verschiedenen Stellen seines Buches deutlich hervorhebt).***)

Jedenfalls möchte ich im folgenden einige Ergänzungen zum Ballschen Werke geben, die manchem Leser willkommen sein dürften. Diese Ergänzungen betreffen erstlich die *allgemeine Systematik* des Gebietes im Sinne moderner invariantentheoretischer (oder gruppentheoretischer) Prinzipien, zweitens aber die Verwendung der Schraubentheorie in der Lehre

*) Abgedruckt aus dem 47ten Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik (1902); am Schluß sind einige „nachträgliche Bemerkungen" zugefügt.

**) A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge 1900.

***) Man vergl. z. B. die amüsante Auseinandersetzung, die der Verf. 1887 über die Ziele seiner Untersuchungen vor der British Association in Manchester gab und die nun aus den bez. Reports auf pg. 496—509 des vorliegenden Buches wieder abgedruckt ist. Eine Kommission ist niedergesetzt, um die Bewegungen eines starren Körpers zu untersuchen. „Let it suffice for us", sagt der Präsident der Kommission gleich zu Anfang, „to experiment upon the dynamics of this body so long it remains in or near the position it now occupies. We may leave to *some more ambitious committee* the task of following the body in all conceivable gyrations through the universe."

von den *endlichen* Bewegungen starrer Körper (wo ich übrigens in der Hauptsache nur systematisch zusammenstelle, was zerstreut in der Literatur vorliegt). Ich darf vielleicht hinzufügen, daß ich die betreffenden Überlegungen seit Jahren in Vorlesungen und gelegentlichen Vorträgen wiederholt zur Geltung gebracht habe; speziell knüpfe ich mit den Darlegungen der nächstfolgenden Paragraphen an meine eigenen Beiträge zur Liniengeometrie und Schraubentheorie aus den Jahren 1869 und 1871*), sowie an die Auseinandersetzung meines Erlanger Programmes von 1872**) an. Es hat seinen guten Sinn, daß ich mich dabei von vornherein der Methoden der *analytischen* Geometrie bediene; in der Tat meine ich, dadurch die in Betracht kommenden Beziehungen kürzer und präziser bezeichnen zu können, als dies auf andere Weise möglich wäre.

§ 1.

Von der rationellen Klassifikation geometrischer und mechanischer Größen.

Als *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* bezeichne ich in meinem Erlanger Programme den Inbegriff der Bewegungen des Raumes und seiner Ähnlichkeitstransformationen. Es möge ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt werden; ich deute an, wie die Operationen der Hauptgruppe auf die zugehörigen Punktkoordinaten wirken. Wir haben erstlich für *Drehungen um den Anfangspunkt* Formeln folgender Bauart:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a\,x + b\,y + c\,z,\\ y_1 &= a'x + b'y + c'z,\\ z_1 &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}\right.$$

dabei hat man zwischen den $a, b, c, \cdots$ die bekannten Relationen und insbesondere ist jede dieser Größen gleich der ihr in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

zugehörigen Unterdeterminante. Wir haben ferner für *Parallelverschiebungen des Raumes* Formeln, die ich so bezeichne:

$$(2)\qquad x_1 = x + A,\quad y_1 = y + B,\quad z_1 = z + C,$$

*) Math. Annalen, Bd. 2 und 4. Vgl. insbesondere die „Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper" in Bd. 4 daselbst, pg. 403—415 (1871).

**) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (Erlangen 1872), abgedruckt in Bd. 43 der Math. Annalen und anderwärts.

endlich für diejenigen *Ähnlichkeitstransformationen*, die den Koordinatenanfangspunkt festlassen:

(3) $$x_1 = \lambda x, \quad y_1 = \lambda y, \quad z_1 = \lambda z;$$

unter ihnen mögen wir die *Inversionen*

(4) $$x_1 = -x, \quad y_1 = -y, \quad z_1 = -z$$

besonders hervorheben. Die Formeln für beliebige Transformationen der Hauptgruppe ergeben sich aus (1), (2), (3) durch Kombination; wir mögen dementsprechend die (1), (2), (3) als *erzeugende Substitutionen* der Hauptgruppe bezeichnen. Es handelt sich dabei zunächst um *Raumtransformationen bei festem Koordinatensystem.* Es steht aber nichts im Wege, die Formeln auch so zu interpretieren, daß sie bei festgehaltenem Raume den Übergang je zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensysteme vorstellen (so daß es sich bei den Operationen der Hauptgruppe überhaupt um die allgemeinste Transformation der rechtwinkligen Koordinaten handelt). Wir werden in der Folge diese Auffassung, die zumal bei den Verallgemeinerungen eine Kleinigkeit bequemer scheint, bevorzugen. Die Formeln (1) und (2) ergeben dann zusammengenommen die allgemeinste Abänderung des rechtwinkligen Koordinatensystems durch *Bewegung*, Formel (4) den Übergang zu einem *inversen Koordinatensystem*, Formel (3) für die allein nur noch in Betracht kommenden positiven Werte von λ die allgemeinste Abänderung, welche aus geänderter Wahl der *Längeneinheit* resultiert.

Wir legen nunmehr nicht bloß Punkte, sondern *beliebige andere geometrische Gebilde* hinsichtlich unseres Koordinatensystems durch „Koordinaten" fest, wobei wir uns diese Gebilde in geeigneter Weise durch Punkte definiert denken, so daß ihre „Koordinaten" Verbindungen verschiedener Reihen von Punktkoordinaten sind. *Den Inbegriff der solcherweise zur Festlegung eines geometrischen Gebildes dienenden Koordinaten mögen wir jeweils als „geometrische Größe" bezeichnen.* Und nun ruht die rationelle Klassifikation geometrischer Größen, von der im folgenden ausgegangen werden soll, einfach darauf, daß wir zusehen, wie sich die in Betracht kommenden Koordinaten bei den Operationen (1), (2), (3) bez. (4) (und also überhaupt bei den Operationen der Hauptgruppe) verhalten. *Wir werden alle diejenigen und nur diejenigen geometrischen Größen als gleichartig ansehen, deren Koordinaten bei den Operationen der Hauptgruppe die gleichen Änderungen erleiden.* Erleiden aber die Koordinaten zweier Gebilde verschiedene Änderungen, so ergibt sich die geometrische Beziehung der beiden Arten geometrischer Größen zueinander unmittelbar und in erschöpfender Weise durch den Vergleich der beiderlei Änderungen.

Ausführungen zu diesem Prinzip enthält u. a. der neuerdings erschienene Artikel von Abraham über die geometrischen Grundbegriffe in der Mechanik der deformierbaren Körper, Bd. IV der mathematischen Encyklopädie, Art. 14. In der Sache hat man selbstverständlich immer dem Prinzip entsprechend verfahren. Insbesondere ist die in der Mechanik (und Physik) übliche Unterscheidung der geometrischen Größen nach ihrer *Dimension* nichts anderes als eine Inbetrachtnahme der Substitutionen (3) im Sinne unseres Prinzips (wobei man sich stillschweigend auf positive Werte von λ beschränkt). In dieser Bemerkung liegt zugleich, wie unser Prinzip auf allgemeine, mechanische oder physikalische Größen auszudehnen ist. Es ist weiterhin bequem neben der *Längeneinheit* und *Zeiteinheit* nicht, wie sonst üblich, eine Masseneinheit, sondern eine *Krafteinheit* eingeführt zu denken. Man wird daraufhin den Formeln (3) noch diejenigen zur Seite stellen, die sich auf die *Änderung der Zeiteinheit*, bez. die *Änderung der Krafteinheit* beziehen:

$$(5) \qquad t_1 = \varrho t, \qquad\qquad (6) \qquad P_1 = \sigma P;$$

man wird dann sagen, daß die Formeln (1)—(6) zusammen die *Hauptgruppe der Mechanik* (bez. der *Physik*) definieren, und ferner die mechanischen (bez. die physikalischen) Größen nach dem *Verhalten* einteilen, *welches ihre Koordinaten bei den Operationen dieser Hauptgruppe zeigen.* Übrigens werden wir auf diese erweiterten Festsetzungen nur bei Gelegenheit zurückkommen; für die laufenden Entwicklungen genügt uns die Inbetrachtnahme der räumlichen Hauptgruppe.

§ 2.

Koordinaten für die unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers, sowie für die an ihm angreifenden Kraftsysteme.

Eine unendlich kleine Bewegung mag durch folgende Formeln vorgestellt sein:

$$(7) \qquad \begin{cases} dx = (-\,ry + qz + u)\,dt, \\ dy = (-\,pz + rx + v)\,dt, \\ dz = (-\,qx + py + w)\,dt. \end{cases}$$

Wir bezeichnen die Größen

$$(8) \qquad p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

als die *Koordinaten der instantanen Geschwindigkeit,* dagegen die Größen

$$(9) \qquad pdt,\ qdt,\ rdt,\ udt,\ vdt,\ wdt$$

als die *Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung* selbst.

Kräfte am starren Körper stellen wir in üblicher Weise durch Strecken dar, welche auf bestimmte gerade Linien aufgetragen und längs dieser geraden Linien verschiebbar sind. Dabei werden wir die Länge dieser Strecken je der Größe der Kräfte gleich setzen; es ist gleichgültig, ob wir uns dabei die Kräfte sämtlich als Stoßkräfte oder als kontinuierlich wirkende Kräfte denken.*) Es seien x, y, z bez. x', y', z' Anfangs- und Endpunkt einer „linienflüchtigen" Strecke. *Dann hat man in üblicher Weise als Koordinaten derselben:*

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z, \quad yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y;$$

dieselben sechs Größen werden als Koordinaten der Kraft gelten, sofern man die Länge l der Strecke gleich der Zahl P gewählt hat, welche die Größe der Kraft mißt. Wollen wir die Abhängigkeit von der Wahl der Krafteinheit und der Längeneinheit deutlicher hervorkehren, so wird es zweckmäßiger sein, als Koordinaten der Kraft folgende sechs Größen zu bezeichnen:

$$\frac{P}{l}(x'-x), \quad \frac{P}{l}(y'-y), \quad \frac{P}{l}(z'-z), \quad \frac{P}{l}(yz'-y'z), \quad \frac{P}{l}(zx'-z'x), \quad \frac{P}{l}(xy'-x'y).$$

Als *Kräftesystem* bezeichnen wir den Inbegriff beliebig vieler auf den starren Körper wirkender Einzelkräfte und wählen als Koordinaten desselben die Summen der zusammengehörigen Koordinaten dieser Einzelkräfte. *Solcherweise erhalten wir als Koordinaten eines Kräftesystems die sechs Größen:*

$$(10) \quad \begin{aligned} X &= \sum \frac{P_i}{l_i}(x_i' - x_i), & Y &= \sum \frac{P_i}{l_i}(y_i' - y_i), & Z &= \sum \frac{P_i}{l_i}(z_i' - z_i), \\ L &= \sum \frac{P_i}{l_i}(y_i z_i' - y_i' z_i), & M &= \sum \frac{P_i}{l_i}(z_i x_i' - z_i' x_i), & N &= \sum \frac{P_i}{l_i}(x_i y_i' - x_i' y_i). \end{aligned}$$

Es wird nunmehr darauf ankommen, zuzusehen, wie sich die Koordinaten p, q, r, u, v, w (8) und die jetzt eingeführten X, Y, Z, L, M, N bei den Operationen (1)—(6) der Hauptgruppe verhalten. Ich stelle hier die Resultate einfach zusammen:

1. *Drehung um den Koordinatenanfangspunkt* (Formel (1)).

Die Koordinaten p, q, r und die u, v, w, andererseits die X, Y, Z und die L, M, N erleiden je für sich genau dieselbe Substitution wie die Punktkoordinaten x, y, z. (Dies Resultat ruht wesentlich auf dem oben hervorgehobenen Umstande, daß die Substitutionskoeffizienten $a, b, c, \cdots$ ihren bez. Unterdeterminanten gleich sind.)

*) Die Unterscheidung tritt erst ein, wenn wir zur Kinetik schreiten, wo dann die Verabredung sein wird, daß die Einheit der Stoßkraft an irgend einem Massenpunkte instantan dieselbe Geschwindigkeitsänderung hervorbringt, wie die Einheit der kontinuierlichen Kraft während der Zeiteinheit.

2. *Verschiebung* (Formel (2)).

Die p, q, r, andererseits die X, Y, Z bleiben ungeändert. Dagegen erleiden die u, v, w die folgende Substitution:

$$(11)\quad \begin{cases} u_1 = u - Cq + Br, \\ v_1 = v - Ar + Cp, \\ w_1 = w - Bp + Aq \end{cases}$$

und genau entsprechende Formeln ergeben sich für L, M, N:

$$(11')\quad \begin{cases} L_1 = L - CY + BZ, \\ M_1 = M - AZ + CX, \\ N_1 = N - BX + AY. \end{cases}$$

3. *Ähnlichkeitstransformation* (Formel (3), bez. (4)).

Ist λ positiv, so werden

(12) $p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1$ bez. gleich $p, q, r, \lambda u, \lambda v, \lambda w$

und genau so

(12') $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ bez. gleich $X, Y, Z, \lambda L, \lambda M, \lambda N$.

Dagegen tritt bei *negativem* λ ein Unterschied ein, der sich am einfachsten darin ausprägt, daß bei *Inversion*

(13) $p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1$ gleich $p, q, r, -u, -v, -w$,

dagegen

(13') $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ gleich $-X, -Y, -Z, L, M, N$

werden. (Dieser Unterschied kommt dadurch hervor, daß die in den Formeln (10) auftretenden Längen l_i absolute Beträge sind, welche als solche ihr Vorzeichen bei Inversion nicht wechseln.)

4. *Änderung der Zeiteinheit* (Formel (5)).

(14) $p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1$ sind bez. gleich $\frac{p}{\varrho}, \frac{q}{\varrho}, \frac{r}{\varrho}, \frac{u}{\varrho}, \frac{v}{\varrho}, \frac{w}{\varrho}$;

die Koordinaten des Kräftesystems bleiben ungeändert.

5. *Änderung der Krafteinheit* (Formel (6)).

Die p, q, r, u, v, w bleiben ungeändert, dagegen werden

(15) $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ bez. gleich $\sigma X, \sigma Y, \sigma Z, \sigma L, \sigma M, \sigma N$.

Indem wir uns der Kürze halber auf die *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* beschränken, werden wir zusammenfassend sagen können:

Bei bloßer Bewegung des Koordinatensystems, ebenso auch bei Ähnlichkeitstransformation von positivem Ähnlichkeitsmodul, transformieren sich die Kraftkoordinaten

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

genau wie die Geschwindigkeitskoordinaten

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w.$$

Dagegen tritt bei Inversion des Koordinatensystems ein abweichendes Verhalten ein; während die

$$p, q, r, u, v, w \quad \textit{in} \quad p, q, r, -u, -v, -w$$

übergehen, verwandeln sich die

$$X, Y, Z, L, M, N \quad \textit{bez. in} \quad -X, -Y, -Z, L, M, N.$$

§ 3.

Die Analogie der unendlich kleinen Bewegungen und der Kräftesysteme (beim starren Körper). Schraubengrößen der ersten und zweiten Art. Ballsche Schrauben.

Durch die Formeln des vorigen Paragraphen ist die Analogie von unendlich kleinen Bewegungen und Kräftesystemen, welche die ganze Mechanik der starren Körper und insbesondere die Ballsche Schraubentheorie durchzieht, auf das klarste begründet und gleichzeitig umgrenzt.

Bemerken wir vorab, daß das Größensystem

$$pdt, \quad qdi, \quad rdt, \quad udt, \quad vdt, \quad wdt$$

vermöge der Formeln (7) ohne weiteres eine (unendlich kleine) *Schraubung* des Raumes der x, y, z (von bestimmter Achse, Ganghöhe und Amplitude) bedeutet, das Größensystem der

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w$$

dementsprechend eine *Schraubungsgeschwindigkeit.* Ich will in diesem Sinne den Inbegriff der p, q, r, u, v, w fortan als eine *Schraubengröße* bezeichnen, genauer, wenn es darauf ankommt, als eine *Schraubengröße erster Art.*

Nunmehr wolle man den Inbegriff der Koordinaten eines Kräftesystems, also die in (10) definierten

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

zum Vergleich heranziehen. Wir wollen insbesondere ein Kräftesystem und eine Schraubengröße erster Art in Zusammenhang bringen, indem wir setzen:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = r, \quad L = u, \quad M = v, \quad N = w,$$

und uns fragen, wie weit diese Zusammenordnung *eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung* hat (also gegenüber den Operationen der

Hauptgruppe invariant ist). Zunächst ergeben die Formeln (14), (15) des vorigen Paragraphen, *daß die Zuordnung von der Wahl der Zeiteinheit und der Krafteinheit abhängig ist.* Ferner aber ergeben die Formeln für Drehung, Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation mit positivem Ähnlichkeitsmodul, *daß die Zuordnung von allen in diese Worte einbegriffenen Änderungen des räumlichen Koordinatensystems unabhängig ist.* Endlich die Formeln (13), (13'), *daß sich die Zuordnung bei Inversion in ihr Gegenteil verkehrt:*

$$(17) \quad X_1 = -p_1,\ Y_1 = -q_1,\ Z_1 = -r_1,\ L_1 = -u_1,\ M_1 = -v_1,\ N_1 = -w_1.$$

Die geometrische Überlegung bestätigt das so formulierte Resultat natürlich Schritt für Schritt. Ich will, um dies im Detail auszuführen, angeben, daß die *Achse* der Schraubengeschwindigkeit p, q, r, u, v, w die Linienkoordinaten hat:

$$(18) \quad p : q : r : u - kp : v - kq : w - kr,$$

wo der „Parameter"

$$(18') \quad k = \frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2},$$

und daß die *Drehgeschwindigkeit* um diese Achse die Komponenten p, q, r, die *Translationsgeschwindigkeit* längs der Achse die Komponenten kp, kq, kr besitzt. Genau entsprechend kann man bei einem Kräftesystem X, Y, Z, L, M, N eine *Zentralachse* finden, deren Linienkoordinaten durch

$$(19) \quad X : Y : Z : L - kX : M - kY : N - kZ$$

gegeben sind, unter k die Größe

$$(19') \quad k = \frac{XL + YM + ZN}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

verstanden, und das Kräftesystem läßt sich dann auf eine *Einzelkraft* mit den Komponenten X, Y, Z entlang dieser Achse und ein *Paar* mit den Komponenten kX, kY, kZ in einer zur Achse senkrechten Ebene reduzieren. Die Zusammenordnung verlangt, der Drehgeschwindigkeit *um* die Achse die *längs* der Achse wirkende Einzelkraft und der *in Richtung* der Achse liegenden Translationsgeschwindigkeit ein Paar in einer zur Achse *senkrechten* Ebene gleich zu setzen. Hierzu ist selbstverständlich eine vorherige Verständigung über die Zeiteinheit und die Krafteinheit notwendig. Erst wenn dies geschehen, kann man sagen, daß die *Intensität* eines Kräftesystems (gemessen durch $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$) gleich der durch $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ gemessenen *Intensität* einer Geschwindigkeit sei. *Darüber hinaus aber brauchen wir eine Verabredung, welchen Sinn um die Achse man einem entlang der Achse weisenden Sinne zuweisen will;* — ob den-

jenigen Sinn um die Achse, der beim Entlangblicken längs der Achse in der vorgegebenen Richtung durch die Bewegung des Uhrzeigers gegeben ist, oder den entgegengesetzten. Erst durch diese Verabredung wird die Zusammenordnung von Kräftesystem und Geschwindigkeit eindeutig. *Jede solche Verabredung verwandelt sich aber bei Inversion der Figur bekanntlich in ihr Gegenteil,* und dies ist, was durch Formel (17) ausgedrückt wird.

Der Inbegriff der $(XYZLMN)$ steht also zwar dem Inbegriff der $(pqruvw)$, d. h. der Schraubengröße erster Art sehr nahe, ist aber nicht selbst eine Schraubengröße erster Art. Wir werden ihn als *Schraubengröße zweiter Art* bezeichnen. Die Zusammenordnung der beiderlei Größenarten aber werden wir so in Worte fassen, daß wir sagen:

Nachdem Zeiteinheit und Krafteinheit festgelegt sind, gehören zu einer Schraubengröße zweiter Art immer noch zwei (entgegengesetzt gleiche) Schraubengrößen erster Art, und umgekehrt; die Zusammengehörigkeit wird erst eine eindeutige, wenn man im angegebenen Sinne eine Verabredung über rechts und links hinzufügt.

Neben die so besprochenen Schraubengrößen erster und zweiter Art treten dann *drittens* als engverwandte geometrische Gebilde die *Ballschen Schrauben* selbst. Die Ballsche Schraube ist der Inbegriff der um eine Achse herumgelegten Schraubenlinien von gegebenem Windungssinn, die eine bestimmte Ganghöhe haben, oder, wie Ball sagt, der Inbegriff von Zentralachse und Parameter (pitch). Die so definierte Ballsche Schraube ist mit dem Nullsystem, das jedem Punkte die Normalebene der durch ihn gehenden Schraubenlinien zuordnet, oder auch mit dem linearen Linienkomplex, der von den Normalen sämtlicher Schraubenlinien gebildet wird, eineindeutig zusammengeordnet; ob ich von der Ballschen Schraube, dem Nullsystem oder dem linearen Komplex spreche, ist für den hier vertretenen Standpunkt dasselbe. Jedes dieser Gebilde wird durch die *Verhältnisse* $X:Y:Z:L:M:N$ der Koordinaten einer Schraubengröße zweiter Art, oder auch durch die *Verhältnisse* $p:q:r:u:v:w$ der Koordinaten oder Schraubengröße erster Art festgelegt. In der Tat verschwindet, wenn man sich auf die Betrachtung dieser „Verhältnisse" beschränkt, der Unterschied der beiden Arten von Schraubengrößen. *Entsprechend gibt es nur eine Art Ballscher Schrauben.* Zu jeder Ballschen Schraube gehören unendlich viele Schraubengrößen erster wie zweiter Art, die sich untereinander durch Intensität und Sinn unterscheiden.

Hiermit dürfte der Zusammenhang der verschiedenen in Betracht kommenden Gebilde so vollständig dargelegt sein, als man wünschen mag. Die einzelne „Schraube" ist Trägerin von unendlich vielen „Schraubengrößen erster und zweiter Art". Indem wir die letzteren sprachlich unterscheiden, dürfte zugleich dem immer wiederkehrenden Mißverständnisse,

als handele es sich bei der Zusammenordnung der zweierlei Schraubengrößen um einen *kausalen* Zusammenhang, nach Möglichkeit vorgebeugt sein.*)

§ 4.
Über die Invarianten der Schraubengrößen und die Begründung der Artunterscheidung aus dem Arbeitsbegriff.

Die gegenseitige Beziehung der beiden Arten von Schraubengrößen findet einen sehr prägnanten Ausdruck, wenn man ihre *Invarianten* betrachtet, d. h. diejenigen aus ihren Koordinaten gebildeten rationalen ganzen Funktionen, welche gegenüber den Operationen der Hauptgruppe entweder überhaupt ungeändert bleiben oder sich nur um einen Faktor ändern. Ich werde mich hier der Kürze wegen auf diejenigen Operationen der Hauptgruppe beschränken, die entweder *Bewegungen* vorstellen oder aus Bewegungen durch Hinzutreten einer Inversion entstehen, und die ich mit Herrn Study als *Umlegungen* bezeichnen will.

Als Invarianten der einzelnen Schraubengröße ergeben sich bekanntlich erstens die Ausdrücke:

$$(20) \qquad p^2 + q^2 + r^2 \quad \text{bez.} \quad X^2 + Y^2 + Z^2,$$

die bei Bewegungen und Umlegungen gleichmäßig ungeändert bleiben, zweitens aber die folgenden:

$$(21) \qquad pu + qv + rw \quad \text{bez.} \quad XL + YM + ZN;$$

dieselben bleiben bei beliebigen Bewegungen ungeändert, kehren aber bei Umlegungen (wie aus ihrem Verhalten bei Inversion hervorgeht) ihr Zeichen um. Wir werden dementsprechend die (20) als *gerade* Invarianten bezeichnen, die (21) als *schiefe*, oder auch die (20) als *Skalare der ersten Art*, die (21) als *Skalare der zweiten Art.***)

Die hiermit eingeführte Unterscheidung überträgt sich selbstverständlich auf diejenigen „simultanen" Invarianten zweier Schraubengrößen der-

---

*) Vergl. die Erörterungen in meiner oben genannten Notiz, Math. Ann. Bd. 4, pg. 403 ff. Die Hartnäckigkeit des Mißverständnisses hat offenbar eine psychologische Wurzel. Wir sind durch unsere tägliche Beschäftigung gewöhnt, wenn wir eine Einzelkraft auf einen Körper wirken lassen, diese auf den Schwerpunkt des Körpers zu richten, worauf sie natürlich Translation des Körpers erzeugt. Von hier aus hat sich zwischen den beiden Dingen (Einzelkraft und Translation) eine Assoziation gebildet, die sich in unseren Überlegungen unwillkürlich immer wieder geltend macht, wenn man sie nicht durch eine immer wiederholte Erklärung und eine möglichst unzweideutige Sprechweise ausdrücklich abschneidet.

**) Vergl. den schon genannten Artikel von Abraham in Bd. 4 der math. Encyklopädie, Art. 14 (Nr. 11 daselbst).

selben Art, die sich aus den (20), bez. (21) durch „Polarisieren" ergeben. Ich will hier nur die Polaren der Ausdrücke (21) betrachten:

$$(22)\qquad \begin{cases} pu' + qv' + rw' + p'u + q'v + r'w, \\ XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N. \end{cases}$$

Indem dieselben auch ihrerseits Skalare zweiter Art sind, folgt:

Satz I. *Die*

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

sind zu den

$$u,\ v,\ w,\ p,\ q,\ r$$

und ebenso natürlich die

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

zu den

$$L,\ M,\ N,\ X,\ Y,\ Z$$

bei Bewegungen direkt kontragredient, bei Umlegungen kontragredient mit Zeichenwechsel.

Dem entgegen betrachte man nun den Ausdruck, der sich nach Analogie von (22) bilinear aus den Koordinaten zweier Schraubengrößen verschiedener Art zusammensetzt:

$$(23)\qquad Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr.$$

Es folgt sofort, daß derselbe nicht nur bei Bewegungen, sondern (wegen seines Verhaltens bei Inversion) auch bei Umlegungen durchaus ungeändert bleibt; *er ist ein Skalar erster Art.* Daher kommt:

Satz II. *Die*

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

sind zu den

$$u,\ v,\ w,\ p,\ q,\ r$$

sowohl bei Bewegungen wie bei Umlegungen schlechtweg kontragredient.

Durch diesen Satz dürfte die Zusammengehörigkeit der beiden Arten von Schraubengrößen in einfachster Weise bezeichnet sein. Verbinden wir ihn mit Satz I, so fallen wir auf die Analogie der zweierlei Schraubengrößen zurück, die der Gegenstand des vorigen Paragraphen war. Dieselbe mag hier folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz III. *Die*

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

sind den

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

bei Bewegungen direkt kogredient, bei Umlegungen kogredient mit Zeichenwechsel.

Die in Rede stehende Analogie folgt hier also aus dem Umstande, daß vermöge des besonderen, durch Satz I festgelegten Verhaltens der Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w die zu ihnen *kontragredienten* Größen

X, Y, Z, L, M, N zugleich in dem durch Satz III festgelegten Sinne *kogredient* sind. Hiermit dürfte der algebraische Grundgedanke dieser Beziehung so klar herausgearbeitet sein, als überhaupt möglich ist. Wir können diesen Gedanken an die Spitze der Schraubentheorie rücken, wenn wir uns das invariante Verhalten des Ausdrucks (23), bez. der Ausdrücke (22), direkt aus ihrer geometrisch-mechanischen Bedeutung klar machen. Dies ist, was ich in meiner wiederholt genannten Notiz in Bd. 4 der Math. Annalen im Auge hatte. Im gegenwärtigen Zusammenhange läßt sich die Sache folgendermaßen präzis darstellen:

1. Man interpretiere die $X, Y, Z, \cdots$ als die Koordinaten eines Systems kontinuierlich wirkender Kräfte. Dann bedeutet der Ausdruck (23) multipliziert mit dt, also das Produkt:

$$(Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr)dt \tag{24}$$

die *Arbeit,* welche das Kräftesystem bei Eintritt der unendlich kleinen Bewegung $udt, vdt, wdt, \cdots$ leistet, und ist eben darum ein *Skalar erster Art.*

2. Dagegen haben die Ausdrücke (22) vermöge ihrer geometrischen Bedeutung von vorneherein den Charakter von *Skalaren zweiter Art.* Es genügt, dies hier an dem Beispiele zweier Kräftesysteme nachzuweisen, die sich auf Einzelkräfte reduzieren lassen. Wir setzen dementsprechend

$$X_1 = \frac{P_1}{l_1}(x_1 - x_1'), \quad Y_1 = \frac{P_1}{l_1}(y_1 - y_1'), \cdots$$

und analog

$$X_2 = \frac{P_2}{l_2}(x_2 - x_2'), \quad Y_2 = \frac{P_2}{l_2}(y_2 - y_2'), \cdots$$

Hierdurch verwandelt sich $X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1$ in das Produkt von $\frac{P_1 P_2}{l_2 l_1}$ in die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix},$$

die einen sechsfachen Tetraederinhalt vorstellt und gewiß ein Skalar zweiter Art ist.

3. Aus der Nebeneinanderstellung von 1. und 2. ergibt sich nun sofort der Satz III, der das zu beweisende Resultat in präziser Form ausspricht.

§ 5.

Gruppentheoretische Charakterisierung der verschiedenen Arten von Schraubentheorien.

Bisher haben wir die Substitutionen, welche die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w (um nur von diesen zu reden) bei den Bewegungen und Umlegungen erfahren, nur erst durch das Verhalten der $p, q, \cdots$ bei den erzeugenden Operationen (1), (2), (4) definiert. Es ist von Interesse, den Inbegriff dieser Substitutionen von den Invarianten

$$p^2 + q^2 + r^2 \quad \text{und} \quad pu + qv + rw$$

aus zu charakterisieren. In dieser Hinsicht stelle ich folgenden Satz auf:

Die p, q, r erleiden alle ternären linearen Substitutionen von der Determinante $+1$, welche $p^2 + q^2 + r^2$ ungeändert lassen, die p, q, r, u, v, w zusammen aber alle senären linearen Substitutionen von der Determinante ± 1, welche $pu + qv + rw$ beziehungsweise in $\pm(pu + qv + rw)$ überführen.

Der erste Teil dieses Satzes (der sich auf die ternären Substitutionen der p, q, r bezieht) braucht nach den Angaben, die wir über das Verhalten der p, q, r bei den erzeugenden Operationen machten, nicht weiter erläutert zu werden; er bringt nur die bekannte Beziehung der Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt O zu den ternären orthogonalen Substitutionen zum Ausdruck. Sei nun irgend eine ternäre orthogonale Substitution der p, q, r von der Determinante $+1$ als Teil einer senären Substitution der p, q, r, u, v, w von der Determinate ± 1 vorgelegt, welche $(pu + qv + rw)$ bez. in $\pm(pu + qv + rw)$ verwandelt. Wir kombinieren sie mit einer Drehung um O, welche die p, q, r zu ihren Anfangswerten zurückführt (und übrigens für die u, v, w nach den Angaben von § 2 genau dieselbe ternäre Substitution von der Determinante $+1$ ergibt, wie für die p, q, r selbst, so daß der Wert von $pu + qv + rw$ und der Wert der senären Substitutionsdeterminante dabei ungeändert bleibt). Wir ziehen ferner nötigenfalls eine Inversion heran, um zu erreichen, daß $pu + qv + rw$ seinem ursprünglichen Werte direkt gleich wird; dabei erhält die senäre Substitutionsdeterminante von selbst den Wert $+1$. Die so vereinfachte Substitution hat jetzt (weil $pu + qv + rw$ in sich selbst übergehen soll) notwendig die Form

$$\left\{\begin{array}{ll} p_1 = p, & u_1 = u - Cq + Br, \\ q_1 = q, & v_1 = v - Ar + Cp, \\ r_1 = r, & w_1 = w - Bp + Aq, \end{array}\right.$$

wo einzig die A, B, C noch willkürlich sind. Eine solche Substitution

stellt aber nach (11), § 2, eine Translation dar. Also unsere anfängliche Substitution ergibt eine Translation, wenn wir sie mit einer geeigneten Rotation und eventuell einer Inversion verbinden, — *sie stellt daher von Hause aus entweder eine Bewegung oder eine Umlegung dar,* was zu beweisen war.

So viel über die Substitutionen der p, q, r, u, v, w. Die Substitutionen der X, Y, Z, L, M, N ergeben sich von da aus sofort, wenn wir nur festhalten, daß sie zu den u, v, w, p, q, r kontragredient sind.

Mit dieser Festlegung der beiderlei Substitutionsgruppen ist nach den Grundsätzen meines Erlanger Programms die zugehörige *Schraubentheorie* vollkommen charakterisiert.

Wir schreiten nach dem oben Gesagten zur Ballschen Schraubentheorie im engern Sinne, indem wir nur die *Verhältnisse* $p:q:r:u:v:w$ beziehungsweise $X:Y:Z:L:M:N$ in Betracht ziehen (wobei der Unterschied zwischen den Schraubengrößen der beiden Arten wegfällt). Die $p:q:r:u:v:w$ (um nur von diesen zu sprechen) erleiden solche (und alle solchen) linearen Substitutionen, bei denen die *Gleichungen*

$$p^2+q^2+r^2=0 \quad \text{und} \quad pu+qv+rw=0$$

in sich übergehen, der Parameter $\frac{pu+qv+rw}{p^2+q^2+r^2}$ aber entweder überhaupt ungeändert bleibt oder doch nur sein Zeichen wechselt. Wollen wir neben Bewegungen und Umlegungen auch noch Ähnlichkeitstransformationen in Betracht ziehen, so wird sich $\frac{pu+qv+rw}{p^2+q^2+r^2}$ um einen beliebigen Faktor ändern können; die auf den Parameter bezügliche Einschränkung der Substitution kommt dann in Wegfall.

Die so umgrenzte Ballsche Schraubentheorie ist mit derjenigen Liniengeometrie, welche das Nullsystem (oder, was dasselbe ist, den linearen Linienkomplex) *als Raumelement benutzt, nach dem Klassifikationsprinzip des § 1 im Wesen identisch.* Aber natürlich ist, wenn wir uns so ausdrücken, diejenige Liniengeometrie gemeint, welche die Hauptgruppe räumlicher Änderungen zugrunde legt; ich möchte sie die *konkrete Liniengeometrie* nennen. Statt dessen ist in meinen eigenen alten Arbeiten (wie auch in der Mehrzahl der seitdem erschienenen deutschen und italienischen Arbeiten) die Liniengeometrie in mehr abstrakter Form behandelt worden, nämlich unter Zugrundelegung der 15gliedrigen Gruppe, welche einerseits alle projektiven Umformungen unseres Raumes, andererseits aber die dualistischen Umformungen enthält. Für diese *abstrakte* Liniengeometrie (wie ich sie hier des Gegensatzes halber nennen möchte) gilt dann der Satz, den ich in Bd. 4 der Math. Annalen, pg. 356, aufstellte, daß bei ihr die Gruppe aller derjenigen linearen Substitutionen der $p:q:r:u:v:w$ zugrunde

liegt, welche die Gleichung $pv + qu + rw = 0$ in sich überführen. *Die Bezugnahme auf die quadratische Form $p^2 + q^2 + r^2$ ist einfach weggefallen.*

Mit der so gegebenen Entgegenstellung der zugehörigen Gruppe dürfte die Beziehung meiner eigenen alten Arbeiten und beispielsweise des Werkes von Sturm über Liniengeometrie*) zu denjenigen von Ball mit aller Schärfe gegeben sein. Auf Einzelheiten einzugehen ist hier nicht der Ort.

§ 6.

Lineare Schraubensysteme.

Nachdem solcherweise die Grundlagen der Schraubentheorie festgelegt sind, mögen wir mit Ball dazu übergehen, die *linearen Systeme* von Schrauben zu studieren, d. h. die Mannigfaltigkeiten solcher Schrauben, deren Koordinaten sich aus den Koordinaten von 2, 3, 4, 5 Schrauben mit Hilfe einer entsprechenden Zahl veränderlicher Parameter homogen linear zusammensetzen lassen. Bei der bezüglichen Diskussion beschränkt sich Ball im wesentlichen auf die Besprechung der allgemeinen Fälle oder zieht doch nur Beispiele von Spezialfällen heran. Es scheint aber erwünscht, die Diskussion systematisch durchzuführen.**)

Ich will dies hier für die zweigliedrige Schar skizzieren, beschränke mich aber dabei der Kürze halber darauf, nur die *Verhältnisse* der sechs Koordinaten in Betracht zu ziehen. Sei dementsprechend:

(25) $\varrho p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \quad \varrho q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2, \cdots, \quad \varrho w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2,$

unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Es erleichtert die Ausdrucksweise, wenn wir die so definierten $p : q : \cdots : w$ als homogene Punktkoordinaten in einem Raume von fünf Dimensionen bezeichnen. Die Formeln (25) repräsentieren dann in diesem Raume eine *gerade Linie*, und es wird sich darum handeln, die sämtlichen Geraden, die es in unserem fünfdimensionalen Raume gibt, nach ihrer Beziehung zu den beiden quadratischen Mannigfaltigkeiten $p^2 + q^2 + r^2 = 0$ und $pu + qv + rw = 0$ zu studieren, resp. zu klassifizieren. Dabei wird sich unsere Aufmerksamkeit in erster Linie auf die *Schnittpunkte* richten, welche unsere Gerade mit diesen Mannigfaltigkeiten gemein hat. Die Schnittpunkte mit jeder der beiden Mannigfaltigkeiten können getrennt sein, zusammenfallen oder un-

*) Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, 3 Teile, Leipzig 1892—1896.

**) In ähnlichem Sinne äußert sich Hr. Study auf pg. 226—228 der (bis jetzt allein erschienenen) ersten Lieferung seiner *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1901) und stellt für die demnächst erscheinende zweite Lieferung weitergehende Entwicklungen in Aussicht.

bestimmt werden. Außerdem können die Schnittpunkte, welche die gerade Linie mit der einen Mannigfaltigkeit gemein hat, mit denen, die sie mit der anderen Mannigfaltigkeit gemein hat, teilweise oder ganz koinzidieren. Des weiteren möge man Realitätsunterschiede heranziehen. *Hiernach ergibt sich eine von vornherein übersehbare Reihe von Fallunterscheidungen, die nicht nur mit leichter Mühe aufgezählt, sondern ebensowohl nach ihrer schraubentheoretischen Bedeutung diskutiert werden können.* Jeder Geometer, der mit algebraischen Betrachtungen in mehrdimensionalen Räumen einigermaßen vertraut ist, wird dies ohne weiteres ausführen; es scheint unnötig, hierbei noch länger zu verweilen.

Immerhin wird es gut sein, einen Unterschied hervorzuheben, den der geschilderte Ansatz den Ballschen Entwicklungen gegenüber zeigt. Ball berücksichtigt prinzipiell nur die *reellen* Vorkommnisse, hier dagegen wird reell und imaginär zunächst als gleichwertig betrachtet und die Frage nach den Realitätsverhältnissen erst zum Schlusse eingeführt. Um an einem Beispiel den Vorteil zu zeigen, den das letztere Verfahren haben kann, betrachten wir die Regelfläche, welche von den Achsen der Schrauben (25) gebildet wird, das sogenannte *Zylindroid*. Nach Ball ist dasselbe im allgemeinen von der dritten Ordnung; wenn aber die komponierenden Schrauben $p_1, q_1, r_1, \cdots$ und $p_2, q_2, r_2, \cdots$ sich auf zwei Rotationen reduzieren, deren Achsen sich schneiden, so artet es in dasjenige ebene Strahlbüschel aus, dem die Achsen angehören. Statt der Fläche von der dritten Ordnung haben wir dann also eine von der ersten. Wie kommt diese Ausartung zustande? Wenn wir das Imaginäre mitnehmen, finden wir zunächst, daß es Rotationen mit unbestimmter Achse gibt (es sind diejenigen Schraubenbewegungen, bei denen der durch Formel (19′) gegebene Parameter den Wert $\frac{0}{0}$ erhält). Dieselben lassen nämlich alle Minimallinien fest, welche durch einen festen Punkt des Kugelkreises in einer festen Tangentenebene desselben verlaufen, also ihrerseits ein Strahlbüschel bilden. Solcher Rotationen treten nun im vorliegenden Spezialfalle unter der Schar (25) *zwei* auf, entsprechend den beiden Minimallinien, die unter den Strahlen des Ballschen Strahlbüschels enthalten sind. Die Folge ist, daß sich von dem Zylindroid zwei imaginäre Ebenen abtrennen, nämlich die beiden Ebenen, welche sich durch die Normale zum Ballschen Strahlbüschel und die beiden Minimallinien desselben legen lassen. Der Rest, eben das Ballsche Strahlbüschel, ist dann natürlich von der ersten Ordnung. Der Leser muß entscheiden, ob der Gewinn an Einsicht, der hier und in ähnlichen Fällen resultiert, ein Äquivalent für die weitläufigere Vorbereitung ist, die erforderlich scheint, wenn man in der Geometrie mit imaginären Elementen bequem und sicher operieren will.

Übrigens möchte ich nicht minder eine Ausgestaltung der Theorie der linearen Schraubensysteme nach der *eigentlich mechanischen* Seite hin in Anregung bringen. Die Diskussion der linearen Schraubensysteme, von der ich gerade sprach, versieht uns mit einer endlichen Zahl unterschiedener Fälle der Beweglichkeit eines starren Körpers im Unendlich-Kleinen; es kann sich dabei der Reihe nach um 2, 3, 4, 5 Grade der Freiheit handeln. Nun findet man in der *Natural Philosophy* von Thomson und Tait (2. ed., vol. I, p. 155 (Nr. 201)) einen einfachen Mechanismus beschrieben, vermöge dessen man einem starren Körper fünf Grade der Beweglichkeit im Unendlich-Kleinen in allgemeinster Weise erteilen kann: der Körper ist um eine Schraubenspindel drehbar, die mit Hilfe zweier aneinander geketteter Hookescher Schlüssel an ein Postament befestigt ist. Ich stelle die Aufgabe, *die sämtlichen gemäß unserer Diskussion zu unterscheidenden reellen Fälle infinitesimaler Beweglichkeit eines starren Körpers durch möglichst einfache Mechanismen zu realisieren.*

Eine letzte Bemerkung zur Theorie der linearen Schraubensysteme möge wieder nach Seite der Gruppentheorie liegen. Camille Jordan hat bekanntlich zuerst alle kontinuierlichen und diskontinuierlichen Gruppen aufgestellt, die sich aus den reellen Bewegungen des Raumes bilden lassen.*) Unter diesen interessieren uns hier nur die *kontinuierlichen* Gruppen. Man findet dieselben bei Study im 39. Bande der Math. Annalen, p. 486—487, übersichtlich zusammengestellt und geometrisch charakterisiert; eine Tabelle der zugehörigen unendlich kleinen Bewegungen gibt Lie in Bd. III seiner Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, 1893), p. 385. Ich nenne hier von diesen Gruppen nur die einfachsten, nämlich:

a) die Gesamtheit aller ∞^3 Translationen,

b) die Gesamtheit aller ∞^4 Bewegungen, die einen unendlich fernen Punkt (oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine unendlich ferne Gerade) festlassen,

c) die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt festlassen,

d) die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen, welche eine im Endlichen gelegene Ebene festlassen.

Offenbar empfiehlt es sich, die Mechanik solcher starrer Körper, welche die Beweglichkeit einer dieser Untergruppen haben, gesondert zu bearbeiten (wie dies für den Körper mit im Endlichen gelegenem festem Punkt von jeher geschehen ist). Die unendlich kleinen Bewegungen jeder solchen Untergruppe bilden aber ein lineares Schraubensystem, und die so entstehenden linearen Schraubensysteme heben sich also vor anderen

*) Annali di Matematica, ser. 3, t. 2 (1869).

durch ihre Wichtigkeit für die Mechanik hervor; ich werde sie lineare Schraubensysteme von *selbständiger gruppentheoretischer Bedeutung* nennen. Indem ich das Koordinatensystem in geeigneter Weise wähle, bekomme ich in den Fällen a) bis d) für die Koordinaten

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

der betreffenden Schrauben folgende Werte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 0,\ 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3; \\ \text{b)} & 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4; \\ \text{c)} & \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ 0,\ 0,\ 0; \\ \text{d)} & 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ 0. \end{array}$$

Hier sind die $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, wie in (25), beliebig veränderliche Parameter. Man sollte jedes einzelne der so gewonnenen linearen Schraubensysteme genau so für die Mechanik der ihm zugehörigen endlichen Bewegungen benutzen, wie dies sofort mit dem System c) für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt und hernach mit der Gesamtheit aller Schrauben für den in allgemeinster Weise beweglichen starren Körper geschehen wird.

§ 7.

Übergang zur Kinetik. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Differentialausdrücke bez. Differentialbedingungen.

Daß für $n \geqq 2$ nicht jeder Differentialausdruck

$$\Sigma \varphi_i(x_1, \cdots, x_n)\, dx_i \tag{26}$$

ein exaktes Differential dF einer Funktion von $x_1, \cdots, x_n$ ist, und daß für $n \geqq 3$ nicht jede Differentialbedingung

$$\Sigma \varphi_i\, dx_i = 0 \tag{26'}$$

mit einer Gleichung $dF = 0$ gleichbedeutend ist, ist bekannt genug; die Klassifikation der verschiedenen in dieser Hinsicht vorliegenden Möglichkeiten wird in der Theorie des „Pfaffschen Problems“ entwickelt. Wir sprechen nach der Ausdrucksweise von Hertz in allen den Fällen, wo der Differentialausdruck oder die Differentialbedingung nicht durch ein einfaches dF ersetzt werden kann, von einem *nicht holonomen* Differentialausdruck, bez. einer *nicht holonomen* Differentialbedingung.

In der Mechanik liegt die Sache, allgemein zu reden, nun merkwürdigerweise so, daß man zwar von je Anlaß hatte, nicht holonome Differentialausdrücke und -bedingungen in Betracht zu ziehen, daß man

aber erst in den letzten Jahren angefangen hat, diesem Umstande besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden.*)

Was zunächst *nicht holonome Differentialausdrücke* angeht, so treten dieselben in unsere jetzige Betrachtung dadurch ein, daß bereits die Koordinaten pdt, qdt, rdt einer unendlich kleinen *Drehung* um O, und umsomehr die *Schraubenkoordinaten* $pdt, qdt, \cdots, wdt$ einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung eines starren Körpers nicht holonome Verbindungen der Differentiale der 3 oder 6 endlichen Parameter sind, durch welche man die Lage des Körpers in den beiden Fällen festlegen mag; wir werden hierfür sogleich noch explizite Formeln geben.

Was aber *nicht holonome Bedingungsgleichungen* betrifft, so bilden dieselben nicht etwa einen Ausnahmefall, sondern treten bei den mechanischen Vorgängen, die wir täglich beobachten, außerordentlich häufig auf. So macht Hertz in seinem Werke über die Prinzipien der Mechanik**) darauf aufmerksam, daß eine Kugel, die auf einer Ebene rollt, das Beispiel eines mechanischen Systems von 5 Freiheitsgraden abgibt, das an eine nicht holonome Bedingungsgleichung gebunden ist. Noch einfacher ist vielleicht das Beispiel eines auf horizontaler Ebene beweglichen Wagens oder Schlittens, der (wegen der Reibung an der Unterlage) immer nur in Richtung seiner Achse fortschreiten kann; wir haben hier die nicht holonome Bedingungsgleichung $dy - \operatorname{tang} \vartheta \cdot dx = 0$, unter ϑ das Azimut der Achse verstanden. Wir schließen, *daß die Betrachtung nicht holonomer Bedingungsgleichungen in der Mechanik nichts Künstliches ist, sondern von vorneherein mit in Betracht gezogen werden muß, wenn anders wir die Bewegungsvorgänge der uns umgebenden Wirklichkeit verstehen wollen.*

Wir werden daher die nicht holonomen Bedingungsgleichungen im folgenden immer mit erwähnen. Bei Ball geschieht dies nicht und braucht nicht zu geschehen, da Ball seine Betrachtungen von vorneherein in der Weise auf unendlich kleine Ortsänderungen einschränkt, daß er nur die ersten Potenzen der Differentiale beibehält. Infolgedessen kann Ball auch den starren Körper, der irgend k Differentialbeziehungen vom Typus (26) unterworfen ist, kurzweg als ein mechanisches System von $(6 - k)$ Freiheitsgraden bezeichnen. Dies würde im Falle endlicher Bewegungen nicht richtig sein: die rollende Kugel vermag trotz der nicht holonomen Bedingung, der ihre infinitesimalen Bewegungen unterworfen sind, ∞^5 Lagen anzunehmen, ebenso der auf der (x, y)-Ebene bewegliche Wagen sämtliche ∞^3 Lagen (x, y, ϑ).

---

*) Vergl. verschiedene Stellen in Voß, *Die Prinzipien der rationellen Mechanik* (Encyklopädie der Math. Wiss. IV, 1), insbesondere Nr. 38 daselbst.

**) Einleitung, p. 23.

§ 8.

Über die Verwendung der Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt.

Ehe wir zur Verwendung der Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w in der Kinetik beliebiger starrer Körper schreiten, mögen wir die Verwendung der p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt betrachten. Es handelt sich dabei zwar im Prinzip um lauter bekannte Dinge, aber man findet dieselben nicht überall in der einfachen und präzisen Form beisammen, die wir ihnen hier geben wollen, und die sich hernach unmittelbar auf die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w überträgt. Den einzelnen Angaben Beweise hinzuzufügen, wird kaum nötig sein; ich verweise wegen der etwaigen Ableitung der Resultate, sofern deutsche Literatur in Betracht gezogen werden soll, am liebsten auf die von Sommerfeld und mir herausgegebenen Vorlesungen über die *Theorie des Kreisels* (Teil I, Leipzig 1897); insbesondere geschieht dort (pag. 138ff.) die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen (im Anschluß an die ursprüngliche Entwicklung von Hayward) genau so, wie es im folgenden skizziert wird.

1. Zusammenhang der p, q, r mit den Geschwindigkeitskoordinaten $\varphi', \psi', \vartheta'$.

Wir nehmen ein im Körper festes Koordinatensystem XYZ und ein im Raume festes xyz (mit gemeinsamem Anfangspunkt), deren gegenseitige Beziehung wir durch irgend drei Parameter, für welche wir hier wegen ihres elementaren Charakters die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ nehmen wollen, festlegen (Kreisel, pg. 19). Der Übergang von der Lage φ, ψ, ϑ zur Lage $\varphi + \varphi' dt, \psi + \psi' dt, \vartheta + \vartheta' dt$ sei äquivalent mit einer Drehung durch $p dt, q dt, r dt$ um die Achsen des XYZ-Systems in seiner den Parameterwerten φ, ψ, ϑ entsprechenden Lage. Die Nebeneinanderstellung der bezüglichen Formeln ergibt dann folgenden Zusammenhang zwischen den p, q, r und den φ, ψ, ϑ, bez. $\varphi', \psi', \vartheta'$ (Kreisel, pg. 45):

$$(27) \qquad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Man erkennt, daß die p, q, r nicht-holonome Verbindungen der $\varphi', \psi', \vartheta'$ sind. Die Folge ist, daß ich in den Bewegungsgleichungen des starren Körpers zwar die $\varphi', \psi', \vartheta'$ gern durch die p, q, r ersetzen kann, daß ich aber daneben zur Lagenbestimmung des Körpers die φ, ψ, ϑ festhalten

muß, die dann mit den p, q, r durch die Gleichungen (27), welche ich die *kinematischen Gleichungen* nenne, verbunden sind.

2. Kraftkoordinaten.

Hat man bei irgend einem mechanischen System bestimmte Geschwindigkeitskoordinaten (hier also die p, q, r) ausgewählt, so hat man als Koordinaten der kontinuierlich wirkenden Kräfte allgemein diejenigen Größen zu nehmen, mit denen multipliziert die Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung in den Ausdruck für die Arbeit eingehen. Im vorliegenden Falle haben wir für die Arbeit nach (24) oben (indem die u, v, w verschwinden):

$$dA = (Lp + Mq + Nr)\, dt;$$

wir werden also das Kräftesystem, das am starren Körper angreift, durch *seine Drehmomente L, M, N um die Achsen des im Körper festen Koordinatensystems* festzulegen haben. Genau so werden wir als Koordinaten einer Stoßkraft ihre bezüglichen Drehmomente wählen, wie wir nicht weiter ausführen.

3. Aufstellung der kinetischen Gleichungen für die p, q, r.

Die Aufstellung der eigentlichen Bewegungsgleichungen für die p, q, r (der Eulerschen Bewegungsgleichungen) erfolgt nun am kürzesten folgendermaßen:

a) Man drücke die lebendige Kraft des rotierenden Körpers durch die p, q, r aus. Als Einheit der Masse ist dabei natürlich, auf Grund unserer früheren Verabredungen, diejenige zu wählen, die bei Einwirkung einer kontinuierlichen Kraft von der Größe 1 in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 erhält. Da sich die p, q, r auf ein im Körper festes Koordinatensystem beziehen, erhält man eine quadratische Form derselben mit konstanten Koeffizienten

$$T = \frac{1}{2}\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dqr + 2Erp + 2Fpq). \tag{28}$$

b) Hierauf bilde man die Koordinaten L, M, N des sogenannten „Impulses“, d. h. desjenigen Systems von Stoßkräften, welches imstande wäre, den in seiner augenblicklichen Lage ruhend gedachten Körper instantan in den Geschwindigkeitszustand p, q, r zu versetzen. Nach den Grundgesetzen der Kinetik, die in der sogenannten „ersten Zeile der Lagrangeschen Gleichungen“ ihren Ausdruck finden, erhält man dieselben aus T durch Differentiation nach den entsprechenden Geschwindigkeitskoordinaten. *Die Formeln sind:*

$$L = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad M = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial T}{\partial r}. \tag{29}$$

c) Von hier aus erhält man nun die gesuchten kinetischen Gleichungen, indem man überlegt, daß sich die Koordinaten L, M, N des Impulses während des Zeitelementes dt aus zwei Gründen um unendlich kleine Beträge abändern.

Erstlich dadurch, daß an unserem Körper von außen gegebenenfalls ein System kontinuierlich wirkender Kräfte angreift. Wir nennen die Koordinaten dieses Systems (d. h. seine Drehmomente um die X-, Y-, Z-Achse) $\mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$. Die von hier aus resultierenden Änderungen der L, M, N sind:

$$(30)\qquad d'L = \mathsf{\Lambda}\,dt, \quad d'M = \mathsf{M}\,dt, \quad d'N = \mathsf{N}\,dt.$$

Zweitens aber ändern sich die L, M, N dadurch, daß sich das Koordinatensystem XYZ, auf welches sie bezogen sind, während des Zeitelementes dt gegen seine ursprüngliche Lage um pdt, qdt, rdt gedreht hat. Wir können ebensowohl sagen, daß wir den Raum (und also den im Raume feststehenden Impulsvektor) gegen das Koordinatensystem der X, Y, Z um $-pdt, -qdt, -rdt$ gedreht haben. Dies gibt als Änderungen der L, M, N:

$$(31)\qquad d''L = (rM - qN)dt, \quad d''M = (pN - rL)dt, \quad d''N = (qL - pM)dt.$$

Die Gesamtänderung der L, M, N ist die Summe der Änderungen (30), (31); daher kommt, wenn wir noch durch dt dividieren:

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = (rM - qN) + \mathsf{\Lambda}, \\[2mm] \dfrac{dM}{dt} = (pN - rL) + \mathsf{M}, \\[2mm] \dfrac{dN}{dt} = (qL - pM) + \mathsf{N}, \end{cases}$$

und dieses sind die gesuchten kinetischen Gleichungen. Die $\mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ werden dabei zunächst als Funktionen der φ, ψ, ϑ anzusetzen sein.

4. Bemerkungen zu den gewonnenen Gleichungen.

Schließlich haben wir zur Darstellung der Bewegung die Gleichungen (27), (28), (29), (32), wo wir noch die aus (29) folgenden Werte der L, M, N in die (32) eintragen können. Wir haben dann 6 Differentialgleichungen erster Ordnung für die $\varphi, \psi, \vartheta, p, q, r$. Ist insbesondere irgend eine (holonome oder nicht holonome) Bedingungsgleichung für die $\varphi', \psi', \vartheta'$ gegeben, so wird sich diese in eine lineare Gleichung für die p, q, r umsetzen lassen (deren Koeffizienten, allgemein zu reden, Funktionen der φ, ψ, ϑ sind):

$$(33)\qquad Pp + Qq + Rr = 0.$$

Es werden dann in den $\mathsf{\Lambda}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$ neben Gliedern, welche sich auf die anderweitigen äußeren Kräfte beziehen, Terme folgender Form auftreten:

$$(34) \qquad -\lambda P, \quad -\lambda Q, \quad -\lambda R,$$

unter λ einen Lagrangeschen Multiplikator verstanden, der so zu bestimmen ist, daß die Gleichung (33) fortgesetzt erfüllt ist.

§ 9.

Fortsetzung. Fälle, wo die p, q, r wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten gebraucht werden können.

Die Betrachtungen, welche wir im vorigen Paragraphen unter 3. gaben, sind wesentlich durch den Umstand veranlaßt, daß die p, q, r keine Lagrangeschen Geschwindigkeitskoordinaten, d. h. keine holonomen Verbindungen der φ', ψ', ϑ' sind; wir hätten andernfalls nur die „zweite Zeile" der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen heranzuziehen brauchen. Es hat daher Interesse, zuzusehen, bei welchen Ansätzen und Problemen der Unterschied der p, q, r und der Lagrangeschen Geschwindigkeitskoordinaten noch nicht hervortritt; wir lösen dadurch aus der allgemeinen Theorie der Rotation eines starren Körpers einen relativ elementaren Teil heraus. In dieser Hinsicht ergibt sich zunächst folgende Zusammenstellung:

1. Die Bedingungsgleichungen, welche gegebenenfalls die Beweglichkeit des Körpers *im Unendlich-Kleinen* einschränken, sind in den p, q, r ebenso *linear*, wie in den φ', ψ', ϑ' (vergl. Gl. (33)).

2. Der Unterschied verschwindet ferner bei den Fragen der *Statik*, insofern bei ihnen die p, q, r (und also auch die L, M, N) durchweg gleich Null zu setzen sind.

3. Er verschwindet endlich in der *Stoßtheorie*; in der Tat sind die Gleichungen (29), die den Zusammenhang des Impulses mit den erzeugten Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r ergeben, ihrer Form nach von dem Umstande, daß die p, q, r nicht holonome Geschwindigkeitskoordinaten sind, durchaus unabhängig.

Es sind dies einfach diejenigen Teile der Mechanik, welche der Aufstellung der auf kontinuierliche Kräfte bezüglichen Bewegungsgleichungen vorangehen. Hierzu tritt aber, wenn man approximative Rechnung zulassen will, noch ein *vierter* Punkt. Derselbe liegt vor, *wenn man die Theorie der kleinen Schwingungen unseres starren Körpers um eine Gleichgewichtslage behandelt, und dabei die üblichen Vernachlässigungen eintreten läßt.* Man nimmt dann nämlich an, daß man die in (32) rechter Hand auftretenden „Glieder zweiter Ordnung", also die $(rM - qN)$ etc., gegen die übrigen Glieder, also die $\frac{dL}{dt}$ und Λ, etc., vernachlässigen kann. Man erhält solcherweise die vereinfachten Formeln:

$$
(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \mathsf{\Lambda}, \\ \dfrac{dM}{dt} = \mathsf{M}, \\ \dfrac{dN}{dt} = \mathsf{N}, \end{cases}
$$

und diese hängen mit dem Ausdruck (28) der lebendigen Kraft in der Tat so zusammen, als wenn die p, q, r Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten wären.

Es steht überhaupt nichts im Wege, *sofern man Glieder höherer Ordnung vernachlässigen will*, die p, q, r nach der Zeit genommenen exakten Differentialquotienten von Funktionen der φ, ψ, ϑ gleichzusetzen. Wir werden eine unendlich kleine Drehung vor uns haben, wenn wir ϑ und $\varphi + \psi = \chi$ unendlich klein nehmen. Ersetzen wir dementsprechend in (27) $\sin\vartheta$ durch ϑ, $\cos\vartheta$ durch 1, $\psi'\cdot\vartheta$ durch $-\varphi'\cdot\vartheta$ und $\varphi'+\psi$ durch χ', so kommt:

$$
(36)\qquad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi - \varphi'\cdot\vartheta\sin\varphi = \dfrac{d(\vartheta\cos\varphi)}{dt}, \\ q = -\,\vartheta'\sin\varphi - \varphi'\cdot\vartheta\cos\varphi = \dfrac{d(-\,\vartheta\sin\varphi)}{dt}, \\ r = \chi' \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \dfrac{d\chi}{dt}. \end{cases}
$$

Hier sind $\vartheta\cos\varphi$, $-\vartheta\sin\varphi$, χ die unendlich kleinen Winkel, durch welche der Körper von seiner Anfangslage aus um die Achsen OX, OY, OZ gedreht ist.

Die Aufzählung der vorgenannten vier Punkte ist für das Verständnis der Ballschen Schraubenuntersuchungen von unmittelbarster Wichtigkeit. Wir dürfen vorgreifend erwähnen, daß die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w (wie überhaupt irgend welche nicht-holonome Geschwindigkeitskoordinaten) genau in den entsprechenden vier Fällen ebenfalls wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten behandelt werden können. Und nun trifft es sich so, daß Ball in seinen ursprünglichen Untersuchungen über die Anwendung der Schraubentheorie auf die Mechanik der starren Körper gerade die vier hiermit bezeichneten Kapitel herausgegriffen hat. Und auch die weitere Frage, die er später in Angriff nahm und von der noch genauer weiter unten die Rede sein soll, die Frage nach den jeweils vorhandenen *permanenten* Schrauben, läßt sich unter denselben Gesichtspunkt bringen. Dies ist gewiß nicht zufällig, sondern wohlbedacht, entsprechend der Auffassung, daß es in der Mechanik vor allen Dingen darauf ankommt, sich die jeweils *einfachsten* Beziehungen und Vorgänge klar zu machen.

§ 10.
Verwendung der Schraubenkoordinaten für allgemeine Kinetik der starren Körper.

Das in § 7 Entwickelte läßt sich nun Schritt für Schritt auf die Frage nach der Verwendung der Schraubenkoordinaten für die allgemeine Kinetik der starren Körper übertragen.

1) Wir fixieren die jeweilige Ortsänderung des starren Körpers durch irgend 6 Parameter, etwa so, daß wir wieder ein im Körper festes Koordinatensystem XYZ einführen und dessen Lage gegen ein im Raume festes System xyz durch die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ des Anfangspunktes und die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ festlegen (was freilich sehr unsymmetrische Formeln ergibt). *Die auf das Koordinatensystem XYZ bezüglichen Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w der instantanen Geschwindigkeit werden sich dann in folgender Weise als lineare, nicht holonome Verbindungen der $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ darstellen:*

$$(37)\quad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \quad q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ \qquad\qquad r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta, \\ u = \xi'(\cos\varphi \cos\psi - \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi) \\ \qquad + \eta'(\cos\varphi \sin\psi + \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi) + \zeta' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ v = \xi'(-\sin\varphi \cos\psi - \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi) \\ \qquad + \eta'(-\sin\varphi \sin\psi + \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi) + \zeta' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ w = \xi' \sin\vartheta \sin\psi - \eta' \sin\vartheta \cos\psi + \zeta' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Wir bezeichnen diese Gleichungen wieder als die *kinematischen* Gleichungen.

2) Um nunmehr zu den *kinetischen* Gleichungen zu kommen, drücken wir erstlich die lebendige Kraft des Körpers durch die p, q, r, u, v, w aus; wir erhalten eine *quadratische Form mit konstanten Koeffizienten:*

$$(38)\qquad T = F(p, q, r, u, v, w).$$

Wir berechnen ferner, gemäß der ersten Zeile der Lagrangeschen Gleichungen und dem Ausdruck (24) für die virtuelle Arbeit eines Kräftesystems, die Schraubenkoordinaten X, Y, Z, L, M, N des zum Geschwindigkeitszustande p, q, r, u, v, w gehörigen Impulses durch die Formeln:

$$(39)\quad X = \frac{\partial T}{\partial u},\quad Y = \frac{\partial T}{\partial v},\quad Z = \frac{\partial T}{\partial w},\quad L = \frac{\partial T}{\partial p},\quad M = \frac{\partial T}{\partial q},\quad N = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Wir überlegen endlich, daß diese Impulskoordinaten während des Zeitelementes dt aus zwei Gründen Änderungen erfahren, die sich superponieren, nämlich durch die von außen auf den Körper wirkenden Kräfte, die zusammengenommen die Koordinaten

$$\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}$$

ergeben mögen, und durch die Bewegung des im Körper festen Koordinatensystems mit dem Körper. Von hier aus erhalten wir:

$$(40)\quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = (rY - qZ) + \Xi, & \frac{dL}{dt} = (wY - vZ) + (rM - qN) + \Lambda, \\ \frac{dY}{dt} = (pZ - rX) + \mathrm{H}, & \frac{dM}{dt} = (uZ - wX) + (pN - rL) + \mathrm{M}, \\ \frac{dZ}{dt} = (qX - pY) + \mathrm{Z}, & \frac{dN}{dt} = (vX - uY) + (qL - pM) + \mathrm{N}, \end{cases}$$

und dies sind die gesuchten *kinetischen Gleichungen.*

3) An diese Entwicklung schließen sich dann genau dieselben Bemerkungen wie in § 7, insbesondere auch, was die Berücksichtigung irgend welcher Bedingungsgleichungen angeht.

§ 11.

Spezielle Ausführungen zu den Entwicklungen des vorigen Paragraphen.

Um die Entwicklungen des vorigen Paragraphen durch spezielle Ausführungen zu belegen, ziehen wir zuvörderst den Fall eines isolierten, frei beweglichen Körpers heran. *Die Sache wird dann eminent einfach, verliert aber zugleich einen guten Teil ihrer spezifischen Bedeutung.* Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers. Die lebendige Kraft (38) nimmt dann bekanntlich folgende einfache Form an:

$$(41)\qquad T = \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + f(p, q, r),$$

unter f eine quadratische Form der beigesetzten Argumente mit konstanten Koeffizienten verstanden. Die Impulskoordinaten (39) werden daraufhin

$$(42)\quad X = mu,\quad Y = mv,\quad Z = mw,\quad L = \frac{\partial f}{\partial p},\quad M = \frac{\partial f}{\partial q},\quad N = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Es nehmen daher die letzten drei Gleichungen (40) folgende einfache Form an:

$$(43)\qquad \begin{cases} \frac{dL}{dt} = (rM - qN) + \Lambda, \\ \frac{dM}{dt} = (pN - rL) + \mathrm{M}, \\ \frac{dN}{dt} = (pL - pM) + \mathrm{N}. \end{cases}$$

Wollen wir nun noch voraussetzen, daß die Λ, M, N nur von den φ, ψ, ϑ (nicht von den ξ, η, ζ) abhängen, so haben wir ersichtlich zur Bestimmung der p, q, r, d. h. *der Drehung um den Schwerpunkt*, genau denselben Ansatz, den man von jeher benutzt hat. *Das Eigenartige der Schraubentheorie entschwindet;* man wird das Problem am einfachsten so weiter behandeln, daß man nach Bestimmung der Drehung *um* den Schwerpunkt die fort-

schreitende Bewegung des letzteren direkt bestimmt, d. h. die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen für die ξ, η, ζ aufstellt. Die Schraubentheorie erleidet hier also so zu sagen einen Mißerfolg. An diesem Mißerfolg mag es liegen, daß sich die Schraubentheorie die große Geltung, welche sie zweifellos für die Mechanik der starren Körper besitzt, immer nur erst partiell hat erringen können. *Gäbe es in der Mechanik der starren Körper keine anderen Aufgaben, als die gerade besprochenen, so wäre es überflüssig, eine besondere Schraubentheorie zu entwickeln.*

Es gibt aber andere Aufgaben die Menge. Ich nenne hier die Bewegung eines starren Körpers in einem widerstehenden Mittel (wo die Λ, M, N gewiß nicht von den φ, ψ, ϑ allein abhängen), ferner aber die Bewegung eines starren Körpers, der gezwungen ist, auf anderen starren Körpern zu rollen oder zu gleiten.

Ich möchte hier insbesondere auf dasjenige Problem hinweisen, bei welchem die Schraubentheorie bislang die glänzendste Verwendung gefunden haben dürfte, *das Problem von der Bewegung des starren Körpers in einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit.**) Die lebendige Kraft des aus Körper und Flüssigkeit gebildeten Systems kann in diesem Falle ohne weiteres in der Form (38) angeschrieben werden, worauf die gesamten Entwicklungen des vorigen Paragraphen Platz greifen. Diese Entwicklungen sind in der Tat nichts anderes als eine Transskription der Ansätze, welche Lord Kelvin und Kirchhoff ursprünglich für den Körper in Flüssigkeit gemacht haben; man vergleiche die Darstellung bei Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1895, Kap. 6), der sich direkt an die Ausdrucksweise der Schraubentheorie anschließt, sowie das Referat von Love in IV 15 und IV 16 der mathematischen Encyklopädie. Die verschiedenen Formen, welche die lebendige Kraft T je nach der Symmetrie des in die Flüssigkeit getauchten Körpers annimmt, der jeweilige Zusammenhang zwischen der instantanen Geschwindigkeitsschraube und der Impulsschraube, endlich die resultierende Bewegung des Körpers selbst sind ebenso viele Gegenstände, welche sich auch für eine anschaulich-geometrische Diskussion im Sinne der Ballschen Schraubentheorie vorzüglich eignen dürften. Es würde dies eine direkte und doch nicht triviale Weiterbildung von Poinsots berühmten Untersuchungen über die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt sein. Hierzu wolle man insbesondere die Arbeit von Minkowski in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie von 1888 vergleichen.

*) Leider ist die mathematische Eleganz dieser Untersuchungen kein Maßstab für ihre physikalische Wichtigkeit; vielmehr ist das praktische Geltungsgebiet derselben wegen der in allen Fällen vorhandenen Flüssigkeitsreibung und der bei größeren Geschwindigkeiten auftretenden turbulenten Bewegungen ein sehr geringes.

§ 12.

Abschließende Bemerkungen über die mechanischen Kapitel des Ballschen Werkes. — Verallgemeinerungen des in § 7 und § 9 gegebenen Ansatzes.

Es wurde bereits in § 8 hervorgehoben, daß die Untersuchungen über die Mechanik der starren Körper, welche Ball in seinem Werke ausführt*), einen übereinstimmenden Charakter zeigen: es handelt sich bei Ball durchweg um solche Fragen, *bei denen die Schraubenkoordinaten* p, q, r, u, v, w *der instantanen Geschwindigkeit wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten benutzt werden können.* Ich habe dies hier nur noch betreffs der letzten Frage, die in § 8 genannt wurde, der Frage nach den jeweiligen *permanenten Schrauben* auszuführen. Dies gelingt in einfachster Weise im Anschluß an die kinetischen Gleichungen (40). Man findet nämlich, daß es sich bei Ball dabei um die Aufsuchung solcher Werte der p, q, r, u, v, w bez. φ, ψ, ϑ, ξ, η, ζ handelt, *für welche die rechten Seiten der kinetischen Gleichungen* (40) *verschwinden;* es bleiben dann die X, Y, Z, L, M, N des Impulses und also auch die p, q, r, u, v, w wenigstens für ein Zeitelement konstant, und eben deshalb spricht Ball in einem solchen Falle von einer permanenten Schraube. Als einfache Beispiele möchte ich anführen Staudes permanente Drehachsen eines um einen Punkt rotierenden schweren Körpers (Journal für Mathematik Bd. 113, 1894), sowie Kirchhoffs Theorem, daß bei jedem Körper in einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit bei Abwesenheit äußerer Kräfte drei zueinander senkrechte Richtungen gleichförmiger Translation existieren. Die sämtlichen Fälle stationärer Bewegung, welche in dem genannten Falle bei dem Körper in Flüssigkeit auftreten können, diskutiert Minkowski l. c. In diesen Beispielen sind zugleich die p, q, r, u, v, w nicht nur zeitweise, sondern dauernd konstant, so daß man von *Permanenz* der bez. Schrauben im vollen Sinne des Wortes reden kann.

Letzterer Umstand hängt ersichtlich mit der Tatsache zusammen, daß die Drehungen um einen Punkt, wie andererseits die Bewegungen eines freien Körpers eine *Gruppe* bilden: gehört eine unendlich kleine Bewegung der Gruppe an, so auch die endliche Bewegung, welche aus ihr durch unendlichmalige Wiederholung entsteht. Daß dies bei der Bewegung

*) Nur von diesen *mechanischen* Entwicklungen des Ballschen Werkes ist im vorliegenden Artikel die Rede, nicht von den anschließenden *geometrischen*. Ich möchte aber nicht unterlassen anzuführen, daß Herr Ball die geometrischen Fragen neuerdings in einer besonderen Abhandlung in den Transactions der R. Irish Academy (vol. 31, post 12, Dublin 1901) weiter verfolgt hat; dieselbe trägt den Titel: *Further developments of the geometrical theory of six screws.*

starrer Körper keineswegs immer der Fall ist, zeigt das einfache Beispiel eines auf einer Ebene rollenden Zylinders. Hier treten daher die in § 5 genannten *Gruppen von Bewegungen* (bez. die mit ihnen verknüpften linearen Schraubensysteme von „selbständiger gruppentheoretischer Bedeutung") in charakteristischer Weise in den Vordergrund. In der Tat läßt sich die Kinetik aller dieser Gruppen genau so in Ansatz bringen wie in § 7 die Kinetik der Drehungen um einen Punkt und in § 9 diejenige der freien Bewegungen (eines starren Körpers); man wird sagen können, daß in allen diesen Fällen die *Methode der Eulerschen Gleichungen* eine naturgemäße Verallgemeinerung findet.*) Die Gesamtheit der Bewegungen, welche ein starrer Körper nach der Natur der ihm auferlegten Bedingungen gegebenenfalls ausführen kann, ist immer in einer *kleinsten* Gruppe von Bewegungen enthalten. Es dürfte sich empfehlen, die kinetischen Gleichungen für den Körper jeweils so aufzustellen, daß man diese Gruppe als Ausgangspunkt nimmt, also bei ihr „kinematische Gleichungen" und das Analogon der Eulerschen Gleichungen aufstellt.

Göttingen, den 3. September 1901.

Nachträgliche Bemerkungen.

Den vorstehenden Artikel, der die Bedeutung der Ballschen Schraubentheorie für das Gesamtgebiet der Mechanik zusammenhängend darlegen und zugleich begrenzen soll, habe ich s. Z. verfaßt, weil es mir bei der Redaktion des Bandes IV der mathematischen Encyklopädie (der die Mechanik behandelt) erwünscht war, eine derartige Darstellung zur Hand zu haben; ich verweise in dieser Hinsicht auf den Artikel IV, 2 (Timerding, geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers) und IV, 6 (Stäckel-Petersen, elementare Dynamik; erscheint demnächst). Wenn ich jetzt diesen Artikel in den Math. Annalen wieder abdrucke, so geschieht es, weil das Klassifikationsprinzip des § 1, dem ich allgemeine Bedeutung beilege, mit den sich daran anschließenden Einzelausführungen seither nicht so beachtet scheint, wie ich es für richtig halte.

Vielleicht darf ich über die historische Entstehung dieses Prinzips hier folgendes bemerken. Der Gedanke, alle vorkommenden Größen nach ihrem Verhalten bei beliebigen linearen Transformationen zu klassifizieren, durchzieht bekanntlich die ganze Invariantentheorie und liegt bereits den ersten invariantentheoretischen Arbeiten von Cayley und Sylvester zugrunde. In meinem Erlanger Programm (1872) wurde sodann der Gesichtspunkt aufgestellt, daß die Gesamtheit der linearen Transformationen nur ein Beispiel irgend einer anderen Gruppe von Transformationen ist, denen man die jeweiligen Urvariabelen unterworfen denken mag. In Physik und Mechanik

*) Diese Bemerkungen stehen in naher Beziehung zu gewissen allgemeineren Betrachtungen über dynamische Probleme, die Herr Volterra in den Jahren 1899 bis 1900 in den Atti di Torino veröffentlichte; siehe insbesondere den Aufsatz: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* in Bd. 33 und den anderen: *Sopra una classe di moti permanenti stabili* in Bd. 34.

hat man allen Anlaß, als solche Gruppe eben die *Hauptgruppe* der räumlichen Änderungen, d. h. den Inbegriff der Bewegungen des Raumes und seiner Ähnlichkeitstransformationen zu wählen, und es ergibt sich dann durch sinngemäße Übertragung der Auffassungsweise der Invariantentheoretiker das Klassifikationsprinzip des § 1 mit Notwendigkeit. Ich habe dasselbe dementsprechend seit Jahren in meinen Vorlesungen zur Geltung gebracht, worauf auch Hr. Abraham in dem Encyklopädieartikel IV, 14 (Geometrische Grundbegriffe für die Mechanik der deformierbaren Körper), wo er das in Rede stehende Klassifikationsprinzip durchweg anwendet, ausdrücklich Bezug nimmt.

Im übrigen ergibt sich, wie ich ausdrücklich hervorheben möchte, eben nach den Grundsätzen meines Erlanger Programms, für die Darlegung und die Durchführung des Prinzips eine gewisse Latitüde. Um dies nur nach einer Seite auszuführen: die „Hauptgruppe" der räumlichen Änderungen ist eine Untergruppe in der Gesamtheit der *affinen* Transformationen. Man kann unsere Klassifikation also in der Weise durchführen, daß man zunächst ein Schema der affinen Klassifikation aufstellt und in dieses dann die feineren Einzelheiten der metrischen Klassifikation erst hinterher einordnet. *Eine wissenschaftliche Notwendigkeit, so vorzugehen, besteht aber keineswegs.* Ich hebe dies hervor, um zu der Meinungsverschiedenheit Stellung zu nehmen, welche bei den neueren Diskussionen über die Grundlagen der Vektorenrechnung zwischen den Herren Mehmke und Prandtl hervorgetreten ist (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XIII, 1903).

Ich zitiere zum Schluß gern noch einige neuerdings erschienene Literatur, die zu den vorstehend wiederabgedruckten Entwickelungen in näherer Beziehung steht.

Zunächst ein *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, in welchem die Unterscheidung der projektiven, affinen und metrischen (oder, wie die Autoren sagen, äquiformen) Geometrie in dem hier in Betracht kommenden Sinne von vorneherein mit Konsequenz durchgeführt wird. Es ist dies das Lehrbuch von Heffter und Köhler (Leipzig, erster Teil 1905).

Sodann, was Untersuchungen über Schraubentheorie angeht, vor allen Dingen die nun vollendete *Geometrie der Dynamen* von Study (Leipzig, 1903), die neben vielem anderen Neuen, was über den Bereich des vorstehend abgedruckten Aufsatzes hinausliegt, insbesondere eine völlig durchgeführte Diskusion der verschiedenen Arten der linearen Schraubensysteme enthält. Ferner die Untersuchungen von Grünwald in den Bänden 48, 49 und 52 der Zeitschrift für Mathematik und Physik (1901, 1902, 1905), deren Titel ich hier wenigstens anführen will:

1) Sir Robert Balls lineare Schraubengebiete,

2) Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels,

3) Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad.

Endlich, was die am Schlusse meines Aufsatzes benutzte Untersuchung holonomer und nichtholonomer Geschwindigkeitskoordinaten angeht, die neuesten Publikationen:

Hamel, Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik (in Bd. 50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1903), und Appell, Traité de Mécanique rationnelle, 2. Band, 2. Auflage (Paris 1904).

Göttingen, im Mai 1906.

Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

Inhalt.

---

*) Die Paragraphen 2, 4, 6 und 7 sind im wesentlichen meiner Dissertation „Über die diskontinuierlichen Lösungen der Variationsrechnung" (Göttingen 1904) entnommen.

Einleitung.

Bei der Untersuchung von Variationsproblemen kann man sich auf drei voneinander prinzipiell verschiedene Standpunkte stellen.

Mathematisch am einfachsten zu behandeln ist die Frage nach dem Verschwinden der ersten Variation. Diese Art, das Problem zu stellen, steht im Vordergrund in der Mechanik, der Optik und der Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Durch die Arbeiten von Euler und Lagrange ist diese Theorie der ersten Variation entstanden und in erschöpfender Weise ausgebaut worden.

In zweiter Linie kommt die Frage nach den Extremumseigenschaften dieser „stationären" Kurven und Flächen (d. h. derjenigen, die durch die Euler-Lagrangesche Methode geliefert werden). Die analytische Behandlung dieses Problems, die durchweg auf der Berücksichtigung der ersten Glieder von Taylorschen Entwicklungen beruht, hat zur naturgemäßen Folge, daß die bezüglichen Aussagen auf die Nachbarschaft der stationären Gebilde beschränkt werden müssen. Nach den Untersuchungen von Legendre und Jacobi sind es bekanntlich diejenigen von Weierstraß, welche diese Fragen, mindestens bei der Variation eines Kurvenintegrals in der Ebene, vollkommen erledigt haben.

Die Weierstraßsche Theorie führt dazu, zwei Arten von Nachbarschaften von Kurven zu unterscheiden, die man als die *weitere* und die *engere* Nachbarschaft bezeichnet.*) Hierunter ist folgendes zu verstehen: ε und η seien zwei beliebige aber festzuhaltende positive Größen. Können wir die gegebenen Kurven so aufeinander abbilden, daß entsprechende Punkte um weniger als ε voneinander entfernt sind und die Neigungswinkel entsprechender Tangenten um weniger als η voneinander abweichen, so liegt eine engere Nachbarschaft vor. Ist dagegen nur ersteres möglich, so reden wir von einer weiteren Nachbarschaft.

Wenn man nun ein Stück einer stationären Kurve untersucht, so sind zwei Fälle möglich. Entweder ist das betreffende Kurvenintegral, längs eines solchen Kurvenstückes genommen, ein Minimum, wenn man zum Vergleich Kurven mit denselben Endpunkten heranzieht, die in einer gewissen weiteren Nachbarschaft der ersten liegen; oder man muß sich auf Kurven beschränken, welche einer engeren Nachbarschaft jener angehören. Im ersten Falle sagt man, daß die Kurve ein *starkes*, im zweiten, daß sie ein *schwaches* Extremum liefert. Da für hinreichend kleine Stücke einer regulären stationären Kurve immer mindestens ein schwaches Extremum eintritt, hat Kneser diese Kurven *Extremalen* genannt. Dem

*) A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900, pag. 54.

eben gesagten entsprechend wollen wir die Extremalenstücke kurz in *starke* und *schwache* unterscheiden.

Wir kommen endlich zu den Fragen der dritten Kategorie, denen diese Abhandlung besonders gewidmet ist; die Variationsrechnung verdankt Problemen dieser letzten Art (die in ganz einfachen Fällen, wie dem der kürzesten Linie, schon seit dem Altertume gelöst waren) ihren Ursprung. Hier gibt man sich *a priori* ein Gebiet T und sucht zwei Punkte dieses Gebietes durch eine Kurve, die T nicht verläßt, so zu verbinden, daß ein gegebenes Kurvenintegral — längs dieser Kurve genommen — kleiner ist als für eine beliebige andere Kurve von T mit denselben Endpunkten. Für spezielle Probleme kann unter Umständen die Weierstraßsche Methode auch hier zum Ziele führen. Der erste aber, der ein auf allgemeine Prinzipien ruhendes Verfahren vorschlug, das zur umfassenden Beantwortung der betreffenden Fragen führen konnte, war D. Hilbert in seiner Arbeit *Über das Dirichletsche Prinzip.**)

Hilbert beschränkt sich zwar dort auf die Existenz einer allerkürzesten geodätischen Linie zwischen zwei Punkten eines regulären Flächenstückes; nach einem nicht ganz befriedigenden Versuche von C. Noble**) wurde aber das Hilbertsche Verfahren durch O. Bolza auch auf allgemeinere Probleme ausgedehnt.***) Letzterer erkannte, daß das Gelingen der Hilbertschen Methode von zwei Umständen abhängt. Erstens muß das gegebene Kurvenintegral die Eigenschaft haben, daß der Integrand in jedem Kurvenelemente des Gebietes T ein und dasselbe Vorzeichen besitzt, d. h., daß das Variationsproblem, wie wir sagen wollen, *definit* ist. Zweitens aber muß sich die Umgebung jedes Punktes von T mit einem Felde von *starken* Extremalen, welche durch diesen Punkt gehen, eindeutig und lückenlos ausfüllen lassen.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß die zweite dieser Bedingungen, welche Bolza an die Spitze stellt, im wesentlichen eine Folge der ersten ist, wenn man auch solche Lösungen zuläßt, die mit Unstetigkeiten in der Fortschreitungsrichtung ihrer Tangente behaftet sind.

Wir werden nämlich zeigen, daß, nach Adjunktion dieser sogenannten *diskontinuierlichen Lösungen*, die Umgebung eines jeden Punktes P, wo das Variationsproblem definit ist, sich auf eindeutige Weise mit einem Büschel von starken Extremalen durch P einfach und lückenlos über-

---

*) Jahresber. d. Deutsch. Mathematikerverein., Bd. VIII (1899), p. 184, abgedruckt in Crelles Journ., Bd. 130 (1905).

**) Eine neue Methode in der Variationsrechnung. Diss. Göttingen 1901.

***) O. Bolza, Lectures on the Calculus of Variations (Chicago 1904), chap. VII.

decken läßt. Ausnahmen bilden nur solche Punkte, für welche eine der beiden später definierten Invarianten $\Psi(x, y)$ oder $\Omega(x, y)$ verschwindet, d. h. Punkte, die im allgemeinen auf Kurven verteilt sind.

Da wir nun ferner auch zeigen werden, daß die Existenz einer einzigen starken Extremalen durch den Punkt P genügt, um das Problem durch ein äquivalentes zu ersetzen, das in der Umgebung dieses Punktes *definit* ist, so sehen wir, daß die Theorie der starken Extremalen durch die Heranziehung diskontinuierlicher Lösungen vollkommen erledigt werden kann. Die Punkte der Ebene, die bei dem vorgelegten Variationsproblem sich mit einem Büschel von starken Extremalen umgeben lassen, wollen wir der Kürze wegen in dieser Abhandlung *regulär* nennen. Hierin weichen wir von der Terminologie ab, die Bolza*) im Anschluß an Hilbert benutzt. Bolza nennt nämlich nur solche Punkte regulär, welche sich mit einem Büschel von starken *kontinuierlichen* Extremalen umgeben lassen**) Diese wollen wir *regulär im engeren Sinne* nennen.

Für ein Gebiet, das lauter reguläre Punkte im engeren Sinne enthält, gilt ein Satz, den Osgood***) gefunden hat, und der für die Variationsrechnung von höchster Wichtigkeit ist. Viele Schwierigkeiten, welchen man bei der Behandlung von Doppelintegralen begegnet, sind nur dem Umstande zuzuschreiben, daß der betreffende Satz für diese Probleme aufhört richtig zu sein. Der Osgoodsche Satz läßt sich auf reguläre Probleme in unserem Sinne übertragen; um dies in bequemer Weise zu tun, werden wir gewisse Untersuchungen und Resultate von G. A. Bliss†) — in entsprechender Weise modifiziert — zu Hilfe ziehen.

Die Ergebnisse des ersten Kapitels erlauben uns dann, die Hilbertsche Methode ganz allgemein auf positiv definite Probleme anzuwenden, was keine Schwierigkeiten bietet. Dagegen wird im letzten Paragraphen an einem Beispiele gezeigt, daß die Eigenschaft eines Problems, in jedem Punkte eines Gebietes T regulär zu sein, nicht hinreicht, um auf die Existenz von allerkürzesten Wegen zwischen zwei Punkten dieses Gebietes zu schließen. Die Voraussetzung, daß das Problem definit ist, ist also wesentlich.

---

*) a. a. O., pag. 29 und pag. 125.

**) Dies trifft zu, wenn die Weierstraßsche Invariante $F_1(x, y; \cos\gamma, \sin\gamma)$ für jeden Wert von γ von Null verschieden ist.

***) Transactions of the American Mathematical Society, vol. II (1901), p. 273.

†) Transactions of the American Mathematical Society, vol. V (1904), p. 113.

Kapitel I.

Die Verteilung der starken Extremalen in der Umgebung eines Punktes.

§ 1.

Zurückführung der Fragestellung auf diejenige bei positiv definiten Variationsproblemen.

Es sei $F(x, y; x', y')$ eine eindeutige, reguläre, analytische*) Funktion ihrer vier Argumente für jeden Punkt eines gewissen Bereiches T der xy-Ebene und für jedes endliche Wertepaar von x' und y', das von $x' = y' = 0$ verschieden ist. Ferner sei F eine homogene Funktion erster Ordnung ihrer letzten beiden Argumente, d. h. es gelte die Gleichung

$$F(x, y; kx', ky') = kF(x, y; x', y') \tag{1}$$

unter den Voraussetzungen

$$\left.\begin{aligned} k > 0 \\ x'^2 + y'^2 > 0 \end{aligned}\right\}.$$

Setzt man insbesondere $x' = \cos\vartheta$, $y' = \sin\vartheta$, so muß die Funktion $F(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta)$ eine eindeutige periodische Funktion ihres Argumentes ϑ mit der Periode 2π sein, die für jeden Punkt von T und für jeden reellen Wert von ϑ reell und regulär bleibt.

Es sei endlich durch

$$\left.\begin{aligned} x = x(t), \quad y = y(t) \\ t_1 \leqq t \leqq t_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

eine reguläre analytische Kurve C dargestellt, die zwei gegebene Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 des Bereiches T verbindet und vollständig innerhalb T verläuft, und es seien durch x', y' die Ableitungen der Funktionen (2) nach t bezeichnet.

Dann hat das bestimmte Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y; x', y')\,dt \tag{3}$$

einen endlichen Wert, der sich wegen der Eigenschaft (1) nicht ändert, wenn man t durch einen Parameter τ ersetzt, der mit t durch die Beziehungen

$$\tau = \varphi(t)$$

*) Man könnte, indem man die Ausdrucksweise entsprechend modifiziert — ähnlich wie Bolza es in seinem oben zitierten Buche tut —, im allgemeinen nur die Stetigkeit der partiellen Ableitungen der drei ersten Ordnungen voraussetzen.

verbunden ist, während die Ungleichung

$$\varphi'(t) > 0$$

im ganzen Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$ gilt.

Es sei ferner bemerkt, daß, da die Funktion $F(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta)$ von ϑ zwar die Periode 2π, nicht aber die Periode π*) besitzt, der Wert des Integrals (3) vom Sinne abhängt, in welchem man die Kurve C durchläuft. Die Extremalen, sowie sämtliche andere Kurven der xy-Ebene, die im folgenden benutzt werden, besitzen alle einen ausgezeichneten positiven Sinn, der in den Figuren durch die Spitze eines Pfeiles angedeutet sein möge.

Die erste Variation des bestimmten Integrals (3) verschwindet bekanntlich, wenn die Funktionen (2) die Eulersche Differentialgleichung

$$G(x, y; x', y'; x'', y'') = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - y'x'') = 0 \tag{4}$$

befriedigen**); hier und im folgenden bedeuten die Indizes partielle Ableitungen nach x, y, x', y', während F_1 die Weierstraßsche Invariante

$$F_1(x, y; x', y') = \frac{1}{y'^2} F_{x'x'} = -\frac{1}{x'y'} F_{x'y'} = \frac{1}{x'^2} F_{y'y'} \tag{5}$$

darstellt.

Um aus der Gleichung (4), d. h. einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die zwei Funktionen $x(t)$, $y(t)$, Gleichungen für die Extremalen zu bekommen, muß man zu (4) eine zweite willkürliche Beziehung zwischen $x(t)$ und $y(t)$ adjungieren, wodurch erst eine bestimmte Parameterdarstellung erhalten wird. Wir werden dazu besonders die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = 1 \tag{6}$$

benutzen, wodurch die Länge der Extremalen als Parameter eingeführt wird.

Die Eulersche Differentialgleichung zeigt sofort, daß die Extremalen in jedem Elemente $(x, y; x', y')$ des Gebietes T regulär sind, wo $F_1(x, y; x', y') \neq 0$ ist, denn es kann in diesem Falle das Cauchysche Existenztheorem angewandt werden.

Nach der Weierstraßschen Theorie ist nun eine Extremale, die das Linienelement $(x_0, y_0; x_0', y_0')$ enthält, im Punkte (x_0, y_0) stark, wenn die Weierstraßsche E-Funktion

$$\begin{aligned} E(x_0, y_0; x_0', y_0'; x', y') = {} & [F_{x'}(x', y') - F_{x'}(x_0', y_0')]x' \\ & + [F_{y'}(x', y') - F_{y'}(x_0', y_0')]y' \end{aligned} \tag{7}$$

---

*) Dies ist nur dann der Fall, wenn $F(x, y; -x', -y') = F(x, y; x', y')$ ist, was z. B. für $F = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ zutrifft.

**) Diese Differentialgleichung wurde gewöhnlich die Lagrangesche genannt; wie aber Bolza a. a. O. pag. 22 bemerkt, hat sie Lagrange selbst Euler zugeschrieben.

ausschließlich für diejenigen Wertepaare x', y' verschwindet, für welche

(8) $$x'y_0' - y'x_0' = 0 \quad \text{und} \quad x'x_0' + y'y_0' > 0$$

ist.*)

Weierstraß hat schon in seinen Vorlesungen die Bemerkung gemacht, daß es Probleme gibt, bei welchen keine einzige Extremale stark ist**); solche Probleme schließen wir naturgemäß aus unseren Untersuchungen aus und machen also die Annahme, daß x_0, y_0, x_0', y_0' in der Weise gewählt sind, daß die E-Funktion (7) für alle Werte von x' und y', welche (8) nicht befriedigen, positiv ist.

Man schreibe:

(9) $$\begin{cases} x' = \cos\vartheta, \quad y' = \sin\vartheta, \\ x_0' = \cos\vartheta_0, \quad y_0' = \sin\vartheta_0, \\ \vartheta - \vartheta_0 = \varphi; \end{cases}$$

was zulässig ist, da man, wegen der Homogeneitätseigenschaft (1), den Parameter t immer so wählen kann, daß die Gleichung (6) erfüllt ist. Wir setzen in (7) die Größen x', y', x_0', y_0' als Funktionen von ϑ_0 und φ ein und erhalten

$$E(x_0, y_0; \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0; \cos\vartheta, \sin\vartheta) = \psi(\cos\varphi, \sin\varphi) \geqq 0;$$

die Funktion ψ verschwindet, wegen unserer Annahme, nur für diejenigen Werte von φ, die mod. 2π kongruent Null sind. Für $\frac{\pi}{3} \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{3}$ hat sie also eine positive untere Grenze ε und für diese Werte ist

$$\psi(\cos\varphi, \sin\varphi) + \frac{2\varepsilon}{3}\cos\varphi \geqq \frac{\varepsilon}{3};$$

diese letzte Ungleichheit gilt aber auch für die übrigen Werte von φ, weil für diese $\psi \geqq 0$ und $\cos\varphi \geqq \frac{1}{2}$ sind. Man kann somit λ positiv und so klein wählen, daß

(10) $$\psi(\cos\varphi, \sin\varphi) + \lambda\cos\varphi \geqq 2h > 0$$

ist.

Nun ist aber

$$\psi(\cos\varphi, \sin\varphi) = \frac{E(x_0, y_0; x_0', y_0', x', y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \lambda\cos\varphi = \frac{\lambda(x'\cos\vartheta_0 + y'\sin\vartheta_0)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Andererseits erhält man aus der Homogeneitätsgleichung (1), wenn man beide Seiten nach k differentiiert und $k = 1$ setzt, die Identität:

(11) $$F(x, y; x', y') = x'F_{x'} + y'F_{y'},$$

*) Die letzte Ungleichheit ist notwendig, weil die Gleichung (1) nur für positive k zu gelten braucht.

**) O. Bolza, a. a. O., pag. 142; cf. meine Dissert., pag. 10.

so daß man statt (7) für die E-Funktion

$$E(x_0, y_0; \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0; x', y') = F(x', y') - x' F_{x'}(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) - y' F_{y'}(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) \tag{12}$$

schreiben kann.

Jetzt führe man die Konstanten a und b und die Funktion Φ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a &= -F_{x'}(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) + \lambda\cos\vartheta_0 \\ b &= -F_{y'}(\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0) + \lambda\sin\vartheta_0 \\ \Phi(x, y; x', y') &= F(x, y; x', y') + ax' + by' \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ein. Dann besagt die Beziehung (10) nichts anderes als daß

$$\Phi(x_0, y_0; \cos\vartheta, \sin\vartheta) \geqq 2h$$

ist. In einer gewissen Umgebung des Punktes (x_0, y_0) wird also

$$\Phi(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta) \geqq h$$

gelten; mit anderen Worten: es ist die Funktion Φ in diesem Gebiete *positiv definit.*

Wir können nun im Integrale (3) die Funktion F durch $\Phi(x, y; x', y')$ ersetzen, da diese letzte Funktion ihrer Definition (13) gemäß homogen erster Ordnung in x' und y' ist. Nun bleiben aber sowohl die Extremalen wie auch die Weierstraßsche E-Funktion unverändert, wenn man F durch Φ ersetzt, so daß die Eigenschaft einer Extremalen, stark zu sein, bei unserer Transformation erhalten bleibt. Indem wir ferner bemerken, daß wir, wenn die E-Funktion negativ ist, die auf ähnliche Weise erhaltene Funktion Φ durch $-\Phi$ ersetzen können, kommen wir zu folgendem Resultate:

Um die Verteilung der starken Extremalen in der Umgebung eines Punktes zu untersuchen, genügt es, die positiv definiten Variationsprobleme zu berücksichtigen.

§ 2.

Die Indikatrix und ihre Eigenschaften.

Es sei jetzt das Variationsproblem (3) selbst positiv definit, d. h. es gelte für jeden Punkt des Gebietes T und für jeden Wert von ϑ die Ungleichheit

$$F(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta) \geqq h > 0. \tag{14}$$

Wir betrachten das Büschel der Radienvektoren, die von einem Punkte (x, y) ausgehen, und suchen auf jeder dieser Geraden den Punkt

$$(x + x'dt,\ y + y'dt)$$

zu bestimmen, für welchen das Differential Fdt einen gegebenen Wert $d\mu$ annimmt:

$$F(x, y; x', y')dt = d\mu. \tag{15}$$

Die so erhaltenen Punkte bilden wir durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\left.\begin{aligned} x'dt &= \xi d\mu \\ y'dt &= \eta d\mu \end{aligned}\right\}$$

auf eine $\xi\eta$-Ebene ab; die Achsen dieser Ebene seien denen der xy-Ebene parallel und gleich gerichtet.

Die Beziehung (14) lehrt uns, daß Fdt, also auch $d\mu$ positiv ist; die Homogeneitätseigenschaft (1), die nur für positive k gilt, liefert also

$$\begin{aligned} F(x, y; x', y')dt &= F(x, y; x'dt, y'dt) \\ &= F(x, y; \xi d\mu, \eta d\mu) \\ &= F(x, y; \xi, \eta)d\mu. \end{aligned}$$

Der Ort der in der $\xi\eta$-Ebene abgebildeten Punkte ist also nach (15)

$$F(x, y; \xi, \eta) = 1. \tag{16}$$

Führt man die Polarkoordinaten

$$\xi = \varrho\cos\vartheta, \quad \eta = \varrho\sin\vartheta$$

ein, so bekommt man für diese Kurve

$$\varrho = \frac{1}{F(x, y; \cos\vartheta, \sin\vartheta)}. \tag{17}$$

Die Gleichung (16) resp. (17) stellt eine Kurve dar, die in ihrer Konstruktion Ähnlichkeit mit der Dupinschen Indikatrix hat, und die wir darum *Indikatrix des Variationsproblems* nennen wollen; der Anfangspunkt der Koordinaten in der Hilfsebene der ξ, η soll *Grundpunkt* der Indikatrix heißen. Die Gleichung (17), mit (14) verglichen, zeigt, daß der Radiusvektor

$$\varrho \leqq \frac{1}{h}$$

ist. Aus der Gleichung (17) lassen sich für die Indikatrix, wenn man die über F gemachten Voraussetzungen berücksichtigt, folgende Schlüsse ziehen:

Die Indikatrix eines definiten Variationsproblems ist eine reguläre, analytische, geschlossene Kurve, die gänzlich im Endlichen liegt; jeder Radiusvektor durch den Grundpunkt schneidet sie nur einmal und folglich liegt der Grundpunkt im Innern der Kurve.

Wenn man umgekehrt in der $\xi\eta$-Ebene eine zweiparametrige Schar

von Kurven gibt, welche sämtliche soeben genannten Eigenschaften besitzt, so kann man ihr ein positiv definites Variationsproblem zuordnen, dessen Indikatrix in jedem Punkte eine Kurve der vorgelegten Schar ist. Es sei z B. die Gleichung der Kurvenschar in Polarkoordinaten

$$\varrho = \chi\,(x, y;\, \cos\vartheta,\, \sin\vartheta).$$

Dann hat man nach (17) für das zugeordnete Variationsproblem

$$F\,(x, y;\, \cos\vartheta,\, \sin\vartheta) = \frac{1}{\chi\,(x, y;\, \cos\vartheta,\, \sin\vartheta)}\,;$$

andererseits aber wegen der Homogeneitätseigenschaft (1)

$$F\,(x, y;\, x', y') = \sqrt{x'^2+y'^2}\, F\left(x, y;\, \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\, \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)$$
$$= \sqrt{x'^2+y'^2}\, F\,(x, y;\, \cos\vartheta,\, \sin\vartheta),$$

so daß man schließlich

$$(17)\qquad F\,(x, y;\, x', y') = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\chi\left(x, y;\, \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\, \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)}$$

erhält.

Die Einführung der Indikatrix wird unsere Betrachtungen viel übersichtlicher gestalten; in der eigentlichen Variationsrechnung ist diese Kurve noch nicht benutzt worden; dagegen spielt sie schon längst in der geometrischen Optik unter dem Namen „Strahlenfläche“ eine wichtige Rolle.

Die Tangente t im Punkte $A(\xi, \eta)$ der Indikatrix

$$(18)\qquad F\,(x, y;\, \xi, \eta) = 1$$

wird durch die Gleichung

$$(19)\qquad F_{x'}\,(\Xi - \xi) + F_{y'}\,(\mathrm{H} - \eta) = 0$$

in den laufenden Koordinaten Ξ und H gegeben, und die Gleichung (11), die sich hier mit Rücksicht auf (16)

$$(20)\qquad F_{x'}\,\xi + F_{y'}\eta = 1$$

schreiben läßt, lehrt uns, daß keine dieser Tangenten durch den Grundpunkt der Kurve geht.

Es ist nun bekanntlich*) die Bedingung dafür, daß in der Ebene der x, y ein Bogenelement $\delta x, \delta y$ die Extremale $x(t), y(t)$ im Punkte x, y *transversal* schneide,

$$F_{x'} \cdot \delta x + F_{y'} \cdot \delta y = 0.$$

*) Kneser, Lehrbuch, pag. 32. Bolza a. a. o., pag. 155.

Die Gleichung (20) kann also folgendermaßen gedeutet werden (Fig. 1): *Wenn man im Punkte x, y der xy-Ebene zwei Parallelen r_1, t_1 zu dem Radius Vektor r und der Tangente t an die Indikatrix zieht, so schneidet die Gerade t_1 diejenige Extremale c transversal, welche im Punkte x, y die Richtung r_1 besitzt.*

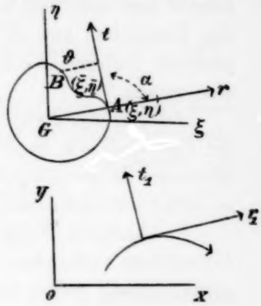

Fig. 1.

Die Krümmung K der Indikatrix wird in jedem Punkte durch die Gleichung

(21) $$K = \xi'\eta'' - \eta'\xi''$$

gegeben, wenn man ξ und η als Funktionen eines Parameters τ betrachtet und die Ableitungen nach diesem Parameter aus der Gleichung (16) der Kurve und aus

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1$$

berechnet. Die Kurve möge, wenn τ wächst, so durchlaufen werden, wie es die Pfeilspitze auf der Tangente t der Fig. 1 zeigt. Dann ist die Krümmung K im Punkte A positiv oder negativ, je nachdem die Kurve in der Umgebung von A auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite ihrer Tangente liegt wie der Grundpunkt G.

Durch Differentiation von

$$F(x, y; \xi, \eta) = 1$$

bei konstanten x und y erhält man:

(22) $$F_{x'}\xi' + F_{y'}\eta' = 0,$$

(23) $$F_{x'x'}\xi'^2 + 2F_{x'y'}\xi'\eta' + F_{y'y'}\eta'^2 + F_{x'}\xi'' + F_{y'}\eta'' = 0.$$

Es lauten aber hier die Gleichungen (5)

$$F_1 = F_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\eta^2} F_{x'x'} = -\frac{1}{\xi\eta} F_{x'y'} = \frac{1}{\xi^2} F_{y'y'},$$

so daß man (23) kürzer schreiben kann:

(24) $$F_1(\eta\xi' - \xi\eta')^2 + F_{x'}\xi'' + F_{y'}\eta'' = 0.$$

Nun zeigt aber die Gleichung (20), daß $F_{x'}$ und $F_{y'}$ nicht zugleich verschwinden können; es ist zum Beispiel $F_{x'} \neq 0$. Indem man $F_{y'}$ aus (22) und (24) eliminiert, erhält man für K

$$K = \xi'\eta'' - \eta'\xi'' = \frac{F_1\eta'(\xi\eta' - \eta\xi')^2}{F_{x'}};$$

und wenn man $F_{y'}$ aus (20) und (22) eliminiert, erhält man ähnlich

$$\eta' = F_{x'}(\xi\eta' - \eta\xi'),$$

so daß schließlich

(25) $$K = F_1(\xi\eta' - \eta\xi')^3$$

ist.

Die Kurve schneidet aber nur einmal jeden Radiusvektor und keine Tangente geht durch den Grundpunkt; folglich ist der Winkel α zwischen t und r (Fig. 1) immer kleiner als π und die Größe $(\xi\eta' - \eta\xi')$ immer positiv und von Null verschieden: K und F_1 haben dasselbe Vorzeichen. Das Vorzeichen von F_1 ist aber entscheidend, um zu wissen, ob die betreffende Extremale ein Maximum oder ein Minimum liefert; wir können also sagen:

Ist für die Richtung r die Indikatrix nach außen konvex, so liefert die Extremale, die im Punkte x, y die zu r parallele Richtung r_1 besitzt, ein Minimum in der Umgebung dieses Punktes; ist die Indikatrix dort konkav, so liefert die Extremale ein Maximum.

In ähnlicher Weise ist die Indikatrix eng mit der Weierstraßschen E-Funktion verbunden. Es sei t (Fig. 1) die Tangente im Punkte $A(\xi, \eta)$ der Indikatrix, $B(\bar\xi, \bar\eta)$ ein anderer willkürlicher Punkt dieser Kurve. Ferner sei der Abstand zwischen B und t mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet und möge positiv oder negativ gemessen sein, je nachdem B auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von t liegt wie der Grundpunkt G.

Dann hat man mit Hilfe der Gleichung (19) der Tangente

$$F_{x'}(\Xi - \xi) + F_{y'}(\mathsf{H} - \eta) = 0$$

für die Entfernung $\mathfrak{d}$ die Beziehung

$$\mathfrak{d} = \frac{F_{x'}(\xi - \bar\xi) + F_{y'}(\eta - \bar\eta)}{\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}}$$

(das Vorzeichen ist hier richtig gewählt, denn für $\bar\xi = 0$, $\bar\eta = 0$ muß der Ausdruck positiv sein).

Wir bezeichnen $F_{x'}(x, y; \bar\xi, \bar\eta)$, $F_{y'}(x, y; \bar\xi, \bar\eta)$ mit $\bar F_{x'}$, $\bar F_{y'}$; dann ist nach (20)

$$F_{x'}\xi + F_{y'}\eta = \bar F_{x'}\bar\xi + \bar F_{y'}\bar\eta = 1, \tag{26}$$

und man kann schreiben

$$\mathfrak{d} = \frac{(\bar F_{x'} - F_{x'})\bar\xi + (\bar F_{y'} - F_{y'})\bar\eta}{\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}}.$$

Die Weierstraßsche E-Funktion

$$E(x, y; \xi, \eta; \bar\xi, \bar\eta) = (\bar F_{x'} - F_{x'})\bar\xi + (\bar F_{y'} - F_{y'})\bar\eta$$

erlaubt uns endlich zu schreiben:

$$\mathfrak{d} = \frac{E(x, y; \xi, \eta; \bar\xi, \bar\eta)}{\sqrt{F_{x'}^2 + F_{y'}^2}}. \tag{27}$$

Die beiden Größen $\mathfrak{d}$ und E haben folglich dasselbe Vorzeichen und verschwinden zugleich. Nun war aber eine Extremale im Linienelement $(x, y; x', y')$ dann und nur dann stark, wenn die E-Funktion

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}'),$$

als Funktion von $\bar{x}', \bar{y}'$ betrachtet, definit ist. Die Gleichung (27) liefert also den Satz:

Eine Extremale ist im Linienelemente $(x, y; x', y')$ dann und nur dann stark, wenn die Tangente im entsprechenden Punkte der Indikatrix außer dem Berührungspunkte keinen anderen Punkt mit der Kurve gemein hat, und folglich gänzlich außerhalb dieser Kurve verläuft.

§ 3.

Bestimmung der starken Extremalen, die durch einen Punkt gehen.

Der soeben bewiesene Satz gestattet durch den bloßen Anblick der Indikatrix die starken Extremalen von den anderen zu unterscheiden. Um uns aber auf den allgemeinen Fall zu beschränken, ist es notwendig, solche Punkte (x, y) unseres Variationsproblems auszuschließen, für welche die Indikatrix mit einer ihrer Tangenten eine vierfache Berührung besitzt. Der Grund dieser Beschränkung ist folgender: die Extremalen sind für ein gegebenes Element $(x, y; x', y')$ regulär, wenn $F_1 \neq 0$ ist, d. h. die Indikatrix im entsprechenden Punkte eine von Null verschiedene Krümmung hat. Damit nun andererseits die Indikatrix, in einem Punkte, wo sie ihre Tangente nicht durchsetzt, die Krümmung Null habe, muß sie diese Tangente mindestens vierfach berühren. Durch die Bedingung, die wir der Kurve auferlegen, schließen wir also solche Punkte aus, wo die Weierstraßsche Bedingung für die Existenz einer starken Extremalen für derartige Richtungen erfüllt sein würde, für welche keine reguläre Extremale existiert.

Analytisch läßt sich diese Bedingung folgendermaßen ausdrücken: Die Tangente der Indikatrix hat mit der Kurve

$$F(x, y; \xi, \eta) = 1$$

im Punkte ξ, η dann eine vierfache Berührung, wenn die Koeffizienten t, t^2 und t^3 in der Taylorschen Entwicklung von

$$F(x, y; \xi + \alpha t, \eta + \beta t)$$

für geeignete Werte von α und β zugleich verschwinden.

Aber diese Entwicklung lautet:

$$(28) \qquad 1 + (\alpha F_\xi + \beta F_\eta) t + (\alpha^2 F_{\xi\xi} + 2\alpha\beta F_{\xi\eta} + \beta^2 F_{\eta\eta}) \frac{t^2}{2}$$
$$+ (\alpha^3 F_{\xi\xi\xi} + 3\alpha^2\beta F_{\xi\xi\eta} + 3\alpha\beta^2 F_{\xi\eta\eta} + \beta^3 F_{\eta\eta\eta}) \frac{t^3}{6} + ((t^4)) = 0 \cdot$$

Mit Hilfe der bekannten Gleichungen für F_1

$$F_{\xi\xi} = \eta^2 F_1, \quad F_{\xi\eta} = -\xi\eta F_1, \quad F_{\eta\eta} = \xi^2 F_1$$

kann man ferner schreiben:

$$F_{\xi\xi\xi} = \eta^2 \frac{\partial F_1}{\partial \xi}, \tag{29}$$

$$F_{\xi\xi\eta} = \frac{\partial F_{\xi\xi}}{\partial \eta} = 2\eta F_1 + \eta^2 \frac{\partial F_1}{\partial \eta}. \tag{30}$$

Man bemerke nun, daß F_1 homogen in ξ und η ist, und daß die Gleichung gilt

$$k^3 F_1(k\xi, k\eta) = F_1(\xi, \eta);$$

wenn man beide Seiten dieser Gleichung nach k differentiiert und $k = 1$ setzt, so erhält man

$$3F_1 + \xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0. \tag{31}$$

Setzt man diesen Wert von F_1 in (30) ein, so kommt

$$F_{\xi\xi\eta} = \frac{\eta}{3}\left(\eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - 2\xi \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\right);$$

auf ähnliche Weise werden die Beziehungen

$$F_{\xi\eta\eta} = \frac{\xi}{3}\left(\xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} - 2\eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\right)$$

$$F_{\eta\eta\eta} = \xi^2 \frac{\partial F_1}{\partial \eta},$$

abgeleitet.

Durch Einsetzen aller dieser Werte in (28) erhält man

$$1 + (\alpha F_\xi + \beta F_\eta)\, t + (\alpha\eta - \beta\xi)^2 \left[F_1 \frac{t^2}{2} + \left(\alpha \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\right) \frac{t^3}{6}\right] + ((t^4)).$$

Für die Werte von α und β, für welche $(\alpha F_\xi + \beta F_\eta)$ verschwindet, ist nun der Ausdruck $(\alpha\eta - \beta\xi)$ sicher von Null verschieden, wie aus der Gleichung (20)

$$\xi F_\xi + \eta F_\eta = 1$$

folgt.

Eine vierfache Berührung der Indikatrix durch die betreffende Tangente kann also nur dann stattfinden, wenn die Gleichungen

$$F_1 = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0 \tag{32}$$

zugleich erfüllt sind.

Die erste dieser Gleichungen zieht wegen (31) die Gleichung

$$\xi \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0 \tag{33}$$

nach sich; und die Gleichungen (32) und (33) können wegen des Nichtverschwindens ihrer Determinante $(\alpha\eta - \beta\xi)$ auf die einfache Form

(34) $$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = 0$$

gebracht werden. Diese Ausdrücke sind in den Argumenten ξ und η homogen; die Punkte der xy-Ebene, für welche das System (34) befriedigt werden kann, bilden also im allgemeinen eine Kurve, deren Gleichung wir mit

(35) $$\Psi(x, y) = 0$$

bezeichnen wollen.

Es sei jetzt P ein Punkt der xy-Ebene, der nicht auf der Kurve $\Psi = 0$ liegt.*) Die Indikatrix des positiv definiten Variationsproblems, das wir untersuchen, ist eine ganz im Endlichen liegende Kurve mit stetiger Krümmung; sie wird also *Stützgeraden* besitzen, d. h. Tangenten, welche durch keinen inneren Punkt der Kurve gehen, und zwar wird es für jede Richtung in der $\xi\eta$-Ebene zwei solche Stützgeraden geben, zwischen welchen die Indikatrix verläuft. In den Berührungspunkten irgend einer Stützgeraden ist die Indikatrix nach außen konvex und hat eine von Null verschiedene Krümmung, weil sonst die Stützgerade die Kurve vielfach berühren würde. Das entsprechende F_1 ist also nach unserem Satze von pag. 460 immer positiv und von Null verschieden.

Die Punkte der Indikatrix werden demnach in zwei Klassen geteilt: diejenigen nämlich, die von Stützgeraden berührt werden, und die anderen; jedem Berührungspunkte einer Stützgeraden entspricht eine *reguläre* Extremale, und wenn die Stützgerade die Indikatrix in keinem zweiten Punkte berührt, so ist diese Extremale *stark*.

Wir wollen annehmen, daß die Indikatrix nur eine endliche Anzahl von mehrfachen Tangenten besitzt; durch die Radienvektoren, die von dem Grundpunkte der Indikatrix zu den Berührungspunkten der mehrfachen Stützgeraden geführt werden, ist eine Reihe von Sektoren definiert; mit Hilfe dieser Sektoren (Fig. 2) kann man im Punkt P diejenigen Richtungen, für welche die Extremalen ein starkes Minimum in der Umgebung von P liefern, von den anderen (in der Figur schraffierten) unterscheiden, für welche ein schwaches Minimum oder auch ein Maximum existiert.

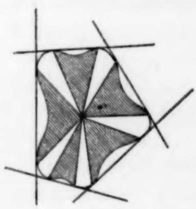

Fig. 2.

Zu gleicher Zeit ergibt sich die Umkehrung des Satzes, den wir in § 1 bewiesen haben:

*) Probleme, bei welchen Ψ identisch verschwindet, lassen wir grundsätzlich außer Betracht.

*Bei jedem definiten Variationsprobleme gibt es in jedem Punkte Richtungen, welche regulären starken Extremalen entsprechen.**)

Für diejenigen Richtungen, die den Berührungspunkten einer mehrfachen Tangente der Indikatrix entsprechen, ist die Frage, ob die entsprechende Extremale stark ist oder nicht, noch unentschieden und bedarf einer näheren Untersuchung, die im folgenden durch das Studium der diskontinuierlichen Lösungen geführt werden soll.

§ 4.

Die diskontinuierlichen Lösungen des Variationsproblems.

Bei Festhalten der Endpunkte 1 und 2 eines in 0 geknickten Kurvenzuges 102 verschwindet bekanntlich die erste Variation des Integrals

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y; x', y')\, dt$$

dann und nur dann, wenn die Kurven 10 und 02 Extremalen sind, und in der Ecke o die Erdmannsche Bedingung erfüllt ist.**) Letzteres ist der Fall, wenn die Größen $F_{x'}$ und $F_{y'}$ längs des ganzen Kurvenzuges 102, also auch im Knickpunkte 0 kontinuierliche Funktionen von t sind.

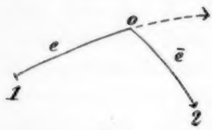

Fig. 3.

Wenn wir mit x_0', y_0' und $\bar{x}_0'$, $\bar{y}_0'$ die Werte der Ableitungen von $x(t)$ und $y(t)$ und ähnlich mit φ, $\bar{\varphi}$ die Werte irgend einer Funktion $\varphi(x', y')$ dieser Größen an beiden Seiten des Knickpunktes 0 bezeichnen, so lassen sich die Erdmannschen Bedingungen folgendermaßen schreiben:

$$F_{x'} - \bar{F}_{x'} = 0, \quad F_{y'} - \bar{F}_{y'} = 0. \tag{36}$$

Diese Bedingungen kann man mit Hilfe der Weierstraßschen E-Funktion in eine neue Form einkleiden, die für das Folgende nützlich ist.

Mit Kneser***) sagt man, daß ein *außerordentliches* Verschwinden der E-Funktion vorliegt, wenn diese Größe für ein Richtungspaar x', y'; $\bar{x}', \bar{y}'$ verschwindet, für welches $x'\bar{y}' - y'\bar{x}' \neq 0$ ist. Die Gleichungen (36) ziehen nun nicht nur das außerordentliche Verschwinden von

$$E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = (\bar{F}_{x'} - F_{x'})\bar{x}' + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\bar{y}',$$

*) Dieser Satz ist auch ohne die Einschränkungen richtig, daß die Indikatrix nur eine endliche Anzahl von Doppeltangenten haben soll und daß $\Psi \neq 0$ ist.

**) cf. Kneser, Lehrbuch, pag. 172; Bolza, a. a. O., pag. 36 und 125

***) Lehrbuch, pag. 78.

sondern auch das von

$$E(x, y; \bar{x}', \bar{y}'; x', y') = (F_{x'} - \bar{F}_{x'})x' + (F_{y'} - \bar{F}_{y'})y'$$

nach sich.

Wegen der Homogeneitätseigenschaften von F und deren Ableitungen sind ebenfalls

$$(37) \qquad E = E(x, y; \xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0$$

und

$$(38) \qquad \bar{E} = E(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) = 0.$$

Nun hatten wir aber gesehen, daß die E-Funktion proportional der Entfernung eines Punktes der Indikatrix von der Tangente in einem anderen war. Die Gleichungen (37) und (38) besagen also nichts anderes, als daß die Tangente der Indikatrix im Punkte ξ, η den Punkt $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ dieser Kurve enthält, und daß ebenso die Tangente im Punkte $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ durch den Punkt ξ, η geht.

Die Gerade, welche ξ, η mit $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ verbindet, ist also eine Doppeltangente der Indikatrix. Umgekehrt bestimmt aber auch jede Doppeltangente dieser Kurve durch ihre Berührungspunkte Richtungen, für welche die Erdmannsche Bedingung gilt, weil aus den Gleichungen $E = 0$ und $\bar{E} = 0$ die Beziehungen (36) folgen, da hier $\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi} \neq 0$ ist.

Wir machten schon bei der Definition der Indikatrix auf die Analogie aufmerksam, welche zwischen dieser Kurve und der Strahlenfläche in der geometrischen Optik existiert. Nun besitzt die Strahlenfläche für doppelbrechende Kristalle bekanntlich singuläre Tangentialebenen, welche die Fläche längs der Peripherie eines Kreises berühren; ihnen entsprechen ähnlich wie bei unseren ebenen Problemen gebrochene Wege des Lichtes. Nur ist das Licht nicht in einer bestimmten Richtung gebrochen, wie es bei einer Doppeltangentialebene der Fall sein würde, welche die Strahlenfläche in zwei bestimmten Punkten berührt, sondern längs eines ganzen Kegels. Dieses ist das bekannte von Hamilton entdeckte Phänomen der konischen Refraktion.

§ 5.

Der Satz von der Vertauschung der starken Extrema.

Es entsprechen den beiden Richtungen, welche den Grundpunkt der Indikatrix mit den Berührungspunkten einer Doppeltangente verbinden, zwei Extremalen, die wir mit 102 und 1′02′ bezeichnen wollen (Fig. 4).

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen verschwindet die erste Variation für die zwei gebrochenen Kurven $102'$ und $1'02$.

Fig. 4.

Wir nennen eine diskontinuierliche Extremale *stark*, wenn diese Kurve in der Umgebung jedes Punktes ihrer beiden Zweige, der nicht mit dem Knickpunkte zusammenfällt, ein starkes Extremum liefert.

Wir wollen jetzt zeigen, daß, wenn die Doppeltangente der Indikatrix eine Stützgerade dieser Kurve ist, und wenn man die vier Punkte $1, 2, 1', 2'$ hinreichend nahe an 0 wählt, von den vier stationären Kurven 102, $1'02'$, $102'$, $1'02$ *eine einzige stark sein wird;* diese starke Extremale ist im allgemeinen Falle, den wir allein betrachten, immer diskontinuierlich. Hierdurch werden auch die am Ende des § 3 ausgeschlossenen Richtungen in solche, die starken, und solche, die schwachen Extremalen entsprechen, unterschieden.

Es sei x_0, y_0 ein Punkt der xy-Ebene, dessen Indikatrix folgende Eigenschaften hat:

a) Die Invariante Ψ ist für den Punkt x_0, y_0 von Null verschieden:

$$\Psi(x_0, y_0) \neq 0.$$

b) Keine Stützgerade der Indikatrix berührt die Kurve in mehr als zwei Punkten.

c) Die Kurve besitzt eine einzige „Doppelstützgerade", d. h. eine einzige Doppeltangente, die zugleich Stützgerade ist. Diese letzte Einschränkung hat nur den Zweck, die Betrachtungen übersichtlicher zu gestalten; unsere Ergebnisse lassen sich nämlich ohne weiteres auf allgemeine Fälle übertragen, wo die Kurve eine endliche Anzahl von Doppelstützgeraden besitzt.

Um nun zu zeigen, daß die Eigenschaften a), b), c) auch für eine gewisse Umgebung des Punktes x_0, y_0 gelten, bemerken wir zunächst, daß die Kurve notwendig die Gestalt der Fig. 5 (p. 468) haben wird. Es seien nun $A\bar{A}$ die Doppelstützgerade und $\vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$ die Winkel, welche die Geraden GA und $G\bar{A}$ mit der positiven ξ-Achse machen; man kann diese Größen, die bis auf Vielfache von 2π unbestimmt sind, derart wählen, daß

$$0 < \bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0 < \pi \tag{39}$$

ist. Es mögen den Richtungen

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \vartheta_0 + \lambda(\bar{\vartheta}_0 - \vartheta_0) \\ 0 < \lambda < 1 \end{gathered} \tag{40}$$

die schwachen, dagegen den Richtungen

$$\psi_0 = \bar{\vartheta}_0 + \lambda(2\pi + \vartheta_0 - \bar{\vartheta}_0) \qquad (41)$$
$$0 < \lambda < 1$$

die starken Extremalen in x_0, y_0 entsprechen.

Da $\Psi(x_0, y_0) \neq 0$ ist, so ist die Krümmung der Indikatrix für sämtliche Richtungen (41) der starken Extremalen, und auch für die Richtungen $\vartheta_0, \bar{\vartheta}_0$ selbst, ebenfalls von Null verschieden, und die Invariante F_1 besitzt in diesem Sektor ein positives Minimum.

Es sei jetzt x, y ein beliebiger Punkt der xy-Ebene; durch die Geraden, welche den Grundpunkt der entsprechenden Indikatrix mit den Berührungspunkten einer ihrer Doppeltangenten verbinden, werden die Fortschreitungsrichtungen einer Lösung bestimmt, die im Punkte x, y diskontinuierlich ist; man bezeichne mit ϑ und $\bar{\vartheta}$ die Winkel, welche diese Richtungen mit der positiven x-Achse machen. Die Größen

$$x' = \cos\vartheta, \quad y' = \sin\vartheta, \quad \bar{x}' = \cos\bar{\vartheta}, \quad \bar{y}' = \sin\bar{\vartheta} \qquad (42)$$

müssen dann, wie wir sahen, den Erdmannschen Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} F_{x'}(x, y;\, \cos\vartheta, \sin\vartheta) &= F_{x'}(x, y;\, \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}) \\ F_{y'}(x, y;\, \cos\vartheta, \sin\vartheta) &= F_{y'}(x, y;\, \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}) \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

genügen. Dieses Gleichungssystem läßt sich in einer gewissen Umgebung des Punktes x_0, y_0 nach $\vartheta, \bar{\vartheta}$ auflösen; man betrachte nämlich die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{D(F_{x'} - \bar{F}_{x'},\ F_{y'} - \bar{F}_{y'})}{D(\quad \vartheta \quad,\quad \bar{\vartheta} \quad)},$$

oder

$$\Delta = \begin{vmatrix} -F_{x'x'}\sin\vartheta + F_{x'y'}\cos\vartheta, & \bar{F}_{x'x'}\sin\bar{\vartheta} - \bar{F}_{x'y'}\cos\bar{\vartheta} \\ -F_{x'y'}\sin\vartheta + F_{y'y'}\cos\vartheta, & \bar{F}_{x'y'}\sin\bar{\vartheta} - \bar{F}_{y'y'}\cos\bar{\vartheta} \end{vmatrix}.$$

Führt man in dieser Determinante die Größen

$$F_1 = \frac{1}{\sin^2\vartheta} F_{x'x'} = -\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} F_{x'y'} = \frac{1}{\cos^2\vartheta} F_{y'y'}$$

und

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{\sin^2\bar{\vartheta}} \bar{F}_{x'x'} = -\frac{1}{\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\vartheta}} \bar{F}_{x'y'} = \frac{1}{\cos^2\bar{\vartheta}} \bar{F}_{y'y'}$$

ein, so reduziert sie sich einfach auf

$$\Delta = F_1 \bar{F}_1 \sin(\vartheta - \bar{\vartheta}). \qquad (44)$$

Aus unserer Voraussetzung, daß die Indikatrix des Punktes x_0, y_0 eine Doppeltangente besitzt, folgt nun, daß die Gleichungen (43) für ein System von Größen wie

$$x_0, y_0, \quad x_0', y_0', \quad \bar{x}_0' \; \bar{y}_0' \qquad (45)$$

befriedigt sind. Die Größen

$$F_1(x_0, y_0;\ \cos\vartheta_0,\ \sin\vartheta_0) \text{ und } F_1(x_0, y_0;\ \cos\bar{\vartheta}_0,\ \sin\bar{\vartheta}_0)$$

sind aber, wie wir bemerkten, von Null verschieden; das gleiche gilt von $\sin(\vartheta_0 - \bar{\vartheta}_0)$. Also ist

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0$$

und es existieren zwei Funktionen

$$(46)\qquad \vartheta = \vartheta(x, y), \quad \bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(x, y),$$

die in der Umgebung des Punktes x_0, y_0 regulär sind, für diesen Punkt die Werte ϑ_0, $\bar{\vartheta}_0$ annehmen und das Gleichungssystem (43) identisch erfüllen.

Man gebrauche jetzt den bekannten Satz über die Eindeutigkeit der Lösungen eines Systems von impliziten Funktionen in der Umgebung eines Punktes.*) Dieser Satz lautet hier: Man kann zwei positive Größen ϱ_1 und ε angeben mit folgenden Eigenschaften; für jeden Punkt der Kreisfläche, deren Mittelpunkt in x_0, y_0 liegt und deren Radius ϱ_1 ist, genügen die Größen (46) den Ungleichheiten

$$(47)\qquad |\vartheta - \vartheta_0| \leqq \varepsilon, \quad |\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0| \leqq \varepsilon.$$

ϑ und $\bar{\vartheta}$ sind umgekehrt die einzigen Größen, welche im betrachteten Gebiete das Gleichungssystem (43) und zugleich die Ungleichheiten (47) befriedigen.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Indikatrix, welche den Punkten einer gewissen Umgebung von x_0, y_0 entspricht, folgende Eigenschaften besitzt: Von den Richtungen, welche den Grundpunkt der Kurve mit den Berührungspunkten einer Doppelstützgeraden verbinden, kann 1. keine einzige innerhalb des Sektors $(BD\bar{B})$ fallen, 2. nicht die eine innerhalb des Sektors $(\bar{B}\bar{C}ECB)$ und die andere innerhalb des Sektors $(\bar{C}EC)$ fallen. 3. können nicht beide entweder innerhalb des Sektors $(\bar{B}\bar{A}\bar{C})$ oder innerhalb des Sektors (CAB) fallen.

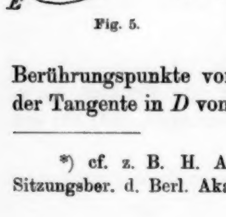

Fig. 5.

Die erste Behauptung begründet man, indem man bemerkt, daß für die Indikatrix des Punktes x_0, y_0 die Punkte D des Sektors $BD\bar{B}G$ keine Berührungspunkte von Stützgeraden sind; das Produkt der Entfernungen der Tangente in D von den ihr parallelen Stützgeraden hat ein positives, von

*) cf. z. B. H. A. Schwarz, Zur Lehre der unentwickelten Funktionen. Sitzungsber. d. Berl. Akad. XLV, pag. 948 (1897).

Null verschiedenes Minimum, wenn D den betreffenden Sektor beschreibt*) Da nun diese Funktion eine stetige Funktion nicht nur der Richtung des Vektors GD, sondern auch ihrer Parameter x und y ist, so wird sie ebenfalls für sämtliche Richtungen $BD\bar{B}G$ von Null verschieden bleiben, wenn x und y innerhalb einer gewissen Umgebung von x_0 und y_0 bleiben.

Für keinen Punkt dieser Umgebung wird also die Tangente in einem Punkte der Indikatrix, welcher einer der Richtungen GD entspricht, Stützgerade sein können.

Die zweite und dritte Behauptung lassen sich ebenso leicht beweisen. Man betrachte nämlich die Größe

$$\begin{aligned}g(x,y;\vartheta_1,\vartheta_2) &= \left(\frac{E(x,y;\cos\vartheta_1,\sin\vartheta_1;\cos\vartheta_2,\sin\vartheta_2)}{(\vartheta_1-\vartheta_2)^2}\right)^2\\ &+\left(\frac{E(x,y;\cos\vartheta_2,\sin\vartheta_2;\cos\vartheta_1,\sin\vartheta_1)}{(\vartheta_1-\vartheta_2)^2}\right)^2.\end{aligned}\tag{48}$$

Diese Größe verschwindet nur dann, wenn ϑ_1 und ϑ_2 die Richtungen der Berührungspunkte einer Doppeltangente der Indikatrix sind; außerdem kann $g(x,y;\vartheta_1,\vartheta_2)$ nur dann mit $(\vartheta_1-\vartheta_2)$ gegen Null konvergieren, wenn die Indikatrix eine sie vierfach berührende Gerade besitzt, d. h. wenn $\Psi(x,y)=0$ ist. Nun ist $A\bar{A}$ die einzige Doppelstützgerade im Punkte x_0, y_0 und die übrigen Doppeltangenten sind in endlicher Anzahl vorhanden; man kann also B und $\bar{B}$ so nahe an A und $\bar{A}$ wählen, daß keine andere Doppeltangente einen Punkt des Sektors $(\bar{B}\bar{A}\bar{C}ECAB)$ berührt; ferner ist $\Psi(x_0,y_0)\neq 0$. Hieraus folgt, daß g im Punkte x_0, y_0 für die Richtungspaare, die unter 2. und 3. beschrieben waren, ein positives, von Null verschiedenes Minimum besitzt. Nun ist aber g eine stetige Funktion seiner vier Argumente und bleibt daher in einer gewissen Umgebung von x_0, y_0 von Null verschieden, wenn ϑ_1 und ϑ_2 das betreffende Gebiet durchlaufen.

Wenn wir alle diese Resultate zusammenfassen, so können wir sagen: Man kann eine positive Größe ϱ angeben derart, daß für alle Punkte der Kreisfläche mit dem Radius ϱ, deren Mittelpunkt x_0, y_0 ist, 1. die Punkte der Indikatrix, welche einer der Richtungen des Sektors $(BD\bar{B})$ entsprechen, nicht Berührungspunkte einer Stützgerade sein können; 2. die Punkte der Indikatrix, welche den Richtungen des Sektors $(\bar{B}\bar{A}\bar{C}ECAB)$ entsprechen, eine einzige Doppeltangente liefern, nämlich die, welche durch die Gleichungen (46) bestimmt ist.

Da nun eine ganz im Endlichen liegende geschlossene Kurve, wenn sie überhaupt eine Doppeltangente besitzt, auch ganz sicher eine Doppel-

*) Dieses folgt aus der Voraussetzung, die wir machten, daß die Indikatrix im Punkte x_0, y_0 keine Stützgerade besitzt, welche die Kurve in drei verschiedenen Punkten berührt.

stützgerade haben muß, so sehen wir, daß die Richtungen (46) den Berührungspunkten einer Doppelstützgerade entsprechen müssen. Diese Doppelstützgerade kann die Indikatrix in keinem dritten Punkte berühren, da sonst die Richtungen ϑ und $\bar{\vartheta}$ nicht eindeutig bestimmt sein würden, was ja der Fall ist.

Für sämtliche Punkte eines gewissen Gebietes T, das den Punkt x_0, y_0 umgibt, bleiben also die Eigenschaften a), b) und c) der Indikatrix erhalten und es sind sämtliche durch die Gleichungen (42) definierten Richtungen $x', y', \bar{x}', \bar{y}'$, durch die Beziehungen (43) und die Anfangswerte (45) eindeutig bestimmt; dabei genügen die in (42) vorkommenden Größen ϑ, $\bar{\vartheta}$ den Gleichungen (46).

Diese Gleichungen (42) können aber, wenn man (46) berücksichtigt, als zwei Systeme von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} x' = x'(x, y), & y' = y'(x, y), \\ \bar{x}' = \bar{x}'(x, y), & \bar{y}' = \bar{y}'(x, y) \end{cases}$$

angesehen werden, deren Integrale — nach dem Cauchyschen Existenztheorem — zwei Scharen C und $\bar{C}$ von Kurven bilden, von denen jede das Gebiet T einfach und lückenlos überdeckt.

Auf jeder der Kurven C und $\bar{C}$ ist ein positiver Sinn ausgezeichnet; die Winkel, welche die positiven Richtungen der Tangenten dieser Kurven mit der positiven x-Achse machen, werden durch die Werte (46) von ϑ und $\bar{\vartheta}$ geliefert. Den Richtungen

$$\varphi = \vartheta + \lambda(\bar{\vartheta} - \vartheta), \quad 0 < \lambda < 1 \tag{49}$$

entsprechen im Punkte x, y Extremalen, die in diesem Punkte schwach sind; den Richtungen

$$\psi = \bar{\vartheta} + \lambda(2\pi + \vartheta - \bar{\vartheta}), \quad 0 < \lambda < 1 \tag{50}$$

dagegen Extremalen, welche in diesem Punkte stark sind.

Wenn endlich eine Extremale e (Fig. 6) im Punkte P die Kurve C berührt und denselben positiven Sinn wie C besitzt, wenn zudem die Krümmung von e von der Krümmung von C in P verschieden ist, so daß die Extremale in der Nähe von P ganz auf der einen Seite von C zu liegen kommt, so trennt der Punkt P auf der Extremalen e Punkte, wo die Extremale stark ist, von anderen, wo sie schwach ist.

Einen analytischen Beweis dieser Tatsache erhält man beispielsweise, indem man durch eine Punkttransformation

$$x_1 = x_1(x, y), \quad y_1 = y_1(x, y),$$

die Kurvenscharen C und $\bar{C}$ in

$$x_1 = \text{const.} \quad \text{und} \quad y_1 = \text{const.}$$

überführt, wobei die Krümmungsverhältnisse erhalten bleiben; durch geometrische Betrachtungen leuchtet aber der Satz direkt ein. In der Fig. 6 z. B. verläuft die Extremale e in jedem Punkte vor P *innerhalb* des Winkels, den die positiven Richtungen von C und $\bar{C}$ bilden, und *außerhalb* desselben Winkels, nachdem sie P getroffen hat. Das Extremum ist auf e zunächst schwach und dann stark.

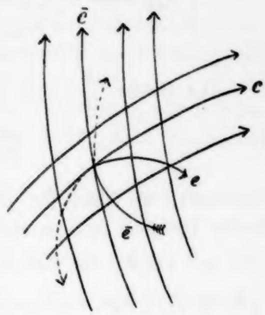

Fig. 6.

Wir wollen jetzt, um die Existenz von starken diskontinuierlichen Lösungen zu begründen, nachweisen, daß für die Extremale $\bar{e}$, die im Punkte P die Kurve $\bar{C}$ berührt (und denselben Sinn wie $\bar{C}$ hat), genau das Gegenteil stattfinden muß: d. h., daß das Extremum für $\bar{e}$ *zuerst* stark ist und dann erst schwach werden wird.

Mit anderen Worten: *es vertauschen sich die Teile, für welche das Extremum stark ist, in jedem Diskontinuitätspunkte.*

Damit dieser Satz gelte, ist notwendig und hinreichend, daß die Extremale $\bar{e}$ dieselbe relative Lage zu $\bar{C}$ besitze, die e zu C hat. Sind also τ und σ die Krümmungen von e und C, $\bar{\tau}$ und $\bar{\sigma}$ diejenigen von $\bar{e}$ und $\bar{C}$ im Punkte P, so müssen die Größen $(\tau - \sigma)$ und $(\bar{\tau} - \bar{\sigma})$ dasselbe Vorzeichen haben.

Die Krümmung einer Kurve ist — auch dem Vorzeichen nach — durch die Formel bestimmt

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}};$$

sie ist positiv oder negativ, je nachdem die Kurve links oder rechts von ihrer Tangente sich befindet, wenn man sie im positiven Sinne durchläuft.

Die Krümmung σ der Kurve C kann aus dem Systeme von Gleichungen (42) und (43) berechnet werden, das diese Kurve definiert; berücksichtigt man die Gleichung

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

die aus (42) folgt, so erhält man

$$\sigma = x'y'' - y'x'',$$

oder mit Benutzung von (42) $\sigma = \vartheta'$. Durch Differentiation der Gleichungen (43) längs der Kurve C erhält man nun, nach Einführung der Größen F_1 und $\bar{F}_1$, die Gleichungen

$$(51)\quad \begin{cases} F_{xx'}\cos\vartheta + F_{yx'}\sin\vartheta - F_1\sin\vartheta\cdot\vartheta' \\ \qquad = \overline{F}_{xx'}\cos\vartheta + \overline{F}_{yx'}\sin\vartheta - \overline{F}_1\sin\overline{\vartheta}\,\dfrac{d\overline{\vartheta}}{dt}, \\ F_{xy'}\cos\vartheta + F_{yy'}\sin\vartheta + F_1\cos\vartheta\cdot\vartheta' \\ \qquad = \overline{F}_{xy'}\cos\vartheta + \overline{F}_{yy'}\sin\vartheta + \overline{F}_1\cos\overline{\vartheta}\,\dfrac{d\overline{\vartheta}}{dt}. \end{cases}$$

Die Größe $\frac{d\overline{\vartheta}}{dt}$ wird hier durch die Gleichung

$$\frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial y}\sin\vartheta$$

bestimmt, wo man für $\overline{\vartheta}$ seinen Wert (46) eingesetzt hat; um diese Größe übrigens zu eliminieren, multipliziere man die erste der Gleichungen (51) mit $\cos\overline{\vartheta}$, die andere mit $\sin\overline{\vartheta}$ und addiere. Man erhält

$$\begin{aligned} F_1\sin(\overline{\vartheta}-\vartheta)\,\sigma = (\overline{F}_{xx'} - F_{xx'})\cos\vartheta\cos\overline{\vartheta} &+ (\overline{F}_{xy'} - F_{xy'})\cos\vartheta\sin\overline{\vartheta}, \\ + (\overline{F}_{yx'} - F_{yx'})\sin\vartheta\cos\overline{\vartheta} &+ (\overline{F}_{yy'} - F_{yy'})\sin\vartheta\sin\overline{\vartheta}. \end{aligned}$$

Die Krümmung τ der Extremale e wird durch die Lagrangesche Gleichung (4) mit Berücksichtigung von

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

geliefert:

$$F_1\tau = F_{xy'} - F_{xy'}.$$

Man multipliziere diese letzte Gleichung mit $\sin(\overline{\vartheta}-\vartheta)$ und subtrahiere von der vorherigen; dann kommt:

$$(52)\quad \begin{aligned} F_1\sin(\overline{\vartheta}-\vartheta)(\sigma-\tau) = (\overline{F}_{xx'}-F_{xx'})\cos\vartheta\cos\overline{\vartheta} &+ (\overline{F}_{xy'}-F_{yx'})\cos\vartheta\sin\overline{\vartheta}, \\ + (\overline{F}_{yx'}-F_{xy'})\sin\vartheta\cos\overline{\vartheta} &+ (\overline{F}_{yy'}-F_{yy'})\sin\vartheta\sin\overline{\vartheta}. \end{aligned}$$

Nun liefert aber die Gleichung (11)

$$F = F_{x'}x' + F_{y'}y' = F_{x'}\cos\vartheta + F_{y'}\sin\vartheta$$

und ihre analoge

$$\overline{F} = \overline{F}_{x'}\overline{x}' + \overline{F}_{y'}\overline{y}' = \overline{F}_{x'}\cos\overline{\vartheta} + \overline{F}_{y'}\sin\overline{\vartheta}$$

nach x und y partiell differentiiert

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xx'}\cos\vartheta + F_{xy'}\sin\vartheta, & F_y &= F_{yx'}\cos\vartheta + F_{yy'}\sin\vartheta, \\ \overline{F}_x &= \overline{F}_{xx'}\cos\overline{\vartheta} + \overline{F}_{xy'}\sin\overline{\vartheta}, & \overline{F}_y &= \overline{F}_{yx'}\cos\vartheta + \overline{F}_{yy'}\sin\overline{\vartheta}. \end{aligned}$$

Wenn man diese Identitäten in (52) einsetzt, so kommt endlich

$$(53)\quad F_1\sin(\overline{\vartheta}-\vartheta)(\sigma-\tau) = \cos\vartheta\,\overline{F}_x + \sin\vartheta\,\overline{F}_y - \cos\overline{\vartheta}\,F_x - \sin\overline{\vartheta}\,F_y.$$

Durch Vertauschung von x', y' mit $\overline{x}'$, $\overline{y}'$ hätte man auf analoge Weise erhalten:

$$(54)\quad \overline{F}_1\sin(\vartheta-\overline{\vartheta})(\overline{\sigma}-\overline{\tau}) = \cos\overline{\vartheta}\,F_x + \sin\overline{\vartheta}\,F_y - \cos\vartheta\,\overline{F}_x - \sin\vartheta\,\overline{F}_y.$$

Endlich folgt durch Addition von (53) und (54), wenn man bemerkt, daß $\sin(\bar{\vartheta} - \vartheta) \neq 0$ ist,

(55) $$F_1(\sigma - \tau) = \bar{F}_1(\bar{\sigma} - \bar{\tau}).$$

F_1 und $\bar{F}_1$ sind aber, wie wir sahen, beide positiv und von Null verschieden, weil die Indikatrix in jedem Berührungspunkte einer Stützgerade nach außen konvex sein muß.

Es haben also $(\sigma - \tau)$ und $(\bar{\sigma} - \bar{\tau})$ dasselbe Vorzeichen, wie wir beweisen wollten, und das Verschwinden der einen Größe zieht immer das der anderen nach sich.

Setzt man auf der rechten Seite von (53) an Stelle von $\vartheta, \bar{\vartheta}$ die Funktionen (46) ein, so erhält man eine Größe

(56) $$\Omega(x, y) = \cos\vartheta\,\bar{F}_x + \sin\vartheta\,\bar{F}_y - \cos\bar{\vartheta}\,F_x - \sin\bar{\vartheta}\,F_y,$$

die in jedem Punkte definiert ist, wo eine diskontinuierliche Lösung möglich ist, und deren Vorzeichen für die Bestimmung der starken diskontinuierlichen Lösungen von Bedeutung ist.

In der Fig. 6 ist z. B. $\Omega(x, y) > 0$; der Punkt P ist Anfangspunkt des starken Teiles der Extremalen e und Endpunkt des starken Teiles von $\bar{e}$. Wäre $\Omega(x, y)$ negativ, so würde das Umgekehrte stattfinden.

Unsere Resultate können in folgender Form ausgesprochen werden: *Wenn man eine starke Extremale e bis zu dem Punkte P verfolgt, wo sie aufhört stark zu sein, und wenn im Punkte P die betreffende Invariante Ω nicht verschwindet, so gibt es eine Extremale $\bar{e}$, welche durch P geht, von diesem Punkte an erst stark wird und mit e eine starke diskontinuierliche Lösung des Problems bildet.*

Die Punkte, für welche die Indikatrix den Bedingungen a), b), c) des Anfangs dieses Paragraphen genügt und für welche außerdem Ω von Null verschieden ist, sind nach unserer Terminologie reguläre Punkte des Variationsproblems. In einem Gebiete, dessen sämtliche Punkte regulär sind, sind die möglichen Knickpunkte einer festen Extremalen immer isoliert; denn in regulären Punkten werden die Kurven C und $\bar{C}$ von den Extremalen e und $\bar{e}$ einfach berührt.*)

Die Bedingung, damit zwei aufeinander folgende Knickpunkte einer Extremalen e in P zusammenfallen, ist also das Verschwinden der Invarianten Ω in diesem Punkte. Dann fallen aber auch, wie die Formel (55) zeigt, zwei aufeinander folgende Knickpunkte der Extremalen $\bar{e}$ zusammen; eine der Extremalen e oder $\bar{e}$ wird eine starke *kontinuierliche* Lösung des Variationsproblems geben. Man kann sich ein vorläufiges Bild der

*) Einen analytischen Beweis dieser Tatsache findet man in meiner Dissert., pag. 24.

Verhältnisse in diesem Falle machen, indem man die Fig. 7 betrachtet. In dieser Figur sind die Kurven C und $\bar{C}$ geradlinig angenommen. Es sei P ein Punkt, für welchen die Invariante Ω verschwindet; P_1 ein zweiter Punkt in der Nähe des ersten, für welchen aber $\Omega \neq 0$ ist. Die Extremale $\bar{e}_1$ besitzt die zwei aufeinander folgenden Knickstellen P_1 und P_3; die Extremale e_1 die zwei aufeinander folgenden Stellen P_1 und P_2. Man betrachte die starke zweimal gebrochene Lösung $\bar{e}_1 e_1 \bar{e}_2$. Wenn P_1 gegen P konvergiert, so nähern sich die zwei Punkte P_1 und P_2 unbegrenzt, und der Teil e_1 des Extremalenzuges $\bar{e}_1 e_1 \bar{e}_2$ konvergiert gegen Null. Schließlich erhält man die starke Extremale $\bar{e}$, die durch P geht, während die entsprechende Extremale e schwach ist.

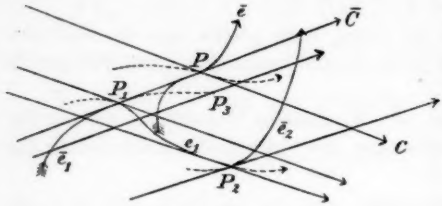

Fig. 7.

Höhere Oskulationen der Extremalen e mit den Kurven C würden zu noch verwickelteren Verhältnissen führen. Es ist aber zu vermuten, daß der Satz von der Vertauschung der starken Extrema auch in diesen Fällen richtig bleibt, so daß von den vier möglichen Lösungen in einer Knickstelle immer eine und nur eine stark sein wird.

Wenn nun endlich die Invariante Ω identisch in x und y verschwindet — ein Fall, den ich in meiner Dissertation pag. 23 betrachtet habe — so geht aus dem Vorhergehenden (speziell aus den Gleichungen (53) und (54)) hervor, daß die zwei Kurvenscharen C und $\bar{C}$ Extremalen des Variationsproblems sind. In diesem Falle sind diese Kurven die einzigen Extremalen, welche Knickpunkte zulassen, während die Lage dieser Knickpunkte auf ihnen unbestimmt ist.

Im folgenden wollen wir diese sämtlichen Singularitäten des Variationsproblems beiseite lassen, um die Betrachtungen über das Feld von starken Extremalenzügen nicht unnötig kompliziert zu gestalten.

§ 6.

Existenz eines Feldes von starken diskontinuierlichen Lösungen.

Die Möglichkeit des Beweises, daß das Integral J, längs der gebrochenen Extremale 102 genommen (Fig. 8), einen Extremwert erreicht, beruht im wesentlichen darauf, daß man dieses Kurvenstück mit einem Felde umgeben kann. D. h.: Wir müssen durch eine einparametrige

Schar von Extremalen ein einfach zusammenhängendes Gebiet erfüllen und einfach überdecken, in dessen Innerem 102 gänzlich verläuft.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Knickpunktes einer beliebigen Extremalen des Feldes mit a, b, die Fortschreitungsrichtungen der diskontinuierlichen Extremalenzweige mit ϑ, $\bar{\vartheta}$; die entsprechenden Größen im Punkte 0 sollen a_0, b_0, $\vartheta_0\,\bar{\vartheta}_0$ genannt werden.

Es sei jetzt eine im Punkte 0 reguläre Kurve

$$(57) \qquad \Gamma(a, b) = 0$$

gegeben, deren Tangente im Inneren des Winkels 102 liegt, die also keinen der beiden Zweige 10 und 02 berührt.

Es ist daher

$$\Gamma(a_0, b_0) = 0,$$

und mindestens eine der Größen

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial a}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial b}$$

für $a = a_0$ und $b = b_0$ von Null verschieden; wir haben also z. B.

$$(58) \qquad \Gamma_b^0 = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b}\right)_{a = a_0,\, b = b_0} \neq 0.$$

Die gebrochenen Extremalen $1'0'2'$ *(Fig. 8), deren* ***Knickpunkte auf der Kurve*** $\Gamma(a, b) = 0$ *liegen,* ***bilden*** *in der Umgebung von* a_0, b_0 *ein Feld, das den Kurvenzug* 102 *umgibt.*

Wir wollen dies zunächst für denjenigen Teil der Ebene beweisen, welcher in der Umgebung von 0, auf derselben Seite der Kurve liegt, wie das Extremalenstück 10.

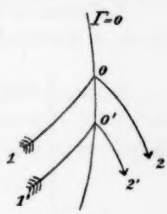

Fig. 8.

Da $\Gamma_b^0 \neq 0$ ist, kann man die Gleichung (57) nach b auflösen und bekommt:

$$(59) \qquad b - b_0 = \mathfrak{b}(a - a_0).$$

Setzt man in den Gleichungen (43), pag. 467, a, b für x, y ein, so wird man nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen diese Gleichungen in der Umgebung des Wertesystems a_0, b_0, ϑ_0, $\bar{\vartheta}_0$ nach ϑ, $\bar{\vartheta}$ auflösen können, wenn nur das Variationsproblem in a_0, b_0 regulär ist. Man erhält so die Beziehung

$$(60) \qquad \vartheta - \vartheta_0 = \varphi(a - a_0,\, b - b_0).$$

Es lassen sich nun die Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen (4) auch durch reguläre Funktionen in t, a, b darstellen, welche durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt sind:*)

*) Kneser, Lehrbuch, § 29, pag. 108.

$$(61)\quad \begin{cases} x = X(t;\, a, b;\, \vartheta), \\ y = Y(t;\, a, b;\, \vartheta), \\ X(0;\, a, b;\, \vartheta) = a, \quad Y(0;\, a, b;\, \vartheta) = b, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{t=0} = \cos\vartheta, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)_{t=0} = \sin\vartheta, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

Durch Einsetzen des Wertes (60) und hierauf des Wertes (59) von b in diese letzten Gleichungen wird die Extremalenschar $1'0'$ dargestellt durch Gleichungen der Form

$$(62)\qquad x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a),$$

die für das Wertepaar $t = 0$, $a = a_0$ regulär sind.

Um nun zu beweisen, daß durch diese Kurvenschar die Ebene in der Umgebung des Punktes 0 einfach, aber lückenlos überdeckt wird, genügt es zu zeigen, daß die Funktionaldeterminante

$$(63)\qquad \frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)_{t=0,\, a=a_0}} \neq 0$$

ist. Man kann nämlich dann die Gleichungen (62) nach t und a in der Umgebung von $t = 0$, $a = a_0$ auflösen.

Letzteres zeigt man am leichtesten, wenn man die Funktionaldeterminante der Funktionen

$$(64)\quad \begin{cases} x = X(t;\, a, b;\, \vartheta), \\ y = Y(t;\, a, b;\, \theta), \\ 0 = \Gamma(a, b), \\ 0 = F_{x'}(a, b;\, \cos\vartheta, \sin\vartheta) - F_{x'}(a, b;\, \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}), \\ 0 = F_{y'}(a, b;\, \cos\vartheta, \sin\vartheta) - F_{y'}(a, b;\, \cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta}) \end{cases}$$

nach $t, a, b, \vartheta, \bar{\vartheta}$ betrachtet; sie lautet nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} X_t & X_a & X_b & X_\vartheta & 0 \\ Y_t & Y_a & Y_b & Y_\vartheta & 0 \\ 0 & \Gamma_a & \Gamma_b & 0 & 0 \\ 0 & (F_{xx'} - \overline{F}_{xx'}) & (F_{yx'} - \overline{F}_{yx'}) & -F_1 \sin\vartheta & \overline{F}_1 \sin\bar{\vartheta} \\ 0 & (F_{xy'} - \overline{F}_{xy'}) & (F_{yy'} - \overline{F}_{yy'}) & F_1 \cos\vartheta & -\overline{F}_1 \cos\bar{\vartheta} \end{vmatrix}.$$

Wenn man in dieser Determinante die dritte bis fünfte Kolonne der Reihe nach mit $\frac{db}{da}$, $\frac{d\vartheta}{da}$, $\frac{d\bar{\vartheta}}{da}$ multipliziert und zu der zweiten addiert und hierbei die Gleichungen

$$F_{x'} - \overline{F}_{x'} = 0, \quad F_{y'} - \overline{F}_{y'} = 0,$$
$$\Gamma = 0$$

berücksichtigt, infolge deren die drei letzten Elemente der zweiten Spalte verschwinden, so erhält man

$$(65) \qquad D = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a \\ \eta_t & \eta_a \end{vmatrix} F_1 \overline{F}_1 \Gamma_b \sin(\overline{\vartheta} - \vartheta).$$

Die letzten Faktoren sind in der Umgebung von $a_0 b_0$ sämtlich endlich und von Null verschieden; die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a \\ \eta_t & \eta_a \end{vmatrix}$$

kann also nur für solche Werte von t verschwinden, für welche $D = 0$ ist. Nun reduzieren sich die zwei ersten Reihen von D für $t = 0$ wegen der Gleichungen (61) auf

$$\begin{matrix} \cos\vartheta & 1 & 0 & 0 & 0, \\ \sin\vartheta & 0 & 1 & 0 & 0, \end{matrix}$$

und hieraus folgt

$$D_{t=0} = F_1 \overline{F}_1 \sin(\vartheta - \overline{\vartheta})(\cos\vartheta\, \Gamma_a^0 + \sin\vartheta\, \Gamma_b^0).$$

Es ist also $\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)}$ für den Punkt 0 von Null verschieden, da

$$\cos\vartheta\, \Gamma_\alpha^0 + \sin\vartheta\, \Gamma_\beta^0 \neq 0$$

ist, d. h. die Kurve $\Gamma = 0$ und die Extremale 10 sich nicht in 0 berühren, was wir vorausgesetzt haben.

Ähnlich kann man für den Teil der Ebene in der Nachbarschaft von 02 verfahren, indem man überall in den Rechnungen ϑ mit $\overline{\vartheta}$ vertauscht. Es seien jetzt t_1 und t_2 zwei Werte, deren absoluter Betrag so klein gewählt ist, daß die Funktion

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(t, a)}_{a = a_0}$$

einerseits und

$$\frac{D(\overline{\xi}, \overline{\eta})}{D(t, a)}_{a = a_0}$$

andererseits für keinen Wert von t, welcher den Intervallen

$$t_1 \leqq t \leqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq t_2$$

angehört, verschwindet. Wir definieren die Punkte 1 und 2 durch die Koordinaten

$$x_1 = \xi(t_1, a_0), \quad y_1 = \eta(t_1, a_0),$$
$$x_2 = \overline{\xi}(t_2, a_0), \quad y_2 = \overline{\eta}(t_2, a_0).$$

Man kann den Kurvenzug 102 durch ein einfach zusammenhängendes Gebiet umgeben, das durch die Kurve $\Gamma = 0$ in zwei Teile geteilt wird,

in welchem die betreffenden Funktionaldeterminanten von Null verschieden sind.

Der eine Teil dieses Gebietes wird durch die Extremalen $1'0'$, der andere durch $0'2'$ einfach, aber auch lückenlos überdeckt, und man kann das so konstruierte Feld dazu benutzen, um das Integral längs 102 mit dem Integrale längs einer willkürlichen Kurve, welche 1 und 2 verbindet, zu vergleichen.

§ 7.

Anwendung der Weierstraßschen Theorie auf starke diskontinuierliche Extremalenstücke.

Wir betrachten jetzt ein Feld, das die gebrochene Kurve 102 umgibt; ein solches ist z. B. das Gebiet, welches durch zwei der Kurve 102 hinreichend benachbarte Extremalenzüge des Feldes $ABCDEF$ und zwei willkürliche reguläre Kurven AD, FC begrenzt wird (Fig. 9).

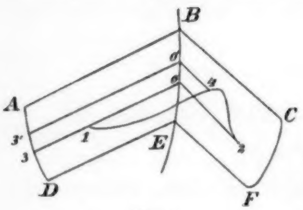

Fig. 9.

Es sei

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \\ \tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2 \end{cases}$$

ein Kurvenstück 142, das ganz innerhalb des Feldes verläuft und die Punkte 1 und 2 verbindet. Diese Kurve braucht nicht analytisch zu sein; sie muß nur eine wohlbestimmte *vordere**) Tangente besitzen und dem Intergrale

$$\mathfrak{J} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\varphi, \psi;\ \varphi', \psi')\,d\tau \tag{66}$$

einen endlichen Wert erteilen.**) Es sei 3 der Punkt, wo die Extremale 01 den Rand des Feldes schneidet Um die Integrale längs der Feldkurve 102 und unserer willkürlichen Kurve 142 zu vergleichen, betrachten wir die Funktion von τ

$$\mathsf{M}(\tau) = J_{3'0'4} + \mathfrak{J}_{42},$$

indem wir mit $\mathfrak{J}$ die Integrale längs der Vergleichskurve, mit J die Integrale längs einer Feldkurve bezeichnen. Es ist

$$\mathsf{M}(\tau_1) = J_{31} + \mathfrak{J}_{142},$$
$$\mathsf{M}(\tau_2) = J_{31} + J_{102},$$

*) Da man in einem ganz bestimmten Sinne, nämlich von 1 nach 2, integriert.
**) Kneser, Lehrbuch, § 17.

folglich

$$J_{102} - \mathfrak{J}_{142} = \mathsf{M}(\tau_2) - \mathsf{M}(\tau_1),$$
$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\mathsf{M}}{d\tau}\, d\tau.$$

Wir nehmen an, daß 4 auf derselben Seite von $\Gamma = 0$ liege wie 02; dann ist

$$\mathsf{M}(\tau) = \int_{t_3'}^{0} F(\xi, \eta; \xi', \eta')\,dt + \int_{0}^{t_4} F(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\xi}' \bar{\eta}')\,dt + \int_{\tau}^{\tau_2} F(\varphi, \psi; \varphi', \psi')\,dt.$$

Hier haben $\xi = \xi(t, a)$, $\eta = \eta(t, a)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t, a)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(t, a)$ dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen, $t_{3'}$ ist eine bestimmte Funktion von a; a und t_4 werden als Funktionen von τ durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \bar{\xi}(t_4; a) = \varphi(\tau), \\ \bar{\eta}(t_4; a) = \psi(\tau) \end{cases}$$

bestimmt.

In der Ableitung $\frac{d\mathsf{M}}{d\tau}$ verschwinden nach der üblichen partiellen Integration die Integrale, und es bleiben nur noch Grenzglieder übrig, die sich auf die Punkte 3′, 0′ und 4 beziehen.

Es ist leicht zu zeigen, daß diejenigen Glieder, die zu 3′ gehören, die Form haben

$$g(a)\,\frac{da}{d\tau},$$

ferner verschwinden die Grenzglieder im Knickpunkte, d. h.

$$\left\{(F_{x'} - \bar{F}_{x'})\,\frac{\partial \xi(0)}{\partial a} + (F_{y'} - \bar{F}_{y'})\,\frac{\partial \eta(0)}{\partial a}\right\} \frac{da}{d\tau},$$

wegen der Erdmannschen Bedingungen; endlich kann man die von 4 herrührenden Grenzglieder folgendermaßen schreiben

$$\left[F(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{\xi}', \bar{\eta}')\,\frac{dt_4}{d\tau} + \left(F_{x'}\,\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial a} + F_{y'}\,\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial a}\right) \frac{da}{d\tau}\right]_{t = t_4} - F(\varphi, \psi; \varphi', \psi');$$

benutzt man noch die Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{\xi}(t_4)}{\partial a}\,\frac{da}{d\tau} + \frac{\partial \bar{\xi}(t_4)}{\partial t}\,\frac{dt_4}{d\tau} = \varphi',$$
$$\frac{\partial \bar{\eta}(t_4)}{\partial a}\,\frac{da}{d\tau} + \frac{\partial \bar{\eta}(t_4)}{\partial \tau}\,\frac{dt_4}{d\tau} = \psi',$$

so erhält man schließlich

$$\frac{d\mathsf{M}}{d\tau} = g(a)\,\frac{da}{d\tau} + F_{x'}(\bar{\xi}', \bar{\eta}')\varphi' + F_{y'}(\bar{\xi}', \bar{\eta}')\psi' - F(\varphi', \psi'),$$
$$= g(a)\,\frac{da}{d\tau} - E(\bar{\xi}', \bar{\eta}'; \varphi', \psi').$$

Diese Funktion hat für diejenigen Punkte der Vergleichskurve, welche zwischen 1 und $\Gamma = 0$ oder auf diese Kurve fallen, genau dieselbe Form; nun verschwindet aber

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} g(a)\,\frac{da}{d\tau}\,d\tau,$$

da a für beide Punkte 1 und 2 denselben Wert annimmt; es gilt also die Gleichung

$$\mathfrak{J}_{142} - J_{102} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} E(\xi', \eta';\, \varphi', \psi')\,d\tau, \tag{67}$$

indem wir jetzt mit ξ', η' die fortschreitende Richtung längs der Feldkurve bezeichnen.

Das Vorhandensein des Knickpunktes ändert also keineswegs die E-Funktion, und es läßt sich ihre Theorie auf diskontinuierliche Lösungen direkt übertragen. Diese Theorie beruht darauf, daß E verschwindet, wenn die Fortschreitungsrichtung der Feldkurve und der Vergleichskurve zusammenfallen, und ein festes Vorzeichen hat, wenn diese Richtungen hinreichend wenig voneinander abweichen; E und F_1 haben dann dasselbe Vorzeichen.

Wenn das Feld aus lauter diskontinuierlichen *starken* Extremalen besteht, so kann die Größe E nur auf Punkten der Kurve $\Gamma = 0$ außerordentlich verschwinden.

Die Vergleichskurve

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau)$$

hat aber nach unseren Annahmen in jedem Punkte eine vordere Tangente. Hieraus folgt, daß die Punkte τ_i, für welche die Größe $E(\xi', \eta'; \varphi', \psi')$ außerordentlich verschwindet, eine Menge bilden, die links isoliert ist. Wenn nämlich τ' einen Häufungspunkt der Menge τ_i darstellt, und für jedes positive ε unendlich viele Punkte der Menge zwischen τ' und $\tau' + \varepsilon$ liegen, so fällt im Punkte τ' die vordere Tangente der Vergleichskurve mit der Tangente der Kurve $\Gamma = 0$ zusammen; in diesem Punkte kann also E nicht außerordentlich verschwinden, der Punkt τ' gehört also der Punktmenge τ_i nicht an.

Wenn also die Größe (67) Null sein soll, so muß die Vergleichskurve aus lauter Stücken bestehen, innerhalb deren die E-Funktion ordentlich verschwindet. Jedes solche Stück ist aber mit einem Stücke einer Feldkurve identisch; der Beweis ist genau so zu führen, wie Weierstraß ihn für kontinuierliche Lösungen aufgestellt hat.*)

*) cf. Kneser, Lehrbuch, pag. 40.

Die Feldkurven überdecken das Feld in eindeutiger Weise und die einzige Feldkurve, die den Punkt 1 enthält, ist die Extremale 102. Für jede andere Kurve, welche 1 mit 2 verbindet und das Feld nicht verläßt, ist also

$$\mathfrak{J}_{142} - J_{102} + 0.$$

§ 8.

Das Büschel der starken Extremalen durch einen Punkt.

Ehe wir jetzt den Osgoodschen Satz in einer für unsere Anwendungen brauchbaren Form ableiten, ist es notwendig, einige weitere Eigenschaften der Felder von starken Extremalen aufzustellen. Wir werden einerseits zeigen, daß sich jeder reguläre Punkt P mit einem Felde von starken Extremalen umgeben läßt, die sämtlich von diesem Punkte ausgehen und das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkte P und dem Radius ϱ ausfüllen. Andererseits, daß für sämtliche Punkte eines regulären Gebietes T (d. h. eines solchen, das lauter reguläre Punkte enthält) *dieselbe* Größe ϱ gewählt werden kann.

Die Konstruktion des erwähnten Feldes ist sehr einfach; man betrachtet sämtliche Extremalen, die von P ausgehen und im Anfange ihres Verlaufes stark sind, schneidet sie an der Stelle ab, wo sie aufhören stark zu sein, und ergänzt das auf diese Weise erhaltene partielle Feld durch den anderen Zweig der starken diskontinuierlichen Lösung, die an dieser Stelle geknickt ist.

Der Beweis, daß man durch diese Operationen Felder konstruiert, welche sämtliche oben erwähnten Eigenschaften besitzen, erfordert einige Vorbereitungen.

Es sei T_0 ein perfektes Gebiet der xy-Ebene; für jeden Punkt dieses Gebietes soll die zugehörige Indikatrix die Eigenschaften a), b) und c) besitzen, die wir in § 5 (pag. 466) benutzt haben; außerdem soll noch die Invariante $\Omega(x, y)$ von Null verschieden sein.

Dann gibt es, wie wir damals sahen, in jedem Punkte x, y von T_0 zwei Richtungen, die mit der x-Axe die Winkel ϑ und $\bar{\vartheta}$ bilden, und die man derart wählen kann, daß

$$(68) \qquad 0 < \bar{\vartheta} - \vartheta < \pi$$

ist, und daß ferner den Richtungen

$$(69) \qquad \begin{cases} \varphi = \vartheta + \lambda(\bar{\vartheta} - \vartheta) \\ \quad 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

schwache, dagegen den Richtungen

$$(70)\qquad \begin{cases} \psi = \bar{\vartheta} + \lambda(2\pi + \vartheta - \bar{\vartheta}) \\ \qquad 0 < \lambda < 1 \end{cases}$$

starke Extremalen entsprechen.

Die Größen ϑ und $\bar{\vartheta}$ genügen den Gleichungen (46) und sind daher im ganzen Gebiete T_0 stetige Funktionen von x und y; das gleiche gilt folglich von der Größe $(\bar{\vartheta} - \vartheta)$ und es folgt aus (68), daß für jeden Punkt von T_0

$$(71)\qquad 0 < h \leqq \bar{\vartheta} - \vartheta \leqq H < \pi$$

ist, wo h und H bestimmte Konstanten bedeuten.

Es ist ferner für sämtliche Werte ψ, die man erhält, indem man in (70)

$$0 \leqq \lambda \leqq 1$$

macht, das Minimum der Größe

$$F_1(x, y;\ \cos\psi, \sin\psi)$$

positiv. Wir führen jetzt zwei neue Richtungen

$$(72)\qquad \begin{cases} \vartheta' = \vartheta + 4\varepsilon', \\ \bar{\vartheta}' = \bar{\vartheta} - 4\varepsilon' \end{cases}$$

ein, die mit ϑ und $\bar{\vartheta}$ den konstanten Winkel $4\varepsilon'$ machen (Fig. 10), und wählen dabei die positive Konstante ε' so klein, daß im ganzen Gebiete T_0 einerseits

$$(73)\qquad \bar{\vartheta}' - \vartheta' = (\bar{\vartheta} - \vartheta) - 8\varepsilon' \geqq h - 8\varepsilon' > 0$$

sei, und andererseits für sämtliche Richtungen

$$(74)\qquad \begin{cases} \psi' = \bar{\vartheta}' + \lambda(2\pi + \vartheta' - \bar{\vartheta}') \\ \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \end{cases}$$

die Beziehung

$$(75)\qquad F_1(x, y;\ \cos\psi', \sin\psi') \geqq m > 0$$

gelte.

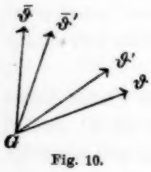

Fig. 10.

Es seien jetzt P_1 und P_2 irgend zwei Punkte des Gebietes T_0; man bezeichne mit ϑ_1, $\bar{\vartheta}_1$ und ϑ_2, $\bar{\vartheta}_2$ die Werte von ϑ und $\bar{\vartheta}$ in diesen Punkten; dann gibt es wegen der Stetigkeit dieser zwei letzten Größen eine für das ganze Gebiet T_0 gültige Konstante δ, so daß die Beziehungen

$$(76)\qquad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq 2\varepsilon', \quad |\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2| \leqq 2\varepsilon'$$

gelten, sobald die Entfernung

$$P_1 P_2 \leqq \delta$$

ist. Wir führen jetzt die neuen Bezeichnungen

$$(77)\quad \begin{cases} \vartheta'' = \vartheta + \varepsilon', \quad \bar{\vartheta}'' = \bar{\vartheta} - \varepsilon', \\ \psi'' = \bar{\vartheta}'' + \lambda(2\pi + \vartheta'' - \bar{\vartheta}'') \\ 0 \leqq \lambda \leqq 1 \end{cases}$$

und durch eine Translation und eine Drehung neue Veränderliche ξ, η ein; der neue Anfangspunkt der Koordinaten liege in einem Punkte des Gebietes T_0 und eine den Beziehungen (77) genügende Richtung ψ'' sei zur positiven Richtung der ξ-Achse gewählt. Sämtliche Richtungselemente, welche dem Gebiete T_0 angehören und die Ungleichheiten

$$|\xi| \leqq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad |\eta| \leqq \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad \left|\frac{d\eta}{d\xi}\right| \leqq \operatorname{tg} \varepsilon'$$

befriedigen, genügen dann der Beziehung (74), und für diese Linienelemente ist in den alten Veränderlichen x, y die Größe

$$(78)\qquad F_1 \geqq m > 0.$$

Nach diesen Vorbemerkungen gelingt es, die Methode anzuwenden, die Bliss in Bd. V der „Transactions of the American Mathematical Society“ (pag. 113) benutzt hat.

Diese Methode beruht darauf, nach Einführung der neuen Koordinaten ξ und η auf die transformierte Lagrangesche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right)$$

das Schwarz-Picardsche Verfahren der sukzessiven Approximation anzuwenden, wie es für diesen speziellen Fall im Traité d'Analyse des Herrn Picard*) zur Bestimmung von Lösungen mit vorgeschriebenen Anfangs- und Endwerten entwickelt ist.

Die Ungleichheit (78) erlaubt, einerseits — für das ganze Gebiet T gültige — obere Grenzen von $|f|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|$ und $\left|\frac{\partial f}{\partial \eta'}\right|$ aufzustellen, wie sie für den Picardschen Konvergenzbeweis notwendig sind, andererseits eine maximale endliche Krümmung für sämtliche betrachtete Extremalen zu bestimmen. Dieser letzte Umstand erlaubt (wie Bliss, l. c. p. 118 ausführlich bewiesen hat), sämtliche Extremalenstücke, deren Anfangs- und Endpunkte hinreichend nahe an einander und auf einer Geraden liegen, welche den Winkel ψ'' mit der x-Achse macht (wo ψ'' den Bedingungen (77) genügt), mit denjenigen zu identifizieren, die man durch das Approximationsverfahren erhält.

Indem man den Beweis von Bliss Schritt für Schritt verfolgt, wofür wir auf die zitierte Arbeit verweisen, erhält man folgendes Resultat:

*) Tome III, p. 94.

Es sei mit T ein Gebiet bezeichnet, das vollständig im Inneren des Gebietes T_0 liegt, und mit ε eine beliebige positive Konstante, welche der Bedingung

$$\varepsilon < \varepsilon'$$

genügt. Es existiert dann eine positive Konstante ϱ_0, für welche folgender Satz gilt:

Wenn $P_1(x_1, y_1)$ ein Punkt des Gebietes T ist, und x_2, y_2 die Koordinaten eines zweiten Punktes P_2 sind, die den Bedingungen

$$\text{(79)} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + \varrho \cos\psi, \quad y_2 = y_1 + \varrho \sin\psi, \\ \psi = \bar{\vartheta}_1 - \varepsilon + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1 + 2\varepsilon) \\ \qquad \varrho \leqq \varrho_0, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \end{cases}$$

genügen*), so gibt es ein reguläres Extremalenstück $e_{P_1}^{P_2}$, welches vom Punkte P_1 ausgeht und den Punkt P_2 enthält. Diese Kurve ist die *einzige*, welche, der Lagrangeschen Differentialgleichung genügend, gänzlich innerhalb des Sektors

$$\text{(80)} \qquad \begin{cases} x = x_1 + \varrho \cos\psi, \\ y = y_1 + \varrho \sin\psi, \\ \psi = \bar{\vartheta}_1 - 2\varepsilon + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1 + 4\varepsilon) \\ 0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \end{cases}$$

verläuft, und deren Tangenten mit der positiven x-Axe einen Winkel bilden, der denselben Bedingungen wie ψ in (80) unterworfen ist; diese Tangenten drehen sich ferner kontinuierlich, wenn man $e_{P_1}^{P_2}$ beschreibt, und bilden mit der Geraden P_1P_2 einen Winkel, der überall kleiner als ε ist.

Wenn man die Länge s dieser Extremalen, vom Punkte P_1 aus gemessen, als unabhängige Variabeln einführt, so nehmen die Gleichungen der Kurve die Form an

$$\text{(81)} \qquad \begin{cases} x = g(s;\, x_1, y_1;\, \varrho, \psi), \\ y = h(s;\, x_1, y_1;\, \varrho, \psi), \\ s_1 = k(x_1, y_1;\, \varrho, \psi); \end{cases}$$

$g, h, k, \frac{dg}{ds}, \frac{dh}{ds}, \frac{d^2g}{ds^2}, \frac{d^2h}{ds^2}$ und die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen nach x_1, y_1, ϱ, ψ sind eindeutige und kontinuierliche Funktionen ihrer fünf resp. vier Argumente, wenn

$$0 \gtreqless s \leqq s_1$$

ist, x_1, y_1 die Koordinaten eines Punktes von T bezeichnen, und sowohl ϱ wie ψ die Bedingungen (79) befriedigen; man hat übrigens

*) ϑ_1, $\bar{\vartheta}_1$ haben dieselbe Bedeutung wie in (76).

$$g(s_1;\ x_1, y_1;\ \varrho, \psi) = x_1 + \varrho \cos\psi,$$
$$h(s_1;\ x_1, y_1;\ \varrho, \psi) = y_1 + \varrho \cos\psi.$$

Aus der Tatsache, daß die Entfernung des Punktes $P(x, y)$ eines gegebenen Extremalenstückes monoton mit s wächst, wenn die Größen s, x_1, y_1, ϱ, ψ innerhalb der erlaubten Grenzen liegen, folgt, daß dieses Extremalenstück jeden Kreis $\varrho \leqq \varrho_0$ höchstens in einem Punkte schneiden kann; so daß, wenn man umgekehrt in den Formeln (81) ϱ festhält, die Tangentenrichtung der Extremalen im Anfangspunkte P_1 monoton mit ψ wachsen muß.

Die Richtungen ϑ_1, $\bar{\vartheta}_1$ liegen im *Inneren* des Sektors, der durch (79) bestimmt ist; man wird folglich eine Konstante $\varrho_1 \leqq \varrho_0$ derart wählen können, daß die Extremalen e und $\bar{e}$ (Fig. 11), die im Punkte P_1 die Tangentialrichtungen ϑ_1 und $\bar{\vartheta}_1$ besitzen, für sämtliche Werte von $\varrho \leqq \varrho_1$ mit den geradlinigen Stücken des Randes P_1A und P_1C keinen Punkt gemeinsam haben. Es seien dagegen E und $\bar{E}$ die Schnittpunkte dieser Extremalen mit dem Kreise $\varrho = \varrho_1$, der in der Fig. 11 mit $A\bar{E}BEC$ bezeichnet ist.

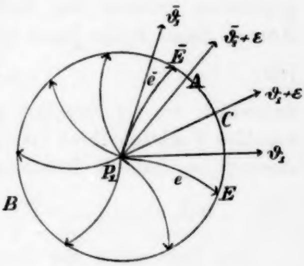

Fig. 11.

Der Sektor $P_1\bar{E}BEP_1$ wird eindeutig und lückenlos durch ein Büschel von Extremalen überdeckt, deren Anfangspunkt in P_1 liegt und die sämtlich auf dem Kreisbogen $\bar{E}BE$ endigen, wie in der Figur angedeutet ist; diese Extremalen bilden ein Feld, das ich mit $\mathfrak{F}_1$ bezeichne. Jede Extremale, die im Punkte P_1 einen Winkel

$$\begin{cases} \psi_1 = \bar{\vartheta}_1 + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1), \\ \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1 \end{cases}$$

mit der positiven x-Achse macht, gehört dem Felde $\mathfrak{F}_1$ an. Von den zwei Extremalenstücken P_1E und $P_1\bar{E}$, welche im Punkte P_1 den Winkeln ϑ_1 und $\bar{\vartheta}_1$ entsprechen und in diesem Punkte eine diskontinuierliche Lösung bilden, ist das eine, z. B. P_1E, stark in der Nähe von P_1, während das andere bei dem Durchgange durch diesen Punkt schwach geworden ist.

Dieses folgt aus unserem Satze über die Vertauschung der starken Extrema wegen unserer Annahme $\Omega(x, y) \neq 0$ im Gebiete T. Wenn wir aber von der Extremale $\bar{e}$ absehen, so sind sämtliche übrigen Kurven des Feldes in der Nähe von P_1 stark.

Wir schneiden, wie wir schon oben sagten, diese sämtlichen Extremalen an dem Punkte ab, wo sie aufhören stark zu sein, und erhalten ein neues Feld $\mathfrak{F}_2$, das aus lauter starken Extremalen besteht.

Um den Rand dieses neuen Feldes zu ermitteln, betrachten wir wieder die Kurvenschar $\overline{C}$, die wir in § 5, pag. 470 eingeführt haben. Die Extremalen des Feldes $\mathfrak{F}_1$ werden aufhören stark zu sein in den Punkten, wo sie die Kurven $\overline{C}$ berühren. Der Ort dieser Punkte wird eine Kurve $\overline{d}$ sein, die, wie wir sehen werden, den Punkt P_1 enthält, in diesem Punkte die Extremale $\overline{e}$ berührt, in der Nähe dieses Punktes regulär ist und im Inneren des Feldes $\mathfrak{F}_1$ verläuft. Diese drei letzten Eigenschaften kommen übrigens auch der Kurve $\overline{C}_1$ der Schar $\overline{C}$ zu, die durch den Punkt P_1 geht, wie aus den Entwicklungen des § 5 zu ersehen ist.

Wir führen neue rechtwinkelige Koordinaten ξ, η ein, deren Anfangspunkt in den Punkt P_1 fällt, und die derart orientiert sind, daß die positive Richtung der ξ-Achse den Winkel $\overline{\vartheta}_1$ mit der positiven x-Achse bildet, die ξ-Achse also die Kurven $\overline{e}$ und $\overline{C}_1$ im Punkte P_1 berührt. Die Koeffizienten, welche diese Koordinatentransformation vermitteln, sind reguläre Funktionen von x_1 und y_1.

Da nun die Kurvenschar $\overline{C}$ eine Lösung des durch (42) und (46) gegebenen Systems von Differentialgleichungen ist, so kann man die Kurven dieser Schar durch eine Gleichung

(82) $$\eta = \varphi(\xi, \mu;\ x_1, y_1)$$

darstellen, wo die Funktion φ in der Umgebung von $\xi = 0$, $\mu = 0$ eine reguläre Funktion ihrer vier Argumente ist und für $\mu = 0$ die Kurve $\overline{C}_1$ darstellt, so daß die Beziehungen gelten:

(83) $$\varphi(\xi, \mu)_{\xi=0,\,\mu=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_{\xi=0,\,\mu=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)_{\xi=0,\,\mu=0} = 1.$$

Die Extremalen des Feldes $\mathfrak{F}_1$ werden ferner in den neuen Koordinaten mit Hilfe der Gleichungen (81) durch die Gleichung

(84) $$\eta = \psi(\xi, \nu;\ x_1, y_1)$$

dargestellt, und ψ ist in der Umgebung von $\xi = 0$, $\nu = 0$ ebenfalls regulär; man kann ferner durch geeignete Wahl des Parameters ν erreichen, daß

(85) $$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = \nu$$

ist, d. h. daß ν den Winkel bedeutet, den die Tangente der Extremale (84) im Punkte P_1 mit der ξ-Achse macht.

Da sämtliche Extremalen des Büschels durch P_1 gehen, ist auch

(86) $$\psi(\xi, \nu)_{\xi=0} = 0.$$

Die Kurve $\overline{d}$ wird, als Ort derjenigen Punkte, wo die Extremalen des Feldes die Kurven der Schar $\overline{C}$ berühren, durch Einsetzen derjenigen Werte von μ und ν in (82) und (84) erhalten, die das System

$$(87)\qquad \begin{cases} \varphi(\xi,\mu)=\psi(\xi,\nu), \\ \dfrac{\partial\varphi(\xi,\mu)}{\partial\xi}=\dfrac{\partial\psi(\xi,\nu)}{\partial\xi} \end{cases}$$

befriedigen.

Nun hat man wegen (83), (85) und (86)

$$(88)\qquad \begin{cases} \varphi(\xi,\mu)=\mu+\frac{1}{2}a_{02}\xi^2+a_{11}\xi\mu+\frac{1}{2}a_{20}\mu^2+(\xi,\mu)_3, \\ \psi(\xi,\nu)=\frac{1}{2}b_{02}\xi^2+\xi\nu+(\xi,\nu)_3,\text{*)} \end{cases}$$

so daß die Gleichungen (87) die Form nehmen

$$(89)\qquad \begin{cases} \mu+\frac{1}{2}a_{02}\xi^2+a_{11}\xi\mu+\frac{1}{2}a_{20}\mu^2+(\xi,\mu)_3=\frac{1}{2}b_{02}\xi^2+\xi\nu+(\xi,\nu)_3, \\ a_{02}\xi+a_{11}\mu+(\xi,\mu)_2=b_{02}\xi+\nu+(\xi,\nu)_2. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung kann man nach ν auflösen; es kommt

$$(90)\qquad \nu=(a_{02}-b_{02})\xi+a_{11}\mu+(\xi,\mu)_2,$$

und dieser Wert von ν in die erste der Gleichungen (89) eingesetzt liefert

$$\mu+\frac{1}{2}a_{02}\xi^2+\frac{1}{2}a_{20}\mu^2+(\xi,\mu)_3=\frac{1}{2}b_{02}\xi^2+(a_{02}-b_{02})\xi^2+(\xi,\mu)_3,$$

woraus man

$$(91)\qquad \mu=\frac{1}{2}(a_{02}-b_{02})\xi^2+(\xi)_3$$

und mit Hilfe von (90)

$$(92)\qquad \nu=(a_{02}-b_{02})\xi+(\xi)_2$$

erhält. Diese Werte (91) und (92) von μ und ν in (88) eingesetzt, liefern für die Kurve $\bar{d}$ die Gleichung

$$(93)\qquad \eta=\frac{1}{2}(2a_{02}-b_{02})\xi^2+(\xi)_3=\chi(\xi).$$

Diese Kurve ist also in der Umgebung von $\xi=0$ regulär; um nun zu zeigen, daß sie im Inneren des Feldes $\mathfrak{F}_1$ verläuft, wollen wir die Krümmungen $\bar{\tau}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\varrho}$ von $\bar{e}$, $\bar{C}$ und $\bar{d}$ im Punkte P_1 vergleichen.

Da diese drei Kurven im Punkte P_1 die ξ-Achse berühren, so wird man haben

$$\bar{\tau}=\left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\right)_{\xi=0,\,\nu=0}=b_{02},$$

$$\bar{\sigma}=\left(\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}\right)_{\xi=0,\,\mu=0}=a_{02},$$

$$\bar{\varrho}=\left(\frac{d^2\chi}{d\xi^2}\right)_{\xi=0}=2a_{02}-b_{02}.$$

*) Die Koeffizienten a, b sind reguläre Funktionen von x_1, y_1.

Hieraus zieht man

(94) $$\bar{\varrho} - \bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \bar{\tau} = a_{02} - b_{02}.$$

Nun ist nach (54) pag. 472

(95) $$\bar{\sigma} - \bar{\tau} = \frac{\Omega(x_1, y_1)}{\bar{F}_1 \sin(\bar{\vartheta}_1 - \vartheta_1)} \neq 0,$$

folglich $(a_{02} - b_{02})$ von Null verschieden. Die Kurve $\bar{C}_1$ liegt also *zwischen* $\bar{e}$ und $\bar{d}$ (Fig. 12); da nun schon $\bar{C}_1$, wie wir sagten, im Inneren des Feldes $\mathfrak{F}_1$ verläuft, so ist dies auch für $\bar{d}$ richtig.

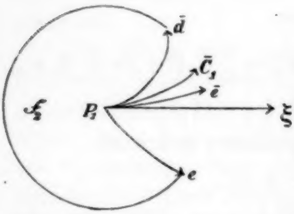

Fig. 12.

Aus der Tatsache, daß $(a_{02} - b_{02}) \neq 0$ ist, folgt nun weiter, daß man die Gleichung (92) nach ξ auflösen kann, daß also die Koordinaten ξ und η der Punkte von $\bar{d}$ sich in der Umgebung von $\nu = 0$ als eindeutige reguläre Funktionen von ν darstellen lassen. Die Größe ν wählten wir aber gleich der Tangente des Winkels, den die Anfangsrichtung der Extremalen

$$\eta = \psi(\xi, \nu)$$

mit der Richtung $\bar{\vartheta}_1$ der ξ-Achse macht, sie ist also eineindeutig auf die Extremalen des Feldes $\mathfrak{F}_1$ bezogen. Jeder Extremalen des Feldes $\mathfrak{F}_1$ in einer gewissen Umgebung von $\bar{e}$ entspricht also ein einziger Punkt von $\bar{d}$; da nun aber $\bar{d}$ innerhalb des Feldes $\mathfrak{F}_1$ verläuft und jeder Punkt von $\mathfrak{F}_1$ eine einzige Extremale enthält, so sehen wir, daß die Beziehung der Kurve $\bar{d}$ zu den Extremalen des Feldes eine eineindeutige ist.

Wenn wir ferner beachten, daß

$$\left(\frac{d}{d\nu}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)_{\nu=0} = \left(\frac{d\xi}{d\nu}\right)_{\nu=0} = \frac{1}{a_{02} - b_{02}} > 0$$

ist, und daß die Koeffizienten von $\chi(\xi)$ in der Gleichung (93) stetige Funktionen von x_1 und y_1 sind, so können wir sagen:

Es gibt eine für das ganze Gebiet T gültige Konstante N von der Eigenschaft, daß für sämtliche Werte

$$\nu \leqq N$$

die Kurve $\bar{d}$, welche irgend einem Punkte von T entspricht, regulär und auf die Extremalen des Feldes $\mathfrak{F}_1$ eineindeutig bezogen ist; daß ferner für die Koordinaten $\xi(N)$, $\eta(N)$ desjenigen Punktes dieser Kurve, der dem Werte $\nu = N$ entspricht, die Beziehung gilt

$$\xi(N)^2 + \eta(N)^2 \geqq \mathsf{P},$$

wo P wieder eine für das ganze Gebiet T geltende Konstante bedeutet.

Man kann hierbei N so klein wählen, daß die Größe

$$\xi(\nu)^2 + \eta(\nu)^2$$

monoton mit ν wächst, wenn diese letzte Größe das Intervall $0 \leqq \nu \leqq N$ beschreibt.

Führt man die positive, von Null verschiedene Größe

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} N < \frac{\pi}{2}$$

ein, so sind für sämtliche Punkte P_1 des perfekten Gebietes T die Extremalen mit den Anfangsrichtungen

$$\psi = \bar{\vartheta}_1 + \varepsilon + \lambda(2\pi + \vartheta_1 - \bar{\vartheta}_1 - \varepsilon),$$
$$0 \leqq \lambda \leqq 1$$

starke Extremalen im Punkte P_1 und werden für diejenigen Punkte des Feldes $\mathfrak{F}_1$, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius ϱ_2 liegen, ebenfalls stark sein; für ϱ_2 kann eine für das ganze Gebiet T geltende Konstante gewählt werden, die der Bedingung

$$0 < \varrho_2 \leqq \mathsf{P} \leqq \varrho_1$$

genügt.

Fassen wir diese sämtlichen Ergebnisse zusammen, so sehen wir, daß wir in der Umgebung jedes Punktes von T ein Feld $\mathfrak{F}_2$ konstruieren können, das durch die Kurve $\bar{d}$, den Kreis mit dem Radius ϱ_2 und die Extremale e begrenzt wird (Fig. 13).

In jedem Punkte des Inneren von $\mathfrak{F}_2$ sind die Extremalen stark und die Punkte von $\bar{d}$ sind Knickpunkte dieser Extremalen.

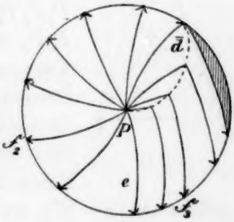

Fig. 13.

Wenn wir jetzt zu den Ergebnissen des § 6 zurückgreifen, indem wir die dort vorkommende Kurve $\mathsf{\Gamma} = 0$ durch unsere Kurve $\bar{d}$ ersetzen, so sehen wir, daß der zweite Zweig der in $\bar{d}$ gebrochenen diskontinuierlichen Lösungen die Umgebung des Extremalenstückes e eindeutig und lückenlos überdeckt.

Da ferner die Kurve $\bar{d}$ im Punkte P_1 die Extremale e nicht berührt, sondern diese zwei Kurven einen Winkel bilden, der nach (71), pag. 482, größer als die positive Größe h ist, so ist die der Determinante (63) entsprechende Funktionaldeterminante für den Punkt P_1 von Null verschieden. Nun ist aber diese Größe eine kontinuierliche Funktion von x_1 und y_1, also können wir wieder die Existenz einer positiven Konstante

$$\varrho_3 \leqq \varrho_2$$

feststellen, mit der Eigenschaft, daß die zweiten Zweige der starken diskontinuierlichen Lösungen, die wir betrachten, den von $\mathfrak{F}_2$ nicht über-

deckten Sektor eines Kreises mit dem Radius ϱ_3 lückenlos ausfüllen. Diese Kurven bilden folglich ein Feld, das wir mit $\mathfrak{F}_3$ bezeichnen.

Die Felder $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_3$ liegen außerhalb voneinander und bilden zusammen ein Feld $\mathfrak{F}$ von starken Extremalen, die sämtlich durch P_1 gehen und das Innere des Kreises mit dem Radius ϱ_3 eindeutig und lückenlos ausfüllen. Hiermit ist die am Anfang dieses Paragraphen aufgestellte Behauptung erwiesen.

§ 9.

Der Osgoodsche Satz.

Das kreisförmige Feld $\mathfrak{F}$, das wir konstruiert haben, ist nicht derart, daß man jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ mit dem Mittelpunkte des Kreises durch eine Extremale verbinden kann, die *vollständig im Inneren* des Kreises verläuft.*) Diese Eigenschaft besteht aber, wie wir jetzt zeigen wollen, wenn wir den Endpunkt des betrachteten Extremalenstückes hinreichend nahe an P_1 wählen.

Es genügt offenbar, diesen Satz für diskontinuierliche Lösungen zu bestätigen. Wenn man die Größe ϱ_2, die wir im vorigen Paragraphen betrachteten, kleiner als $\frac{\varrho_1}{2}$ wählt, so macht nach dem Blissschen Resultate (pag. 484) die Tangente in einem beliebigen Punkte der Zweige einer der diskontinuierlichen Lösungen $P_1P_0P_2$ (Fig. 14) des Feldes $\mathfrak{F}$ mit den geraden Linien P_1P_0 und P_0P einen Winkel, der kleiner als ε ist. Der Kurvenzug $P_1P_0P_2$ liegt also vollständig im Inneren eines Dreiecks P_1AP_2, dessen Seiten P_1A und P_2A mit den Geraden P_1P_0 und P_0P_2 den Winkel ε machen. Außerdem ist der Winkel, den die Zweige der diskontinuierlichen Lösung am Knickpunkte machen, nach Fig. 6 immer größer als $(\pi - H)$, wo H dieselbe Bedeutung hat wie in der Formel (71), pag. 482. Hieraus folgt nach Fig. 14

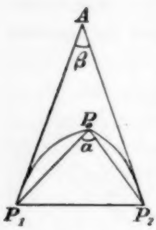

Fig. 14.

$$\alpha \geqq (\pi - H - 2\varepsilon), \quad \beta \geqq (\pi - H - 4\varepsilon);$$

die Größe β ist positiv, wenn man ε hinreichend klein gewählt hat.

Man kann also eine Größe $\varkappa < 1$ angeben mit der Eigenschaft, daß sämtliche Extremalenzüge des Feldes $\mathfrak{F}$, deren Endpunkt vom Anfangspunkte um weniger als ϱ entfernt ist, innerhalb eines Kreises verlaufen, dessen Mittelpunkt in P_1 liegt und dessen Radius gleich $\frac{\varrho}{\varkappa}$ ist.

Bedeutet jetzt P einen beliebigen Punkt des Gebietes T und Q einen Punkt, dessen Entfernung vom ersten

*) Man vergleiche die Fig. 13.

$$PQ \leqq \frac{\varkappa^2 \varrho_3}{4}$$

ist, so liegt die Extremale e_P^Q im Inneren eines Kreises mit dem Radius $\frac{\varkappa \varrho_3}{4}$, dessen Mittelpunkt in P liegt:

$$e_P^Q \prec \left(P, \frac{\varkappa \varrho_3}{4}\right). \tag{96}$$

Es sei S ein beliebiger Punkt dieses Kreises und L eine willkürliche Kurve, die innerhalb desselben Kreises verläuft, P mit Q verbindet und S enthält. Es ist also

$$PS \leqq \frac{\varkappa \varrho_3}{4}, \quad L_P^Q \prec \left(P, \frac{\varkappa \varrho_3}{4}\right). \tag{97}$$

Wir wollen den Wert des Integrals

$$L_P^Q = L_P^S + L_S^Q,$$

längs L genommen, mit e_P^Q vergleichen.

Da S sich im Inneren des Kreises $\left(P, \frac{\varkappa \varrho_3}{4}\right)$ befindet, so existiert eine Extremale e_P^S, für welche die Beziehung gilt

$$e_P^S \prec \left(P, \frac{\varrho_3}{4}\right). \tag{98}$$

L_P^S genügt vermöge (97) derselben Bedingung; die Weierstraßsche Konstruktion mittels der E-Funktion ist also möglich und man hat

$$e_P^S \leqq L_P^S. \tag{99}$$

Ferner ist die Entfernung der zwei Punkte S und Q

$$SQ \leqq SP + PQ \leqq \frac{\varkappa \varrho_3}{4} + \frac{\varkappa^2 \varrho_3}{4} < \frac{\varkappa \varrho_3}{2}.$$

Also existiert die starke Extremale e_S^Q und sie genügt der Bedingung

$$e_S^Q \prec \left(S, \frac{\varrho_3}{2}\right). \tag{100}$$

Für das Stück L_S^Q der Vergleichskurve erhält man nun

$$L_S^Q \prec \left(P, \frac{\varkappa \varrho_3}{4}\right) \prec \left(S, \frac{\varkappa \varrho_3}{4} + SP\right) \prec \left(S, \frac{\varkappa \varrho_3}{2}\right).$$

Da sowohl e_S^Q wie auch L_S^Q innerhalb des Kreises $\left(S, \frac{\varrho_3}{2}\right)$ liegen, ist auch hier wieder die Weierstraßsche Konstruktion möglich, und man erhält

$$e_S^Q \leqq L_S^Q. \tag{101}$$

Aus (100) erhält man weiter

$$e_S^Q \prec \left(P, \frac{\varrho_3}{2} + SP\right) \prec \left(P, \frac{3\varrho_3}{4}\right). \tag{102}$$

Der Kurvenzug $e_P^S + e_S^Q$ verläuft also wegen (98) und (102) ebenso wie auch die Extremale e_P^Q innerhalb des Kreises (P, ϱ_3) und die Weierstraßsche Konstruktion liefert

$$e_P^S + e_P^Q - e_P^Q = \varepsilon(S, Q) \geqq 0.$$

Die Größe $\varepsilon(S, Q)$ ist immer positiv und verschwindet dann und nur dann, wenn S sich auf der Extremalen e_P^Q befindet.

Durch Heranziehen von (99) und (101) erhält man endlich

$$L_P^Q - e_P^Q \geqq \varepsilon(S, Q) \geqq 0.$$

Den hiermit bewiesenen Osgoodschen Satz kann man etwas allgemeiner folgendermaßen formulieren:

Ist P_1 ein Punkt der xy-Ebene, für welchen eine einzige starke diskontinuierliche Lösung existiert und die Invarianten Ψ und Ω nicht verschwinden, so kann man zwei perfekte Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ bestimmen, die ineinander enthalten sind, P_1 umgeben — also den Beziehungen

$$\mathfrak{G}_1 > \mathfrak{G}_2 > P_1$$

genügen — und folgende Eigenschaften besitzen:

1. *Jeder Punkt P_2 des Gebietes $\mathfrak{G}_1$ kann und zwar auf eine einzige Weise mit P_1 durch eine starke Extremale verbunden werden, die das Gebiet $\mathfrak{G}_2$ nicht verläßt.*

2. *Ist S ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G}_2$, der nicht auf dem Extremalenstück $e_{P_1}^{P_2}$ liegt, so kann man ihm eine von Null verschiedene Zahl $\varepsilon(P_2, S)$ zuordnen; der Wert des Integrals J längs einer beliebigen Kurve, die vollständig innerhalb $\mathfrak{G}_2$ verläuft, P_1 mit P_2 verbindet und S enthält, ist um mindestens $\varepsilon(P_2, S)$ größer als der Wert von J, längs des Extremalenstückes $e_{P_1}^{P_2}$ genommen.*

3. *Ist T_0 ein perfektes Gebiet von lauter regulären Punkten des Variationsproblems, und T ein Gebiet derselben Beschaffenheit, das vollständig im Inneren von T_0 sich befindet, so kann man, wenn P_1 das Gebiet T durchläuft, für $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ Kreisflächen wählen, deren Radius fest ist und deren Mittelpunkt in P_1 liegt.*

Die Kurven, welche die Extremalen des Büschels transversal schneiden, sind geschlossene Kurven D, deren Tangente sich *kontinuierlich* dreht, wenn man die Kurve beschreibt. Sie bilden eine Schar von ineinanderliegenden Kurven, die in bezug auf unser Variationsproblem den Charakter einer Schar von konzentrischen geodätischen Kreisen besitzt. Wählt man in dem eben ausgesprochenen Satze $\mathfrak{G}_1$ derart, daß der Rand dieses Gebietes mit einer der Kurven D zusammenfällt, so ist $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathfrak{G}_2$ identisch und

der Osgoodsche Satz vereinfacht sich in entsprechender Weise. Man kann übrigens für jeden Punkt P des Gebietes T diese Kurve D so wählen, daß das Minimum ihrer Entfernung von P in gewöhnlicher Maßbestimmung eine Konstante überschreitet.

Den Nachweis dieser sämtlichen Tatsachen, der übrigens sehr nahe liegt, will ich nicht bringen, weil die Eigenschaften der Kurven D im folgenden nirgends gebraucht werden.

Kapitel II.

Die allerkürzesten Wege innerhalb eines gegebenen Gebietes.

§ 10.

Die Existenz einer Grenzkurve.

Das Hilbertsche Verfahren, das wir in der Einleitung erwähnt haben, ist eine Anwendung des von E. Zermelo ausdrücklich formulierten „Auswahlprinzips in der Mengenlehre"*); ausgehend von der Existenz einer unteren Grenze des Kurvenintegrals für Kurven, welche zwei Punkte P_1 und P_2 verbinden, wird nämlich angenommen, daß es eine abzählbare Menge von Kurven gibt, für welche dieses Kurvenintegral gegen seine untere Grenze konvergiert. Diese Schlußweise wäre ohne Benutzung des erwähnten Prinzips nicht denkbar. Ähnlich verhält es sich, wenn wir aus einer unendlichen Punktmenge eine Teilmenge aussondern, welche eine gegebene Häufungsstelle der ursprünglichen Menge besitzt und sonst keine andere Häufungsstelle hat.

Der eigentliche Beweis von Hilbert beruht auf gewissen allgemeinen Eigenschaften von Kurvenscharen, die unabhängig von der Variationsrechnung sind, und deren Ableitung wir vorausschicken wollen.

Es sei eine abzählbare Menge $\mathfrak{M}_0$ von ebenen Kurven gegeben, die sämtlich eine endliche Länge haben und zwei feste Punkte P_1, P_2 der Ebene verbinden. Dann kann man aus dieser Kurvenschar immer eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ herausgreifen, die gegen eine „Grenzkurve" konvergiert.

Letzteres ist folgendermaßen zu verstehen. Man bilde die Kurven der Gesamtmenge $\mathfrak{M}_0$ eineindeutig auf die Strecke $\overline{01}$ ab, auf eine be-

*) Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann., Bd. 59, pag. 514.

liebige, aber ein- für allemal bestimmte Weise. Dann kann die Teilmenge $\mathfrak{M}$ so bestimmt werden, daß die einem und demselben Punkte der Strecke $\overline{01}$ entsprechenden Punkte der Kurven von $\mathfrak{M}$ einen einzigen Häufungspunkt besitzen. Die Menge dieser Häufungspunkte ist perfekt. Jedem dieser Punkte entspricht ein einziger Punkt der Strecke $\overline{01}$, aber nicht umgekehrt.

Es seien

$$\mathfrak{M}_0 : C_1^0,\ C_2^0,\ C_3^0, \cdots \tag{1}$$

die Kurven der Menge $\mathfrak{M}_0$,

$$l_1^0,\ l_2^0,\ l_3^0, \cdots$$

die Längen dieser Kurven, wenn man sie von P_1 bis P_2 mißt. Es ist der Voraussetzung nach für jedes n

$$l_n^0 < A;$$

hieraus schließen wir, daß die Kurven selbst sämtlich im Endlichen liegen.

Auf jeder Kurve C_n^0 der Schar (1) bestimmen wir die Punkte $P_n^0(\vartheta)$ durch die Eigenschaft, daß die Länge von C_n^0, wenn man die Kurve von P_1 bis $P_n^0(\vartheta)$ mißt, gleich ϑl_n^0 sei; hier bedeutet ϑ irgend eine positive Zahl zwischen 0 und 1. Auf diese Weise haben wir die einfachste stetige eineindeutige Abbildung der Kurven der Schar (1) auf die Strecke $\overline{01}$ realisiert; für das Folgende hätte aber eine beliebige andere Abbildung dieselben Dienste geleistet.

Wir wählen auf der Strecke $\overline{01}$ eine abzählbare, überall dichte Menge von Punkten

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3, \cdots, \tag{2}$$

z. B. die Menge der rationalen Zahlen. Dieser entspricht auf jeder der Kurven C_n^0 eine Menge derselben Eigenschaft.

Fassen wir nun zunächst diejenigen Punkte $P_n^0(\vartheta_1)$ ins Auge, die dem Punkte ϑ_1 entsprechen, so bilden sie eine unendliche, ganz im Endlichen liegende Punktmenge, die mindestens die eine Häufungsstelle $H(\vartheta_1)$ besitzt.

Aus der Schar (1) kann man also eine Schar

$$\mathfrak{M}_1 : C_1^1,\ C_2^1,\ C_3^1, \cdots \tag{3}$$

absondern, derart, daß die Punkte $P_n(\vartheta_1)$ dieser Schar keinen anderen Häufungspunkt als $H(\vartheta_1)$ besitzen. Für *jede* Schar von unendlich vielen Kurven, die aus lauter Kurven von $\mathfrak{M}_1$ — jede einmal genommen — besteht, wird $H(\vartheta_1)$ Häufungspunkt der Punkte $P(\vartheta_1)$ sein.

Man sondere jetzt aus $\mathfrak{M}_1$ eine Schar von unendlich vielen Kurven

$$\mathfrak{M}_2 : C_1^2,\ C_2^2,\ C_3^2, \cdots$$

derart ab, daß die Punkte $P_n^2(\vartheta_2)$ dieser Kurven eine einzige Häufungsstelle besitzen, die wir mit $H(\vartheta_2)$ bezeichnen.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens bilde man die Schar

$$\mathfrak{M}_i : C_1^i,\ C_2^i,\ C_3^i, \cdots$$

mit der Eigenschaft, daß jede der unendlichen Punktmengen

$$P_1^i(\vartheta_k),\ P_2^i(\vartheta_k),\ P_3^i(\vartheta_k)$$

für

$$k = 1, 2, 3, \cdots, i$$

einen einzigen Häufungspunkt $H(\vartheta_k)$ besitzt.

Man betrachte jetzt die Schar der Kurven

$$C_1^1,\ C_2^2,\ C_3^3, \cdots,$$

die wir abkürzend mit

(4) $$\mathfrak{M} : C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4, \cdots$$

bezeichnen. Für die Kurven dieser Schar hat jede der Punktmengen

$$P_1(\vartheta_k),\ P_2(\vartheta_k),\ P_3(\vartheta_k), \cdots$$

einen und nur einen Häufungspunkt $H(\vartheta_k)$ und dieses für ein beliebiges k.

Nun besitzen aber auch die Punkte $H(\vartheta)$, die einem willkürlichen Wert ϑ der Strecke $\overline{01}$ entsprechen, ebenfalls mindestens eine Häufungsstelle $H(\vartheta)$. Ich behaupte, daß sie keine von $H(\vartheta)$ verschiedene Häufungsstelle $H'(\vartheta)$ haben können. Denn, angenommen dies wäre der Fall, so sei δ der Abstand von $H(\vartheta)$ und $H'(\vartheta)$; für alle ϑ_ν der Reihe (2), die der Ungleichheit genügen

$$|\vartheta_\nu - \vartheta|\, A < \frac{\delta}{3},$$

sind die Punkte $P_m(\vartheta_\nu)$ und $P_m(\vartheta)$ um weniger als $\frac{\delta}{3}$ entfernt. Hieraus folgt, daß der Punkt $H(\vartheta_\nu)$ ebensowohl von $H(\vartheta)$ als auch von $H'(\vartheta)$ um weniger als $\frac{\delta}{3}$ entfernt sein müßte, was unmöglich ist.

Durch die Kurvenschar (4) wird also eine Punktmenge definiert, deren Elemente $H(\vartheta)$ eindeutig auf die Strecke $\overline{01}$ bezogen sind; wir bezeichnen diese Menge mit $\mathfrak{H}$.

Jeder Punkt $H(\vartheta)$ ist ein Häufungspunkt von $\mathfrak{H}$, da man Punkte $H(\vartheta_\nu)$ der Menge finden kann, die um weniger als δ von $H(\vartheta)$ entfernt sind.

Umgekehrt gehört aber jede Häufungsstelle von Punkten

(5) $$H(\vartheta_1),\ H(\vartheta_2),\ H(\vartheta_3), \cdots$$

der Menge $\mathfrak{H}$ an. Es genügt (5) so zu wählen, daß sie eine einzige Häufungsstelle H besitzen. Die Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \cdots$ werden ebenfalls mindestens einen Häufungspunkt ϑ haben. Der entsprechende Punkt $H(\vartheta)$

wird, nach dem vorigen, Häufungspunkt von (5) und folglich mit H identisch sein.

Die Punktmenge $H(\vartheta)$ ist also perfekt; man könnte auch bemerken, daß sie zusammenhängend ist. Das Lemma, das wir im folgenden brauchen ist also bewiesen.

§ 11.

Anwendung auf Variationsprobleme.

Es sei ein Gebiet T in der xy-Ebene gegeben, innerhalb dessen das Variationsproblem

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y;\, x', y')\, dt$$

positiv definit ist. Es mögen also für alle Linienelemente des Gebietes T die Beziehungen gelten

$$M \geqq F\left(x, y;\, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right) \geqq m > 0;$$

für jede Kurve innerhalb des Gebietes T, deren Länge L ist, hat man folglich

(6) $$ML \geqq J \geqq mL.$$

Sind A_1, A_2 irgend zwei Punkte von T, so ist der Wert des Integrals längs einer beliebigen Kurve, die A_1 mit A_2 verbindet und innerhalb T verläuft, sicher größer als $m \cdot A_1A_2$, wo A_1A_2 die Entfernung der zwei Punkte A_1 und A_2 bedeutet. Die Integrale J längs solcher Kurven, die T nicht verlassen, haben also eine untere Grenze u, die von Null verschieden ist; es sei

(7) $$C_1^0,\ C_2^0,\ C_3^0,\ \cdots$$

eine Schar von Kurven, für welche die entsprechenden Werte

$$J_1^0,\ J_2^0,\ J_3^0,\ \cdots$$

des Integrals gegen u konvergieren (also keinen anderen Häufungswert besitzen). Es genügt in die Schar (7) solche Kurven aufzunehmen, deren Länge l die Ungleichheit

(8) $$l \leqq \frac{u}{m}$$

befriedigt, denn für längere Kurven ist nach (6) sicher

$$J > u.$$

Sämtliche Voraussetzungen des vorigen Paragraphen sind also erfüllt und man wird aus (7) eine neue Kurvenschar

(9) $$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots$$

absondern können, die gegen eine perfekte Menge von Grenzpunkten $H(\vartheta)$ konvergiert. Die entsprechenden Werte

$$J_1,\ J_2,\ J_3,\ \cdots$$

des Integrals konvergieren gegen seine untere Grenze u. Der Umstand, daß wir es hier mit einem Variationsproblem zu tun haben, gestattet aber, über die Punktmenge $\mathfrak{H}$ mehr auszusagen als bisher.

Es seien ϑ_1, ϑ_2 irgend zwei Zahlen zwischen 0 und 1 und man habe z. B.

$$\vartheta_2 > \vartheta_1;$$

wir bezeichnen mit $[J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ den Wert des Integrals auf der Kurve C_n vom Punkte $P_n(\vartheta_1)$ bis zum Punkte $P_n(\vartheta_2)$.

Die Größen $[J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ haben, wenn man n variiert, einen einzigen Häufungswert. Im entgegengesetzten Falle würde man zwei Scharen von Kurven aus (9) aussondern können, nämlich

$$C_{\nu_1},\ C_{\nu_2},\ C_{\nu_3},\ \cdots$$

und

$$C_{\mu_1},\ C_{\mu_2},\ C_{\mu_3},\ \cdots,$$

so daß

$$\lim_{n=\infty} [J_{\nu_n}]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \alpha, \quad \lim_{n=\infty} [J_{\mu_n}]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \beta$$

und $\alpha > \beta$ sei.

Dann würde man aber eine neue Kurvenschar konstruieren können, für welche die n^{te} Kurve C_n von A_1 bis $P_{\nu_n}(\vartheta_1)$ und von $P_{\nu_n}(\vartheta_2)$ bis A_2 mit C_{ν_n} zusammenfällt, während das Intervall zwischen $P_{\nu_n}(\vartheta_1)$ und $P_{\nu_n}(\vartheta_2)$ aus zwei geradlinigen Stücken bis $P_{\mu_n}(\vartheta_1)$ und $P_{\mu_n}(\vartheta_2)$ und einem Stücke der Kurve C_{μ_n} besteht (Fig. 15).

Da die Punkte $P_{\mu_n}(\vartheta_i)$, $P_{\nu_n}(\vartheta_i)$ beide gegen $H(\vartheta_i)$, und folglich die geradlinigen Stücke mit $n = \infty$ gegen Null konvergieren, so würde die Gleichung gelten

$$\lim_{n=\infty} \bar{J}_n = u + \beta - \alpha < u,$$

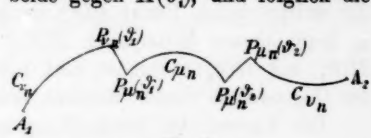

Fig. 15.

was unmöglich ist.

Hieraus folgt die Existenz der Größe $\lim\limits_{n=\infty} [J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$, die wir mit $[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ bezeichnen:

$$\lim_{n=\infty} [J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = [u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Diese Größe ist, wie man durch ganz analoge Betrachtungen zeigen kann, die untere Grenze der Werte des Integrals J längs Kurven, die $H(\vartheta_1)$ mit $H(\vartheta_2)$ verbinden.

Also hat man

$$\overline{H(\vartheta_1)\,H(\vartheta_2)}\,M \geqq [u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}.$$

Im übrigen ist wegen unserer Konstruktion

$$[J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \geqq m(\vartheta_2 - \vartheta_1)\overline{A_1 A_2} > 0,$$

also auch

$$[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \geqq m(\vartheta_2 - \vartheta_1)\overline{A_1 A_2},$$

und die Entfernung der zwei Punkte $H(\vartheta_1)$ und $H(\vartheta_2)$ ist größer als $\frac{m(\vartheta_2 - \vartheta_1)\overline{A_1 A_2}}{M}$, also von Null verschieden.

Ähnlich gelten, wegen (8), die Ungleichheiten

$$\overline{P_n(\vartheta_1)\,P_n(\vartheta_2)}\, m \leqq [J_n]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \leqq M \frac{u}{m}(\vartheta_2 - \vartheta_1), \tag{10}$$

also ist auch

$$\overline{H(\vartheta_1)\,H(\vartheta_2)} \leqq \frac{Mu(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{m^2}.$$

Mit anderen Worten: Die Punktmenge $\mathfrak{H}$ ist eineindeutig stetig auf die Strecke $\overline{01}$ abbildbar; sie stellt eine stetige Kurve dar, die *keine Doppelpunkte* besitzt und eine endliche Länge im Jordanschen Sinne hat.

Wir nehmen jetzt an, daß innerhalb des Gebietes T die Invarianten Ψ und Ω nie verschwinden, also die Größe ϱ_3, die wir im § 8 definierten, existiert.

Wenn für irgend einen Wert ϑ_1 der Punkt $H(\vartheta_1)$ im Inneren des Gebietes T liegt, so kann man $|\vartheta_2 - \vartheta_1|$ so klein wählen, daß für jeden Wert von ϑ, für welchen die Beziehungen gelten

$$\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2,$$

der entsprechende Punkt $H(\vartheta)$ im Inneren des Kreises mit dem Radius ϱ_3 liegt, dessen Mittelpunkt $H(\vartheta_1)$ ist. Die starke Extremale, welche $H(\vartheta_1)$ mit $H(\vartheta_2)$ verbindet, muß mit unserer Häufungspunktkurve wegen des Osgoodschen Satzes identisch sein.

Die Kurven der Schar (7) nähern sich überdies gleichmäßig der Häufungspunktkurve $\mathfrak{H}$: Wählt man nämlich

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 \leqq \frac{m^2 \varrho_3}{2Mu},$$

so ist nach (10) die Entfernung der Punkte $P_n(\vartheta_1)$ und $P_n(\vartheta_2)$ für jedes n kleiner als $\frac{\varrho_3}{2}$; hierauf kann man ν derart bestimmen, daß für jedes $n > \nu$ die Entfernungen

$$\overline{P_n(\vartheta_1) H(\vartheta_1)} \quad \text{und} \quad \overline{P_n(\vartheta_2) H(\vartheta_2)}$$

kleiner als $\frac{\varrho_3}{4}$ werden. Dann verläuft der ganze Kurvenzug, der aus den geradlinigen Stücken $\overline{H(\vartheta_1)P_n(\vartheta_1)}$, $\overline{H(\vartheta_2)P_n(\vartheta_2)}$ und dem Stück der Kurve C_n zwischen $P_n(\vartheta_1)$ und $P_n(\vartheta_2)$ besteht, im Inneren des Kreises vom Radius ϱ_3 und vom Mittelpunkt $H(\vartheta_1)$. Wenn man nun mit $\mathfrak{G}$ ein beliebiges Gebiet bezeichnet, das das Kurvenstück

$$H(\vartheta), \quad \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$$

umgibt, und ganz im Inneren dieses letzten Kreises liegt, so hat die Größe ε, die wir pag. 492 definierten, für jede Kurve, die nicht vollständig innerhalb $\mathfrak{G}$ verläuft, eine von Null verschiedene positive untere Grenze; man wird also μ so groß wählen können, daß für jedes $n > \mu$ das Kurvenstück

$$P_n(\vartheta) : \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$$

gänzlich innerhalb $\mathfrak{G}$ liegt.

Das Integral längs der Häufungspunktkurve

$$H(\vartheta) : \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$$

ist übrigens genau gleich $[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$; wäre dies nicht der Fall, so würde man innerhalb $\mathfrak{G}$ Kurven konstruieren können, für welche das Integral J einen kleineren Wert annehmen würde als für die Extremale

$$H(\vartheta) : \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2;$$

dieses ist aber mit den Eigenschaften der Weierstraßschen E-Funktion in direktem Widerspruch.

Die angegebenen Resultate lassen sich auf ein beliebig langes Stück der Häufungspunktkurve, das vollständig im *Inneren* des Gebietes T verläuft, übertragen, da man dann immer das Intervall der Strecke $\overline{01}$, das dem ganzen Stücke entspricht, in eine *endliche* Anzahl von Teilintervallen zerlegen kann, für welche unsere sämtlichen Ungleichheiten gelten.

§ 12.

Eigenschaften des Randes.

Wir wollen jetzt unsere Betrachtungen auf diejenigen Teile der Häufungspunktkurve ausdehnen, die mit Stücken des Randes zusammenfallen.

Es ist zunächst klar, daß man diejenigen Teile des Randes außer Betracht lassen muß, welche die Eigenschaft haben, daß man zwei hinreichend benachbarte ihrer Punkte durch eine starke Extremale verbinden kann, welche vollständig im Inneren des Gebietes T verläuft; solche Randstücke können nie mit Teilen der Häufungspunktkurve zusammenfallen.

Wenn man zweitens je zwei hinreichend benachbarte Punkte des betrachteten Randstückes durch eine starke *kontinuierliche* Extremale verbinden kann, die außerhalb des Gebietes T verläuft, wenn es also in jedem Punkte dieses Randstückes eine starke Extremale gibt, welche den Rand von T berührt, so kann man mit Hilfe einer Methode, die Bliss angegeben hat*), ein Feld konstruieren, das die Weierstraßsche Konstruktion der E-Funktion ermöglicht. Es ist dann eventuell dieser Teil des Randes R mit einem Teile von $H(\vartheta)$ identisch; die Resultate des vorigen Paragraphen, was die Gleichmäßigkeit der Konvergenz und den Wert des Integrals J betrifft, bleiben erhalten.

Endlich kann es aber vorkommen, daß zwei hinreichend benachbarte Punkte des Randes durch ein diskontinuierliches starkes Extremalenstück verbunden werden können, das gänzlich außerhalb des Gebietes T verläuft. Dann kann zwar der Rand einen Teil der Kurve $H(\vartheta)$ bilden, aber der Wert des Integrals J längs dieser Kurve ist von $[u]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ verschieden.

Ein einfaches Beispiel für diesen letzten Fall erhält man, indem man ein Variationsproblem bildet, dessen Indikatrix in jedem Punkte die pag. 466 erwähnten Eigenschaften a), b), c) besitzt, also z. B. in Polarkoordinaten die Gleichung

$$\varrho = \sqrt{2} - \cos\vartheta$$

besitzt. Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$\varrho^2 = \sqrt{2\varrho^2} - \varrho\cos\vartheta$$

oder

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\sqrt{2\xi^2 + 2\eta^2} - \xi} = 1.$$

Nun betrachte man das Problem:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{(y^2+1)(x'^2+y'^2)dt}{\sqrt{2x'^2+2y'^2}-x'}, \tag{11}$$

das in der ganzen Ebene definit ist und in jedem Punkte die Diskontinuitätsrichtungen

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{y}' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

aufweist.

Die Invariante Ω nimmt hier den Wert an

$$\Omega = -4y,$$

während Ψ überhaupt nicht verschwinden kann.

*) Sufficient Conditions for a Minimum with respect to One-sided Variations (Trans. Amer. Math. Soc., vol. V, No. 4, pp. 477—492).

Wir betrachten als Variationsgebiet das Quadrat, dessen Rand aus der Geraden

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad y = 2$$

besteht (Fig. 16).

Will man jetzt den Punkt A mit B durch eine Kurve verbinden, die innerhalb des Quadrates T verläuft und ein absolutes Minimum liefert, so ist die Häufungspunktkurve $H(\vartheta)$ mit dem Geradenstücke AB identisch. Das Integral längs dieser Geraden ist aber

$$J_A^B = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 4{,}283,$$

während die untere Grenze

$$[u]_A^B = 4$$

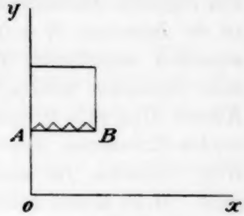

Fig. 16.

ist; man nähert sich dieser Größe, indem man das Integral längs gezackter Polygone nimmt, deren Seiten 45^0 mit den Koordinatenachsen bilden und eine unendlich abnehmende Länge besitzen.

Wir wollen jetzt die Bedingung, daß Ω im ganzen Gebiete T nicht verschwindet, fallen lassen. Es können dann die Punkte der Kurve

$$\Omega(x, y) = 0$$

in zwei Klassen getrennt werden, je nachdem die Richtung der Tangente von $\Omega = 0$ mit der einer starken oder der einer schwachen Extremalen zusammenfällt. Hierbei lassen wir den Fall unerledigt, wo $\Omega = 0$ mit einer der Kurven der Schar $C, \bar{C}$ (pag. 470) identisch ist.

Im ersten Falle wird man in der Umgebung von hinreichend kleinen Stücken von $\Omega = 0$ ein Feld konstruieren können, und ein beliebig langes Stück der Kurve $\Omega = 0$ wird durch eine endliche Anzahl solcher Felder sich überdecken lassen.

Die Kurve $\Omega = 0$ wird mit keiner Häufungspunktkurve zusammenfallen können und diese Kurve nur in einzelnen Punkten begegnen.

Im zweiten Falle wird die Häufungspunktkurve mit endlichen Stücken von $\Omega = 0$ zusammenfallen können, in der Regel aber wird das Integral längs $H(\vartheta)$ einen Wert erhalten, der von seiner unteren Grenze u verschieden ist.

Wenn man z. B. beim Variationsproblem (11) das Variationsgebiet ganz unbeschränkt läßt, wobei in der ganzen Ebene $\Psi \neq 0$ ist, Ω aber längs der x-Achse verschwindet, und nach der Häufungspunktkurve fragt, die zwei beliebige Punkte dieser Geraden, z. B. die Punkte $x = 0$ und $x = 1$, verbindet, so sieht man leicht, daß die gesuchte Kurve mit dieser Geraden zusammenfällt. Der Wert des Integrals längs dieser Linie liefert

aber ein *schwaches Maximum* und ist unter den gemachten Annahmen gleich $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ oder 2,141, während die untere Grenze u hier gleich 2 ist.

Zusammenfassend haben wir also folgendes Resultat erlangt:

Ist ein positiv definites Variationsproblem J und ein Gebiet T gegeben von folgender Beschaffenheit: 1. *In seinem Inneren und auf dem Rande R ist die Invariante $\Psi \neq 0$.* 2. *Kein Punkt des Randes R kann mit einem unendlich benachbarten Punkte durch eine starke diskontinuierliche Extremale verbunden werden, die außerhalb des Gebietes T verläuft.* 3. *Die Kurven $\Omega(x, y) = 0$ haben in jedem ihrer Elemente die Richtung einer starken Extremalen; dann kann man je zwei Punkte von T durch eine Kurve $H(\vartheta)$ verbinden, für welche die untere Grenze u des Integrals J erreicht wird. $H(\vartheta)$ besteht teilweise aus Stücken von R selbst.*

Die geschilderten Bedingungen sind nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig in dem Sinne, daß jedesmal, wo eine derselben nicht erfüllt ist, man Beispiele angeben kann, für welche der Satz nicht mehr gilt. Wir sind also in den Untersuchungen über starke Extremalen bei definitem Variationsproblem zu einem gewissen Abschluß gekommen; die singulären Stellen, die wir außer Betracht ließen, sind solcher Natur, daß sie nicht durch allgemeine Betrachtungen erledigt werden können, sondern in jedem einzelnen Falle eigene Methoden erfordern.

§ 13.

Bemerkungen über nicht definite Variationsprobleme.

In der Einleitung machten wir schon darauf aufmerksam, daß die Resultate der letzten Paragraphen sich auf reguläre, nicht definite Variationsprobleme nicht übertragen lassen.

Ein Grund dafür ist schon der, daß die Länge der Vergleichskurven zwischen zwei Punkten nicht endlich zu bleiben braucht, wenn man die Kurvenschar (7) (pag. 494)

$$C_1^0,\ C_2^0,\ C_3^0, \cdots$$

durchläuft; das Hilbertsche Verfahren ist folglich nicht anwendbar.

Die Verhältnisse, die hier vorliegen, lassen sich schon bei ganz einfachen Beispielen charakterisieren.

Man betrachte z. B. das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (yx' + \sqrt{x'^2 + y'^2})\,dt,$$

d. h. das Integral des gewöhnlichen isoperimetrischen Problems in der Ebene, bei welchem man die isoperimetrische Konstante gleich Eins gesetzt hat.

Hier ist

$$F_1 = \frac{1}{y'^2} F_{x'x'} = \frac{2}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

durchweg positiv. Das Problem ist in jedem Punkte der Ebene schon im engeren Sinne regulär und liefert ein starkes Minimum; die Umgebung jedes Punktes kann mit einem Felde von starken kontinuierlichen Extremalen überdeckt werden.

Hieraus folgt, daß, wenn man längs einer geschlossenen Kurve integriert, die innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes verläuft, das Integral J einen *positiven* Wert annehmen wird; denn sonst würde von einem Minimum gar nicht die Rede sein können.

Trotzdem kann man, wenn man das Variationsgebiet vergrößert, den Umlauf so wählen, daß das entsprechende Integral einen negativen Wert erhält.

Wenn man nämlich die Kurve im positiven Sinne durchläuft, so ist das Integral gleich der Länge der Kurve vermindert um den Inhalt der Fläche, die sie umschließt; also z. B. für ein Quadrat erhält das Integral den Wert $a(4-a)$ und wird negativ, sobald $a > 4$ ist.

Zu demselben Ergebnisse kommt man auch auf folgendem Wege: Die Extremalen des Problems sind bekanntlich Kreise mit dem Radius 1. Die Enveloppe N aller Extremalen, die durch einen Punkt gehen, ist ein Kreis vom Radius 2, also eine reguläre geschlossene Kurve ohne Rückkehrpunkt. Nach der allgemeinen Theorie (die sich hier sofort bestätigt) hat das Integral längs dieser Enveloppe N den Wert Null, während jede geschlossene Kurve, die vollständig innerhalb N verläuft, ein positives Integral liefert. Die Kurve N hat ferner die Eigenschaft, daß, wenn man dem Gebiete, das sie umgibt, ein beliebiges, noch so kleines Stück der Ebene hinzufügt, im Inneren des erweiterten Gebietes geschlossene Kurven existieren, die einen negativen Wert des Integrals liefern.

Kurven, welche diese sämtlichen Eigenschaften besitzen, scheinen bei der Behandlung der nicht definiten Variationsprobleme eine wichtige Rolle zu spielen.

Associate Surfaces.

By

L. P. Eisenhart of Princeton, New-Jersey.

Two surfaces between which there is a point to point correspondence such that the tangent planes at these points are parallel and asymptotic lines on one surface correspond to a conjugate system on the other are called *associate surfaces* by Bianchi*). This article is devoted to a consideration of surfaces thus related and to the determination of the associates of a given surface.

In § 1 the given surface is taken as referred to its asymptotic lines and it is found that the complete determination of all of its associates requires the integration of two equations of the first order linear in two unknowns; each pair of solutions of these equations leads by quadratures to an associate surface. After the latter has been found further quadratures enable one to find a surface corresponding to the original surfaces with orthogonality of linear elements; this puts in evidence the relation between the theory of associate surfaces and of the infinitesimal deformation of a surface. It is found that the necessary and sufficient condition that a conjugate system on a surface correspond to the asymptotic lines upon one of its associates is that the tangential invariants be equal; when this condition is satisfied, the corresponding associate can be found by quadratures.

In § 2 it is seen that the two equations can be integrated by quadratures, when the given surface is ruled. As an example of this a particular study is made of the associates of quadric surfaces.

When one of the unknowns is eliminated from the pair of equations, the resulting equation which the other satisfies is of the second order and of the Laplace type; moreover, when one has found an integral of this equation, the value of the other unknown corresponding to it can be found by quadratures. The invariants of the Laplace equation are of

*) Lezioni, vol. 2, p. 10; German translation, p. 293.

such a from that one discovers several classes of surfaces for which the problem can be solved. Again by a change of the unknown the pair of equations can be replaced by a system of equations whose forms are of advantage in the study of the associates of surfaces of revolution and certain other classes of surfaces. These considerations are found in §§ 3 and 4.

In § 5 we discuss the cases where the two unknown functions are equal and where they differ only in sign. It is found that if a surface admits of either case, it admits of the other also: that the corresponding associates are found by quadratures; that the conjugate system on each corresponding to the asymptotic lines on the given surface is isothermal-conjugate; and that these two associates of the given surface are associates of one another. Moreover, only for this case is it true that two associates of a given surface are associates of one another. A particular class of surfaces for which the foregoing results obtain consists of the surfaces of translation with isothermal-conjugate generators; these surfaces and their associates are considered in § 6.

§ 7 opens with the determination of the corresponding lines on two associate surfaces which are conjugate for both, we call it the *common conjugate system*. Whenever one knows a conjugate system on a given surface which has equal point invariants, one can find by quadratures an associate surface on which the corresponding system is conjugate; this condition is necessary as well as sufficient. In this connection a study is made of the associates of surfaces of translation and of those Voss surfaces whose conjugate geodesic system is isothermal-conjugate.

Christoffel has considered the problem of finding all surfaces corresponding with parallelism of tangent planes and at the same time susceptible of a conformal representation of one another upon the other. In § 8 we determine the surfaces which together with their associates furnish a solution of this problem. The results of this investigation enable us to establish the theorem that the limit surfaces of a group of applicable surfaces are isothermic.

§ 1.

General Formulae. Asymptotic Lines Parametric.

Let S and S_1 be two surfaces corresponding with parallelism of tangent planes and denote by x, y, z; x_1, y_1, z_1, the cartesian coordinates of corresponding points on these surfaces. If S and S_1 are referred to any system of corresponding lines, the following equations hold:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sigma \frac{\partial x}{\partial u} + \tau \frac{\partial x}{\partial v}, \tag{1}$$

where λ, μ, σ, τ are functions of u and v to be determined; similar equations in the y and z obtain. Making use of the usual notation and indicating by a subscript 1 the functions belonging to S_1, we get from (1)

$$\tag{2} \begin{cases} E_1 = \lambda^2 E + 2\lambda\mu F + \mu^2 G, \\ F_1 = \lambda\sigma E + (\lambda\tau + \mu\sigma) F + \mu\tau G, \\ G_1 = \sigma^2 E + 2\sigma\tau F + \tau^2 G. \end{cases}$$

Denoting by X, Y, Z the direction-cosines of the normal to S, and consequently to S_1 at the corresponding point, we find the relations

$$\tag{3} \begin{aligned} D_1 &= \lambda D + \mu D', \qquad D_1'' = \sigma D' + \tau D'', \\ D_1' &= \lambda D' + \mu D'' = \sigma D + \tau D', \end{aligned}$$

where as usual

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}.$$

If we write for the sake of brevity

$$\tag{4} \Delta = \lambda\tau - \mu\sigma,$$

we find that

$$\tag{5} E_1 G_1 - F_1^2 = \Delta^2 (EG - F^2),$$

which we shall write in the form

$$\tag{6} H_1^2 = \Delta^2 H^2,$$

and

$$\tag{7} D_1 D_1'' - D_1'^2 = \Delta (DD'' - D'^2).$$

From these equations we find that between the Gaussian curvatures K and K_1 of the two surfaces there obtains the relation

$$\tag{8} K_1 = \frac{K}{\Delta}.$$

Hence Δ cannot be equal to zero, so long as we are dealing with non-developable surfaces.

We limit ourselves to the study of the case where S and S_1 correspond not only with parallelism of tangent planes at corresponding points, but also in such a way that the asymptotic lines on S correspond to a conjugate system on S_1. The necessary and sufficient condition that the latter kind of correspondence exist is

$$\tag{9} DD_1'' + D''D_1 - 2D'D_1' = 0.$$

One sees at once that in case it is satisfied the asymptotic lines on S_1 correspond to a conjugate system on S. From this equation it follows, as Bianchi has pointed out*), that, when S has positive total curvature,

*) Lezioni, vol. 2, p. 10; Germ. trans. p. 293.

the curvature of S_1 is negative; but when S has negative curvature, S_1 may have either positive or negative curvature. Following Bianchi we call the surfaces S and S_1 *associates* of one another.

Given a surface S referred to its asymptotic lines; then, in consequence of (9) we have

$$D = D'' = D_1' = 0,$$

and from (3) it is seen that

$$\lambda = \tau = 0. \tag{10}$$

Equations (1) reduce to

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sigma \frac{\partial x}{\partial u}. \tag{11}$$

The Gauss relations*) reduce for S to

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned} \tag{12}$$

where the Christoffel symbols $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ are formed with respect to the linear element of S. By means of these relations the equation of consistency of equations (11) can be reduced to

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\mu \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial \sigma}{\partial u} - \sigma \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \sigma \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) = 0.$$

Since this equation must be satisfied by y and z also, the expressions in parenthesis must be equal to zero, thus giving the two equations of condition

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \sigma \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \sigma \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \mu \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

It is evident that every set of solutions of these equations gives an associate surface of S by the quadratures (11).

In consequence of equations (11) the three expressions $z_1 dy - y_1 dz$, $x_1 dz - z_1 dx$ and $y_1 dx - x_1 dy$ are exact differentials, so that there are three functions ξ, η, ζ, defined by the equations

$$d\xi = z_1 dy - y_1 dz, \quad d\eta = x_1 dz - z_1 dx, \quad d\zeta = y_1 dx - x_1 dy.$$

From these equations one obtains the relation

$$dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0.$$

Hence the surface, Σ, which is the locus of the point (ξ, η, ζ) corresponds

*) Lezioni, vol. 1, p. 116; p. 89.

to S with orthogonality of linear elements; consequently the functions ξ, η, ζ determine an infinitesimal deformation of S*). Hence the integration of equations (13) carries with it the solution of the problem of the infinitesimal deformation of S.

It is evident that if (μ_1, σ_1) and (μ_2, σ_2) are two sets of solutions of equations (13), so also is $(k\mu_1 + l\mu_2,\ k\sigma_1 + l\sigma_2)$ a set of solutions, for all values of the constants k and l. Hence we have the theorem:

Given two surfaces S_1 and S_2 associate to S; the points which divide in constant ratio the joins of corresponding points on S_1 and S_2 lie on an associate of S.

The necessary and sufficient condition that a double system of lines on the sphere represent the asymptotic lines on a surface, S, is**)

$$(14)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'.$$

For S_1 this is the condition that the conjugate system have equal tangential invariants. Hence:

The necessary and sufficient condition that a conjugate system on a given surface correspond to the asymptotic lines on an associate surface is that the system have equal tangential invariants.

Let S be a surface referred to a conjugate system with equal tangential invariants and denote by S_1 an associate on which the corresponding curves are asymptotic. From (3) it follows that

$$\lambda = \tau = 0$$

and from (1)

$$(15)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sigma\frac{\partial x}{\partial u}.$$

The condition of consistency reduces by means of the Gauss equations***)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + DX,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D''X,$$

to

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\mu\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial \sigma}{\partial u} - \sigma\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mu\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \sigma\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right) + X(\mu D'' - \sigma D) = 0.$$

Since this equation must be satisfied by y and z also, we have for the determination of μ and σ equations (13) and

$$\mu D'' - \sigma D = 0.$$

*) Bianchi, Lezioni, vol. 2, p. 4; Germ. trans. p. 289.

**) Ib. vol. 1, p. 156; p. 125.

***) Ib. p. 116; p. 89.

In conformity with this equation we define an auxiliary function t thus:

$$\mu = \frac{tD}{H}, \quad \sigma = \frac{tD''}{H}. \tag{16}$$

When these values are substituted in (13) and we make use of the Codazzi equations for S*), namely,

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{H} + \left\{ {22 \atop 2} \right\}\frac{D}{H} + \left\{ {11 \atop 2} \right\}\frac{D''}{H} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{H} + \left\{ {22 \atop 1} \right\}\frac{D}{H} + \left\{ {11 \atop 1} \right\}\frac{D''}{H} = 0,$$

we get

$$\frac{\partial \log t}{\partial u} = 2\frac{D}{D''}\left\{ {22 \atop 1} \right\}, \qquad \frac{\partial \log t}{\partial v} = 2\frac{D''}{D}\left\{ {11 \atop 2} \right\}. \tag{17}$$

In consequence of the relations**)

$$\frac{D}{D''}\left\{ {22 \atop 1} \right\} = -\left\{ {12 \atop 2} \right\}', \qquad \frac{D''}{D}\left\{ {11 \atop 2} \right\} = -\left\{ {12 \atop 1} \right\}', \tag{18}$$

equations (17) are compatible, and t is given by a quadrature. Hence there is a unique surface S_1 upon which the parametric lines are asymptotic, and it is found by quadratures when S is given in terms of parameters referring to a conjugate system with equal tangential invariants.

As an example of the foregoing, we consider the surfaces of Voss i. e. surfaces with a geodesic conjugate system. If the latter be parametric, one has

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0;$$

consequently equations (18) reduce to

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\}' = \left\{ {12 \atop 2} \right\}' = 0.$$

In this case the surface S_1 is pseudospherical***). Conversely, when S_1 is pseudospherical and referred to its asymptotic lines, the above conditions are satisfied. Hence *all the associates of a pseudospherical surface are surfaces of Voss* and *the associate of a surface of Voss corresponding to the geodesic conjugate system is pseudospherical.*

As an application of the preceding formulae, we seek to determine under what conditions S is applicable to an associate surface. Let S be referred to its asymptotic lines. In consequence of (10), the relations (2), (3) and (8) reduce to

$$\begin{aligned} &E_1 = \mu^2 G, \ F_1 = \mu\sigma F, \ G_1 = \sigma^2 E, \\ &D_1 = \mu D', \ D_1' = \mu D'' = \sigma D, \ D_1'' = \sigma D', \ K_1 = \frac{K}{-\mu\sigma}. \end{aligned} \tag{19}$$

*) Bianchi, Lezioni, vol. 1, p. 119; Germ. trans. p. 91.

**) Ib. p. 167; p. 135.

***) Ib. p. 160; p. 130.

From the last it follows that

$$\mu\sigma = -1 \tag{20}$$

when S and S_1 are applicable. Now $F_1 = -F$, but F and F_1 must be equal; hence the parametric curves are orthogonal, and consequently S is a minimal surface. We must have also

$$\mu^2 G = E, \qquad \sigma^2 E = G. \tag{21}$$

From the values (19) we get

$$D_1 G_1 + D_1'' E_1 = \mu\sigma D'(\sigma E + \mu G).$$

From (20) and (21) we see that

$$\sigma E + \mu G = \mu\sigma(\mu G + \sigma E) = -(\mu G + \sigma E).$$

Hence this expression is equal to zero and S_1 is a minimal surface. Since it is applicable to S and its lines of curvature correspond to the asymptotic lines of S, it is the adjoint of the latter. Hence *two adjoint minimal surfaces afford the only example of applicable associate surfaces.*

§ 2.

Associates of Ruled Surfaces and Quadrics.

Let S be a ruled surface referred to its asymptotic lines, the curves $v =$ const. being the generatrices. Since the latter are geodesics, one has

$$\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0, \tag{22}$$

so that the first of equations (13) can be replaced by

$$\mu = U e^{-\int \left\{ {22 \atop 2} \right\} dv}, \tag{23}$$

when U is an arbitrary function of u alone. When this value is substituted in the second of equations (13), the latter assumes the linear form and can be solved by two quadratures. Hence the theorem:

When the asymptotic lines on a ruled surfaces are known, the determination of the associate surfaces requires only quadratures.

It is well known that the finding of the asymptotic lines is equivalent to the solution of a Riccati equation*).

To the class of ruled surfaces belong the quadrics which are characterized by the property of being doubly ruled. On this account, when S is a quadric referred to its asymptotic lines, one has in addition to (22)

---

*) Bianchi, vol. 1, p. 259; Germ. trans. p. 221.

$$\left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0,$$

so that

(24) $$\sigma = V e^{-\int \left\{ {11 \atop 1} \right\} du},$$

where V is an arbitrary function of v alone. In consequence of the identities*)

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2\left(E\left\{ {11 \atop 1} \right\} + F\left\{ {11 \atop 2} \right\}\right), \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 2\left(F\left\{ {22 \atop 1} \right\} + G\left\{ {22 \atop 2} \right\}\right),$$

the expressions (23) and (24) can be replaced by

$$\mu = \frac{U}{\sqrt{G}}, \quad \sigma = \frac{V}{\sqrt{E}}.$$

The parameters of the generatrices of a central quadric may be so chosen that the surface is defined by

(25) $$x = \sqrt{a}\,\frac{v-u}{u+v}, \quad y = \sqrt{b}\,\frac{1+uv}{u+v}, \quad z = \sqrt{c}\,\frac{uv-1}{u+v},$$

where b is negative only for the hyperboloid of two sheets and c is negative only for the ellipsoid.

One finds that

$$E, G = \frac{b(v^2-1)^2 + 4av^2 + c(v^2+1)^2,\, 4au^2 + b(u^2-1)^2 + c(u^2+1)^2}{(u+v)^4}.$$

If we put

$$U_1 = \frac{U}{[b(u^2-1)^2 + 4au^2 + c(u^2+1)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad V_1 = \frac{V}{[4av^2 + b(v^2-1)^2 + c(v^2+1)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

then

(25') $$\mu = U_1(u+v)^2, \quad \sigma = V_1(u+v)^2;$$

and S_1 is given by

(26) $$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{a}\left[\int U_1 u\,du - \int V_1 v\,dv\right], \\ y_1 &= \sqrt{b}\left[\int U_1(u^2-1)\,du + \int V_1(v^2-1)\,dv\right], \\ z_1 &= \sqrt{c}\left[\int U_1(u^2+1)\,du + \int V_1(v^2+1)\,dv\right], \end{aligned}$$

where U_1 and V_1 are arbitrary.

Again we remark that the paraboloids are defined by

(27) $$x = \sqrt{a}(u+v), \quad y = \sqrt{b}(u-v), \quad z = 2uv,$$

where $b > 0$ or < 0 according as the paraboloid is hyperbolic or elliptic. Now

$$E = (a+b+v^2), \quad G = (a+b+u^2).$$

*) Bianchi, 1. ed., p. 77; Germ. trans. p. 52.

Hence μ and σ are arbitrary functions of u and v respectively; denoting them by U' and V', where the accents indicate differentiation, we get

$$(28)\quad x_1 = \sqrt{a}(U+V),\quad y_1 = -\sqrt{b}(U-V),\quad z_1 = 2\int u U' du + 2\int v V' dv.$$

From (26) and (28) it is seen that *the associate surfaces of the quadrics are surfaces of translation.* In consequence of the following relations between the Christoffel symbols formed with respect to the linear element S, referred to its asymptotic lines, the linear element of its spherical representation and of an associate surface S_1, namely*)

$$(29)\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = -\frac{D_1}{D_1''}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1,\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = -\frac{D_1''}{D_1}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1,$$

it follows that *whenever the generators of a surface of translation have equal tangential invariants the corresponding associate surface is a quadric.* Hence equations (26) and (28) define all the surfaces of translation whose generators are of this kind.

From (28) it follows that

$$\sqrt{b}x_1 - \sqrt{a}y_1 = 2\sqrt{ab}\,U,\quad \sqrt{b}x_1 + \sqrt{a}y_1 = 2\sqrt{ab}\,V.$$

Hence *on the associates of a paraboloid the generating lines in each family lie in parallel planes; when the paraboloid is equilateral, the planes of one family are perpendicular to those of the other.*

Weingarten has shown**) that the necessary and sufficient condition that a surface admit an infinitesimal deformation with preservation of the lines of curvature is that the spherical representation of the latter be isothermal; moreover, this is equivalent to saying that one of the associate surfaces is minimal.***) Since the spherical representation of the lines of curvature of a quadric is isothermal, it admits of such a deformation; now we look for the associate surface in this deformation. The expression for the mean curvature of S_1 can be reduced by means of (19) to the form

$$(30)\qquad \frac{D'(\mu G + \sigma E)}{\mu\sigma H^2}.$$

The functions μ and σ must be such that the expression in parenthesis be equal to zero. To within a common factor, E and G for central quadrics are functions of v alone and u alone respectively. Hence upon the removal of common factors we have the sum of a function of u and a function of v equal to zero; consequently, without loss of generality these functions may be put equal to $+1$ and -1 respectively. This gives

*) Bianchi, vol. 1, p. 157; Germ. trans. p. 127.

**) Sitzungsberichte der K. Akademie zu Berlin, Jan. 1886.

***) Bianchi, vol. 2, p. 15; Germ. trans. p. 299.

$$U_1 = \frac{1}{4au^2 + b(u^2-1)^2 + c(u^2+1)^2}, \quad V_1 = \frac{-1}{4av^2 + b(v^2-1)^2 + c(v^2+1)^2}.$$

If we put for the sake of brevity

$$A = \frac{2a - b + c + 2\sqrt{(a-b)(a+c)}}{b+c}, \quad B = \frac{2a - b + c - 2\sqrt{(a-b)(a+c)}}{b+c},$$

we get

$$U_1 = \frac{1}{(b+c)(u^2-A)(u^2-B)}, \quad V_1 = \frac{-1}{(b+c)(v^2-A)(v^2-B)}.$$

Again, if we put

$$f(u) = \frac{1}{b+c}\left[\frac{A-1}{A-B}\,\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\frac{u-\sqrt{A}}{u+\sqrt{A}} + \frac{1-B}{A-B}\,\frac{1}{2\sqrt{B}}\log\frac{u-\sqrt{B}}{u+\sqrt{B}}\right],$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{b+c}\,\frac{1}{A-B}\log\frac{u^2-A}{u^2-B},$$

$$\psi(u) = \frac{1}{b+c}\left[\frac{A+1}{A-B}\,\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\frac{u-\sqrt{A}}{u+\sqrt{A}} - \frac{B+1}{A-B}\,\frac{1}{2\sqrt{B}}\log\frac{u-\sqrt{B}}{u+\sqrt{B}}\right],$$

we find for the coordinates of the minimal surface associate to S

$$(31)\quad x_1 = \sqrt{a}\,[f(u) - f(v)],\; y_1 = \sqrt{b}\,[\varphi(u) - \varphi(v)],\; z_1 = \sqrt{c}\,[\psi(u) - \psi(v)].$$

In the case of the paraboloids, E and G are functions of v and u respectively, so that the minimal surface is determined by the equations

$$\mu G = 1, \quad \sigma E = -1.$$

Two cases arise for consideration. When b is positive, or negative, and $a > |b|$, the coordinates of S_1 are

$$(32)\quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{a+b}} - \operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{a+b}}\right), \\ y_1 &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{a+b}} + \operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{a+b}}\right), \quad z_1 = \log\frac{a+b+u^2}{a+b+v^2}; \end{aligned}$$

and when $b < 0$ and $|b| > a$,

$$(33)\quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{a}}{2i\sqrt{a+b}}\log\frac{(u-i\sqrt{a+b})(v+i\sqrt{a+b})}{(u+i\sqrt{a+b})(v-i\sqrt{a+b})}, \\ y_1 &= \frac{\sqrt{b}}{2i\sqrt{a+b}}\log\frac{(u-i\sqrt{a+b})(v-i\sqrt{a+b})}{(u+i\sqrt{a+b})(v+i\sqrt{a+b})}, \\ z_1 &= \log\frac{a+b+u^2}{a+b+v^2}. \end{aligned}$$

An interesting property of the surfaces defined by (31), (32) and (33) is that they are surfaces of translation in two ways; for, the coordinate lines are not the minimal curves and it is well known that the minimal curves of any minimal surface serve for generators.

Another particular case which is of interest is that for which

$$U_1 = V_1 = 1$$

in equations (26). Upon integration we find

$$x_1 = \sqrt{a}(u^2 - v^2), \quad y_1 = \sqrt{b}\left[\frac{u^3}{3} - u + \frac{v^3}{3} - v\right], \quad z_1 = \sqrt{c}\left[\frac{u^3}{3} + u + \frac{v^3}{3} + v\right].$$

This is an algebraic surface of the fourth degree, for the elimination of u and v gives

$$6\left(\frac{z^2}{c} - \frac{y^2}{b}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{z}{\sqrt{c}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right)^4 + 3\frac{x^2}{a}.$$

From (25′) and (19) it follows that $D_1 = D_1''$; hence S_1 is a surface of translation with isothermal-conjugate generators and the asymptotic lines are given by

$$u + iv = \text{const.}, \quad u - iv = \text{const.}$$

If on the other hand we take $U_1 = -V_1 = 1$, the surface S_1 is defined by

$$x_1 = \sqrt{a}(u^2 + v^2), \quad y_1 = \sqrt{b}\left[\frac{u^3}{3} - u - \frac{v^3}{3} + v\right], \quad z_1 = \sqrt{c}\left[\frac{u^3}{3} + u - \frac{v^3}{3} - v\right],$$

from which it follows that

$$\frac{1}{4}\left(\frac{z}{\sqrt{c}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right)^3 - 3\frac{x}{\sqrt{a}}\left(\frac{z}{\sqrt{c}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right) + 6\left(\frac{z}{\sqrt{c}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right) = 0.$$

For this case $D_1 = -D_1''$, so that the generators are isothermal-conjugate for this surface also, and the asymptotic lines are given by

$$u + v = \text{const}, \quad u - v = \text{const}.$$

In the case of paraboloids, if we put $U' = 1$ and $V' = 1$ or -1, we get, neglecting additive constants,

$$x_1 = \sqrt{a}(u + v), \quad y_1 = \sqrt{b}(v - u), \quad z_1 = u^2 + v^2,$$

or

$$x_1 = \sqrt{a}(u - v), \quad y_1 = -\sqrt{b}(u + v), \quad z_1 = u^2 - v^2;$$

these are equivalent respectively to

$$\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} = 2z_1, \quad x_1 y_1 = -\sqrt{ab}\, z_1.$$

The former is an elliptic or hyperbolic paraboloid according as the given paraboloid is hyperbolic or elliptic; and the latter is real or imaginary for these respective paraboloids. We remark that when the paraboloids are defined in this manner, the generatrices are isothermal-conjugate.

When in particular S is a sphere referred to its asymptotic lines, $E = G = 0$, so that the expression (30) vanishes for all values of μ and σ. Hence the associates of the sphere are minimal surfaces.

§ 3.

Other Forms of the Equations of Condition.

We return to the consideration of equations (13). If σ be eliminated from them, it is found that μ must satisfy the Laplace equation

$$(34)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \left(\left\{ {11 \atop 1} \right\} - \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ {11 \atop 2} \right\} \right) \frac{\partial\theta}{\partial v} \\ &+ \left(\left\{ {11 \atop 2} \right\} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\left\{ {22 \atop 2} \right\}}{\left\{ {11 \atop 2} \right\}} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \left\{ {22 \atop 2} \right\} - \left\{ {22 \atop 1} \right\} \left\{ {11 \atop 2} \right\} \right) \theta = 0. \end{aligned}$$

Since the asymptotic lines on S are parametric, the following equation must obtain

$$(35)\qquad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ {12 \atop 2} \right\},$$

so that the fundamental identity*)

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\left\{ {22 \atop 2} \right\} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\left\{ {11 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \right)$$

can be replaced by

$$(36)\qquad \frac{\partial}{\partial u} \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ {11 \atop 1} \right\}.$$

Making use of the usual notation of Laplace equations**), we find that the expressions for the invariants h and k of equation (34) can be reduced by means of (36) to the forms

$$(37)\qquad h = \left\{ {22 \atop 1} \right\} \left\{ {11 \atop 2} \right\}, \quad k = \left\{ {22 \atop 1} \right\} \left\{ {11 \atop 2} \right\} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v} \log \left\{ {11 \atop 2} \right\}.$$

It is a fundamental property of Laplace equations that when either of the invariants is zero the equation can be integrated completely by quadratures.***) Hence for ruled surfaces and those satisfying the condition

$$(38)\qquad \left\{ {22 \atop 1} \right\} \left\{ {11 \atop 2} \right\} - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v} \log \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0,$$

the function μ can be found by quadratures and then σ directly from the first of (13).

In a similar manner it can be shown that σ satisfies the equation

---

*) Bianchi, vol. 1, p. 77; Germ. trans., p. 52.

**) Darboux, Leçons, vol. 2, p. 23.

***) Ib. p. 24.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$+\left(\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right)\theta=0,$$

and that its invariants are

$$h=\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial^2\log}{\partial u\,\partial v}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix},\quad k=\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}.$$

Examples of surfaces satisfying the condition (38) are readily found. Thus consider the case

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=1,$$

so that (38) reduces to

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=1,$$

whence we have

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=UVe^{uv},$$

where U and V are arbitrary functions of u and v respectively. Hence when the rectangular coordinates of a surface satisfy the equations

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\frac{\partial\log\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+UVe^{uv}\frac{\partial\theta}{\partial v},\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{e^{-uv}}{UV}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\log\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

where φ is an arbitrary function of u and v, the associate surfaces can be found by quadratures.

For example, consider the case

$$\varphi=e^{u+v},\quad U=e^{-u},\quad V=e^{-v};$$

now the above equations are

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v},\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

of which the general solution is

$$\theta=\alpha(u+v)+\beta e^{2(u+v)}+\alpha(u-v)^2+\gamma(u-v)+\delta,$$

where α, β, γ, δ are arbitrary constants.

Another particular solution of equation (38) is

$$(39)\qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{2\sqrt{U'V'}\,e^{U+V}}{1-e^{2(U+V)}},$$

where U and V are arbitrary functions of u and v respectively. As in the preceding case, we put in conformity with (36)

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\varphi}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\varphi}{\partial v},$$

so that the equation (34) reduces to the form

$$\frac{\partial z}{\partial u} + z\frac{\partial}{\partial u}\frac{\log\varphi}{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}} = 0,$$

if we put

$$z = \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\log\varphi}{\partial v}\,\theta.$$

From the former we find

$$z = \frac{V_1\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\varphi},$$

where V_1 is an arbitrary function of v alone; and from the second it is found that the most general value of μ is

$$\mu = \frac{1}{\varphi}\left[\int V_1\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}dv + U_1\right],$$

where $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}$ has the form (39) and U_1 is an arbitrary function of u alone. When this value of μ is substituted in the first of (13), it is found that

$$\sigma = \frac{V_1}{\varphi}.$$

Hence these functions μ and σ enable one to determine by quadratures all the associate surfaces of the surface whose point equations are

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \frac{\partial\log\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{2\sqrt{U'V'}\,e^{U+V}}{1-e^{2(U+V)}}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{2\sqrt{U'V'}\,e^{U+V}}{1-e^{2(U+V)}}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\log\varphi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

where φ is any function of u and v.

The equations (13) can be given an interesting form by the introduction of two functions φ and ψ, defined as follows

$$(40)\qquad \mu = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}},\quad \sigma = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}.$$

On the assumption that ψ is a solution of the equations

$$(41)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

when the above values of μ and σ are substituted in (13) it is found that φ must satisfy the equations

$$(42)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

From the first of these equations it is seen that φ must be of the form

$$(43)\qquad \varphi = f_1(u+v) + f_2(u-v),$$

the functions f_1 and f_2 being of such a character as to satisfy the other of equations (42). It is evident that any linear expression of the coordinates is a solution of equation (41), but it must be of a form to make equation (42) consistent.

Equations (42) may be replaced by

$$(44)\qquad f_1'' + f_2'' - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} \frac{\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}} (f_1' + f_2') - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}} (f_1' - f_2') = 0,$$

where the primes denote differentation with respect to the arguments.

§ 4.

Surfaces of Revolution.

As an example of the foregoing we consider the surfaces of revolution and define them by the equations

$$x = \varrho\cos v_1, \quad y = \varrho \sin v_1, \quad z = \int \sqrt{t^2 - \varrho'^2}\, du_1,$$

where ϱ and t are functions of u_1 alone and the accent indicates differentiation with respect to u_1. The linear element has the form

$$ds^2 = t^2 du_1^2 + \varrho^2 dv_1^2.$$

We assume that the parameter u_1 is chosen such that $D = -D''$; one finds that for this to obtain the functions ϱ and t must satisfy the equation

$$(45)\qquad \varrho'' t^2 - \varrho' t t' + \varrho(\varrho'^2 - t^2) = 0.$$

If we change the parameters in accordance with the equations

$$(46)\qquad u_1 = u + v, \quad v_1 = u - v,$$

the curves $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ are the asymptotic lines. In terms of these parameters the linear element takes the form

$$ds^2 = (t^2 + \varrho^2) du^2 + 2(t^2 - \varrho^2) du dv + (t^2 + \varrho^2) dv^2,$$

where now ϱ and t are functions of $u + v$ alone, and hereafter accents will denote differentiation with respect to this argument.

One finds that

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} &= \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{2\varrho\varrho' t^2 + \varrho^2 t t' - \varrho^3\varrho'}{2\varrho^2 t^2}, \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} &= \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{-2\varrho\varrho' t^2 + \varrho^2 t t' - \varrho^3\varrho'}{2\varrho^2 t^2}. \end{aligned}\right.$$

If these expressions be substituted in equations (41), the resulting equations subtracted and the transformation (46) effected, one gets

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial v_1} = \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial v_1},$$

so that

$$\psi = \varrho V_1 + U_1 \quad \text{or} \quad \psi = U_1, \tag{48}$$

where U_1 and V_1 are functions of u_1 and v_1 respectively. When the first of these values is substituted in the first of equations (41) and account is taken of the relation (45), one gets

$$\varrho t^2 (V_1'' + V_1) + t^2 U_1'' - (tt' - \varrho\varrho') U_1' = 0. \tag{49}$$

From this it follows that $V_1'' + V_1$ is a constant, so that the most general form of V_1 is

$$V_1 = a \cos v + b \sin v + c,$$

where a, b, c are arbitrary constants. From the form of ψ it is evident that there is no loss of generality in taking $c = 0$. Hence equation (49) can be written

$$t^2 U_1'' - (tt' - \varrho\varrho') U_1' = 0,$$

so that either $U_1' = 0$, or

$$\frac{U_1''}{U_1'} = \frac{tt' - \varrho\varrho'}{t^2}.$$

But it follows from (45) that

$$\frac{tt' - \varrho\varrho'}{t^2} = \frac{tt' - \varrho'\varrho''}{t^2 - \varrho'^2},$$

so that

$$U_1 = c_1 \int \sqrt{t^2 - \varrho'^2}\, du_1 + d.$$

Since additive constants will not appear in (40), we remark that the most general form of ψ is

$$\psi = (a \cos v_1 + b \sin v_1)\varrho + c \int \sqrt{t^2 - \varrho'^2}\, du_1, \tag{50}$$

for the second form of (48) is got by taking $V_1 = 0$, that is $a = b = 0$ in (50). One remarks that ψ is a linear function of the coordinates of the given surface.

In particular, we consider the case

$$\psi = \int \sqrt{t^2 - \varrho'^2}\, du_1.$$

Now equation (44) becomes

$$f_1'' + f_2'' + \left(\frac{2\varrho'}{\varrho} - \frac{tt' - \varrho\varrho'}{t^2}\right) f_1' = 0,$$

which may be replaced by

$$f_1'' + \left(\frac{2\varrho'}{\varrho} - \frac{tt' - \varrho\varrho'}{t^2}\right) f_1' - \alpha = 0, \quad f_2'' + \alpha = 0,$$

where α is an arbitrary constant. In consequence of (45) the first of these can be integrated, giving

$$f_1' = \frac{\sqrt{t^2-\varrho'^2}}{\varrho^2}\left[\alpha\int\frac{\varrho^2}{\sqrt{t^2-\varrho'^2}}\,d(u+v)+\beta\right],\quad f_2' = -\alpha(u-v)+\gamma,$$

where β and γ are constants of integration. When these values are substituted in

$$\mu = \frac{f_1'-f_2'}{\sqrt{t^2-\varrho'^2}},\quad \sigma = \frac{f_1'+f_2'}{\sqrt{t^2-\varrho'^2}},$$

we have the functions leading by quadratures to a large group of associates of a surface of revolution.

§ 5.

The cases: $\mu=\sigma$, or $\mu=-\sigma$.

If we put $\sigma=\mu$ in equations (13), they become

$$\frac{\partial\log\mu}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\},\quad \frac{\partial\log\mu}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}.$$

Hence the necessary and sufficient condition that the equations (13) admit of such a solution is

$$(51)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right),$$

and then their determination reduces to quadratures. In consequence of (36) equation (51) reduces to

$$(52)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}.$$

Moreover, the condition that equations (13) admit of the solution $\mu=-\sigma$ is

$$(53)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right),$$

which in like manner reduces to (52).

Suppose that the asymptotic lines on a surface S satisfy (52), and denote by S_1 the associate corresponding to the solution $\mu=\sigma$ and by S_2 the associate for $\mu=-\sigma$. If the functions for these surfaces be indicated by suitable suffixes, we find from (19) that

$$(54)\qquad D_1 = D_1'',\quad D_2 = -D_2'';$$

hence the conjugate system on each surface corresponding to the asymptotic lines on S is isothermal-conjugate.

In terms of the spherical representation of the asymptotic lines of S the condition (52) may be written

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}', \tag{55}$$

and (35) becomes

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'. \tag{56}$$

Recalling a fundamental theorem*) concerning the determination of the surfaces whose spherical representation of the asymptotic lines satisfies (55), we have the theorem:

Given a family of curves upon the sphere satisfying the conditions (55) *and* (56); *one determines by quadratures a surface S with this representation of its asymptotic lines and two surfaces S_1 and S_2 with this representation of an isothermal-conjugate system of lines on each, such that* (54) *obtains.*

Consider the surface S_1; from (54) it follows that its asymptotic lines are defined by

$$du^2 + dv^2 = 0.$$

Denoting by α and β parameters referring to the asymptotic lines on S_1, we can put

$$u + iv = 2\alpha, \quad u - iv = 2\beta,$$

so that the equation of the asymptotic lines on S in terms of the parameters of the asymptotic lines on S_1 is

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0,$$

that is, the curves on S corresponding to the asymptotic lines on S_1 are isothermal-conjugate. Since similar results hold for S_2, we have the theorem:

When on an associate surface of a given surface S the conjugate system corresponding to the asymptotic lines on S is isothermal-conjugate, the curves on S corresponding to the asymptotic lines on S_1 are isothermal-conjugate also.

From (54) it follows that

$$D_1 D_2'' + D_1'' D_2 = 0, \tag{57}$$

hence S_1 and S_2 are associates of one another, for as associates of S their tangent planes at corresponding points are parallel. This leads us to inquire under what conditions two surfaces associate to a given surface are associate to one another.

Let S_1 and S_2 be two associates of S corresponding to the pairs of solutions (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2) of equations (13). From (19) we have

$$D_1 = \mu_1 D', \quad D_1'' = \sigma_1 D', \quad D_2 = \mu_2 D', \quad D_2'' = \sigma_2 D',$$

*) Bianchi, vol. 1, p. 156; Germ. trans., p. 126.

so that in order that (57) be satisfied we must have

$$\mu_1 \sigma_2 + \mu_2 \sigma_1 = 0.$$

We replace this equation by

$$\mu_2 = t\mu_1, \quad \sigma_2 = t\sigma_1,$$

where t is an auxiliary function. When these values are substituted in equations (13), and it is noted that μ_1 and σ_1 are solutions of these equations, we have for the determination of t

$$(58) \qquad \frac{\partial \log t}{\partial v} + 2\frac{D_1''}{D_1}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{\partial \log t}{\partial u} + 2\frac{D_1}{D_1''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0.$$

In consequence of the relations*)

$$(59) \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = \frac{D_1}{D_1''}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = \frac{D_1''}{D_1}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1,$$

the condition of integrability of (58) can be written

$$(60) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1.$$

Moreover, equation (14) may be replaced by

$$(61) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_1''}{D_1}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_1}{D_1''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1\right),$$

in consequence of (18). The Codazzi equations for S_1 can be written

$$\frac{\partial \log D_1}{\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1 \frac{D_1''}{D_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \log D_1''}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 \frac{D_1}{D_1''} = 0.$$

From (60) and (61) it follows that the Codazzi equations necessitate the equation

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log\frac{D_1}{D_1''} = 0.$$

Hence the conjugate system on S_1 is isothermal-conjugate and by a proper choice of parameters we have $D_1 = D_1''$ or $D_1 = -D_1''$ according as S_1 is of positive or negative curvature. Then for S_2 we have $D_2 = -D_2''$ or $D_2 = D_2''$. In consequence of the following relations between the symbols formed with respect to a surface referred to its conjugate system and its spherical representation

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = -\frac{D_1''}{D_1}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}', \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = -\frac{D_1}{D_1''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}',$$

it follows that in either of the preceding cases equation (60) reduces to (55). Hence:

---

*) Bianchi, vol. 1, pp. 157, 167; Germ. trans., pp. 127, 135.

The necessary and sufficient condition that two of the associate surfaces of a surface S be associates of one another is that the spherical representation of the asymptotic lines of S satisfy the condition (55); *then there are two associates of S which are the associates of one another and their common conjugate system is isothermal-conjugate for each.*

We have seen that these two surfaces are given by quadratures; and that $\mu = \sigma$ for one and $\mu = -\sigma$ for the other.

When S is a quadric surface, it follows from (58) that t is a constant which may be taken equal to $+1$. This is the case previously treated when we took $U_1 = \pm V_1 = 1$ in (26) and $U' = \pm V' = 1$ in (28).

A ruled surface may be defined by the equations*)

$$(62)\qquad x = \xi + lu, \quad y = \eta + mu, \quad z = \zeta + nu,$$

where the functions $\xi, \eta, \zeta; l, m, n$ are functions of v alone. Now the curves $v = \text{const.}$ are the generators. If we put

$$(63)\quad l'^2 + m'^2 + n'^2 = M^2,\ l'\xi' + m'\eta' + n'\zeta' = N,\ l\xi' + m\eta' + n\zeta' = \cos\theta,$$

where the primes indicate differentiation with respect to v, we find

$$E = 1, \quad F = \cos\theta, \quad G = M^2u^2 + 2Nu + 1.$$

Now

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{(M^2u^2+2Nu+1)[(\cos\theta)' - (M^2u+N)] - \cos\theta(u^2MM' + uN')}{M^2u^2 + 2Nu + \sin^2\theta},$$

and the equation of condition (52) is found by equating to zero the derivative with respect to v of the expression for $\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$. This reduces to an equation of the form

$$2M^5M'u^5 + au^4 + bu^3 + cu^2 + du + e = 0,$$

where a, b, c, d, e represent determinate functions of v, which together with MM' are consequently equal to zero. Evidently M cannot be zero if the surface is real, hence we consider the case $M' = 0$. From (63) we get

$$(64)\qquad l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0,$$

to which may be added

$$(65)\qquad l'l + m'm + n'n = 0.$$

In order that the curves $u = \text{const.}$ on the surface (62) be asymptotic, three equations of condition must be satisfied by the functions $\xi, \eta, \zeta; l, m, n$, one of which is**)

$$\begin{vmatrix} l'' & m'' & n'' \\ l' & m' & n' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

*) Bianchi, vol. 1, p. 254; Germ. trans. p. 218.

**) Bianchi, vol. 1, p. 258; Germ. trans. p. 221.

which is inconsistent with (64) and (65). Hence the skew ruled surfaces do not furnish a solution of equation (52).

§ 6.

Surfaces of Translation with Isothermal-Conjugate Generators.

A solution of equation (51) and consequently (52) is given by those surfaces for which

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\} = \left\{ {22 \atop 1} \right\}, \quad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \left\{ {11 \atop 2} \right\}. \tag{66}$$

It is evident that the rectangular coordinates of such a surface are simultaneous solutions of equations of the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} &= \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial v}, \end{aligned} \tag{67}$$

where ϱ is a function of u and v, whose form will be determined later. It is evident that the most general solution is of the form

$$\theta = f(u+v) + \varphi(u-v). \tag{67'}$$

Hence these surfaces are surfaces of translation and the curves

$$u + v = \text{const.}, \quad u - v = \text{const.}$$

are the generators. If we put

$$2u_1 = u + v, \quad 2v_1 = u - v, \tag{68}$$

the equation of the asymptotic lines in terms of these new parameters is

$$du_1^2 - dv_1^2 = 0;$$

consequently, the generatrices are isothermal-conjugate.

Moreover, every surface of translation with real isothermal-conjugate generatrices belongs to this class. For, in terms of the parameters of the asymptotic lines such a surface is defined by

$$x = f_1(u+v) + \varphi_1(u-v), \; y = f_2(u+v) + \varphi_2(u-v), \; z = f_3(u+v) + \varphi_3(u-v),$$

where u and v are real when the surface has negative curvature and conjugate imaginary when the curvature is positive. We write the point equations in the form

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + l \frac{\partial \theta}{\partial u} + m \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + l_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} + m_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Substituting the above value for x and subtracting, we get

$$(l - l_1)(f_1' + \varphi_1') + (m - m_1)(f_1' - \varphi_1') = 0, \tag{69}$$

where the primes indicate differentiation with respect to the argument. If $l = l_1$ and $m \neq m_1$, then $f_1' = \varphi_1'$; in this case

$$f_1 = a(u+v) + \alpha, \quad \varphi_1 = a(u-v) + \alpha_1.$$

Similar results obtain for $f_2, f_3, \varphi_2, \varphi_3$, so that we have

$$x = 2au + (\alpha+\alpha_1), \quad y = 2bu + (\beta+\beta_1), \quad z = 2cu + (\gamma+\gamma_1),$$

that is, the locus is a straight line. The case $l \neq l_1$, $m = m_1$ is entirely similar.

Consider now the case $l \neq l_1$, $m \neq m_1$. Since equation (69) must be satisfied also by $f_2, \varphi_2, f_3, \varphi_3$, we must have

$$\frac{f_1' + \varphi_1'}{f_1' - \varphi_1'} = \frac{f_2' + \varphi_2'}{f_2' - \varphi_2'} = \frac{f_3' + \varphi_3'}{f_3' - \varphi_3'},$$

that is,

$$\frac{f_1'}{\varphi_1'} = \frac{f_2'}{\varphi_2'} = \frac{f_3'}{\varphi_3'}.$$

From this it follows that

$$f_2' = af_1', \ \varphi_2' = a\varphi_1', \ f_3' = bf_1', \ \varphi_3' = b\varphi_1',$$

where a and b are constants, so that

$$y = ax + c, \quad z = bx + d,$$

that is, the locus is a straight line. Hence the only possibility is afforded by $l = l_1$, $m = m_1$, which is the case given by equation (67).

Suppose that we have given such a surface S. Now equations (13) can be written

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} + (\mu - \sigma)\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u} + (\sigma - \mu)\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0;$$

a particular solution is

$$\mu = \sigma = \text{const.}$$

Without loss of generality this constant may be taken equal to unity, and then from (11) it follows that the corresponding associate surface is given by

$$x_1 = f_1(u+v) - \varphi_1(u-v), \quad y_1 = f_2(u+v) - \varphi_2(u-v),$$
$$z_1 = f_3(u+v) - \varphi_3(u-v).$$

From (19) it follows that the second quadratic forms of these surfaces can be written

$$\lambda\, du\, dv, \quad \lambda(du^2 + dv^2),$$

and in terms of the parameters u_1 and v_1 (68) they are

$$\lambda(du_1^2 - dv_1^2), \quad 2\lambda(du_1^2 + dv_1^2).$$

Combining these results, we have the theorem: *Given a surface of translation whose generators form a real isothermal-conjugate system; one of its*

associates is a surface of the same kind and the generators of the two surfaces are in correspondence.

We proceed to the determination of the function ϱ so that equations (67) shall be consistent. If one substitute the values of $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}$ and $\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}$ from (67) in the equation

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right),$$

and they be used in the reduction, it can be shown that this equation is reducible to

$$A\frac{\partial\theta}{\partial u} + B\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0, \tag{70}$$

where

$$A = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial v^2}\right) + 2\,\frac{\partial \log\varrho}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial v^2}\right),$$

$$B = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial v^2}\right) + 2\,\frac{\partial \log\varrho}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial v^2}\right).$$

Since equation (70) must be satisfied by x, y, z, we must have $A = B = 0$. Integrating these equations, we get

$$\frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log\varrho}{\partial v^2} = c\varrho^2,$$

where c denotes an arbitrary constant. For $c = 0$, the most general value of ϱ is given by

$$\log\varrho = F_1(u+v) + F_2(u-v), \tag{71}$$

and for $c \neq 0$, by

$$\varrho^2 = \frac{16 F_1' F_2' e^{2(F_1+F_2)}}{c[1-e^{2(F_1+F_2)}]^2}, \tag{72}$$

where F_1 and F_2 are arbitrary functions of $u+v$ and $u-v$ respectively, and the primes indicate differentiation with respect to the argument.

Consider first the case (71), for which equations (67) become

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = (F_1' + F_2')\frac{\partial\theta}{\partial u} + (F_1' - F_2')\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Substituting the value (67′) of θ we get

$$f'' + \varphi'' = 2(F_1' f' + F_2' \varphi'), \tag{72′}$$

from which it follows that

$$f'' - 2F_1' f' = -\varphi'' + 2F_2'\varphi' = \alpha,$$

where α is an arbitrary constant. Integrating we get

$$\begin{aligned} f' &= \alpha e^{2F_1}\int e^{-2F_1}\, d(u+v) + \beta e^{2F_1}, \\ \varphi' &= -\alpha e^{2F_2}\int e^{-2F_2}\, d(u-v) + \gamma e^{2F_2}, \end{aligned} \tag{73}$$

where β and γ are constants of integration.

When the value of ϱ from (72) and of θ from (67') are substituted in either of equations (67), one gets

$$(74)\qquad f'' - \frac{F_1''}{F_1'} f' + \varphi'' - \frac{F_2''}{F_2'} \varphi' = -2(F_1'f' + F_2'\varphi') \frac{e^{F_1+F_2} + e^{-(F_1+F_2)}}{e^{F_1+F_2} - e^{-(F_1+F_2)}}.$$

If this equation be differentiated successively with respect to $u+v$ and $u-v$, one gets

$$(75)\qquad \begin{aligned} &(F_1'f'' + F_1''f')F_2' + (F_2'\varphi'' + F_2''\varphi')F_1' \\ &= 2(F_1'f' + F_2'\varphi')F_1'F_2' \frac{e^{F_1+F_2} + e^{-(F_1+F_2)}}{e^{F_1+F_2} - e^{-(F_1+F_2)}}. \end{aligned}$$

This equation is satisfied by $F_1' = 0$ or $F_2' = 0$, in which case equations (67) become

$$(76)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0;$$

these are the point equations of the paraboloids*). Excluding this case for the present, we multiply equation (74) by $F_1'F_2'$ and add the result to (75); this gives

$$f'' + \varphi'' = 0,$$

which is the same as (76). Hence the paraboloids and the surfaces whose coordinates are given by two quadratures by means of (73) are the surfaces of translation whose generatrices are real and isothermal-conjugate.

A case similar to the foregoing is that for which

$$(77)\qquad \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0;$$

when these conditions are satisfied, a solution of equations (13) is $\mu = -\sigma = 1$. The point equations of the corresponding surfaces S are

$$(78)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \dfrac{\partial \log\varrho}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} - \dfrac{\partial \log\varrho}{\partial v}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\dfrac{\partial \log\varrho}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \dfrac{\partial \log\varrho}{\partial v}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}, \end{cases}$$

of which the most general integral has the form

$$(79)\qquad \theta = f(u+iv) + \varphi(u-iv);$$

hence the surfaces are surfaces of translation whose generatrices are

$$u + iv = \text{const.}, \quad u - iv = \text{const.},$$

where u and v are real, or conjugate imaginary, according as the curvature of S is negative or positive.

---

*) Possible Triply Asymptotic Systems of Surfaces. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 7 (1901), p. 304.

In a manner similar to that followed in the preceding case it can be shown that for every surface of translation defined by equations of the form (79) the generators are isothermal-conjugate and the point equations in terms of parameters referring to asymptotic lines are of the form (78).

Given such a surface, defined by

$$(80)\qquad x = f_1(u+iv) + \varphi_1(u-iv), \quad y = f_2 + \varphi_2, \quad z = f_3 + \varphi_3.$$

The associate surface corresponding to the values $\mu = -\sigma = 1$ is defined by

$$x_1 = i(f_1 - \varphi_1), \quad y_1 = i(f_2 - \varphi_2), \quad z_1 = i(f_3 - \varphi_3).$$

Hence the theorem:

Given a surface of translation defined by (80) *with the curves $u = const.$, $v = const.$ asymptotic; one of its associates is a surfaee of the same kind, and the generators of the two surfaces are isothermal-conjugate and in correspondence.*

When we consider equations (78) in order to determine under what conditions they are consistent, it is found that their most general form is

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = (F_1' + F_2')\frac{\partial\theta}{\partial u} - i(F_1' - F_2')\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

which becomes, when θ is replaced by its value (80),

$$f'' + \varphi'' = 2(F_1' f' + F_2' \varphi').$$

Since this equation has the same form as (72′), it follows that f' and φ' are given by (73) in which now F_1 and F_2 denote arbitrary functions of $u + iv$ and $u - iv$ respectively.

The foregoing results enable us to tell under what conditions equations (42) are illimitably integrable. Excluding the case of the quadrics, it is seen from (71) that the necessary and sufficient condition is

$$(81)\qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}} = F_1' + F_2', \qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}} = F_1' - F_2',$$

where F_1 and F_2 are arbitrary functions of $u + v$ and $u - v$ respectively. Taking the logarithmic derivative of the first with respect to v and making use of (41), we find in consequence of the second of (81)

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + (F_1' - F_2') + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\log\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}(F_1' + F_2')\right],$$

from which by means of the first of (81), we get

$$(82)\qquad (F_1' - F_2') + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

The logarithmic derivative with respect to u of the second of (81) gives

$$(83)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+(F_1'+F_2')=\frac{\partial}{\partial u}\log\left[(F_1'-F_2')\frac{\partial\psi}{\partial v}\right].$$

From these two equations $\log\frac{\partial\psi}{\partial v}$ can be found by quadratures provided that

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log(F_1'-F_2')=0.$$

Hence we must have

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=(F_1'-F_2')\frac{U}{V},$$

where U and V are functions of u and v respectively. From (81) it follows that

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=(F_1'+F_2')\frac{V}{U}.$$

In determining $\frac{\partial\psi}{\partial v}$ an arbitrary constant factor is introduced which may be taken equal to one, and then $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ is given directly from (81). Thus, if in conformity with (36) we put

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\varrho}{\partial u},\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\log\varrho}{\partial v},$$

we find from (81), (82) and (83)

$$(84)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u}=\varrho V e^{F_1+F_2},\quad \frac{\partial\psi}{\partial v}=\varrho U e^{F_1+F_2}.$$

Hence, whenever the point equations of a surface referred to the asymptotic lines can be written in the form

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{F_1'+F_2'}{U}V\frac{\partial\theta}{\partial v},\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{F_1'-F_2'}{V}U\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\log\varrho}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

a large group of the associate surfaces can be found by quadratures; they correspond to the values

$$\mu=\frac{f'+\varphi'}{\varrho U e^{F_1+F_2}},\quad \sigma=\frac{f'-\varphi'}{\varrho V e^{F_1+F_2}},$$

where f' and φ' are given by (73)*).

---

*) It should be remarked that although (81) gives the necessary and sufficient conditions that (42) be integrable, the definition of the functions φ and ψ (40) does not necessitate the relation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right).$$

§ 7.

Associate Surfaces Referred to their Common Conjugate System.

Thus far we have studied the relations between a surface and its associates when the former was referred to its asymptotic lines, or a conjugate system with equal tangential invariants. There is another kind of parametric system which is of value in this connection. It is the conjugate system which corresponds to a conjugate system on one of the associates. This system is real when either of the surfaces has positive curvature. When we are considering such a system, we shall refer to it as the *common conjugate* system for the two surfaces. In the first place we shall determine the equation of this system when the surface S is referred to any lines, $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

If for the present we denote by u', v' the parameters of the common conjugate system and indicate by an accent that certain functions are expressed in terms of these parameters, we have

$$(D')' = D\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + D'\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'}\right) + D''\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'},$$

and similarly for $(D_1')'$, the corresponding function for the associate surface S_1. The directions of the new lines in terms of the old are given by

$$\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}du^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'}\right)du\,dv + \frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}dv^2 = 0.$$

Since the new parametric lines are to form conjugate systems, the parameters u' and v' must be so chosen that $(D')'$ and $(D_1')'$ shall vanish. This gives three equations from which by the elimination of the differential quotients we get

$$(85)\qquad \begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ D'' & D' & D \\ D_1'' & D_1' & D_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Before proceeding to a study of these surfaces when this system is parametric, we shall point out several consequences of this equation.

When the curvature of S is positive, the curvature of S_1 is negative and consequently its asymptotic lines are real. If the latter system be parametric, equation (85) reduces to

$$D\,du^2 - D''dv^2 = 0.$$

When in particular the parametric system on S is isothermal-conjugate, its parameters can be chosen so that

$$u' = u + v, \qquad v' = u - v.$$

When this transformation is effected upon the second quadratic form for S_1, it is found that

$$(D_1)' = -(D_1'')'$$

and since S is associate, we have in consequence of (9)

$$(D)' = (D'')'.$$

When S has negative curvature and S_1 positive, the results are similar to the foregoing. But if S_1 also has negative curvature and the conjugate system on S corresponding to the asymptotic lines on S_1 is isothermal-conjugate, the equation of the common conjugate system can be reduced to

$$du^2 + dv^2 = 0,$$

so that the common conjugate lines are imaginary. Hence the theorem:

When one of two associate surfaces has positive total curvature and the conjugate system on one corresponding to the asymptotic lines on the other is isothermal-conjugate, the common conjugate system is real and isothermal-conjugate for both surfaces; and conversely.

In passing we remark that in the infinitesimal deformation of S corresponding to the characteristic function arising from S_1 the common conjugate system remains conjugate; moreover, it is isothermal-conjugate on the new surface, if it has this property on S*).

We consider now the case where S and S_1 are referred to the common conjugate system. From (3) it follows that μ and σ are zero, so that equations (1) become

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \tau \frac{\partial x}{\partial v}; \tag{86}$$

and from (2) and (3) we have

$$\begin{aligned} E_1 &= \lambda^2 E, \quad F_1 = \lambda\tau F, \quad G_1 = \tau^2 G, \\ D_1 &= \lambda D, \quad D_1' = D' = 0, \quad D_1'' = \tau D''. \end{aligned} \tag{87}$$

In consequence of the Gauss equation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

the condition of integrability of equations (86) is reducible to

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial v} + (\lambda - \tau) \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] \frac{\partial x}{\partial u} - \left[\frac{\partial \tau}{\partial u} + (\tau - \lambda) \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Since this equation must be satisfied also by y and z, we must have

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + (\lambda - \tau) \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} + (\tau - \lambda) \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0. \tag{88}$$

*) Infinitesimal deformation of surfaces, Amer. Journal, vol. 24 (1902), p. 189.

Each solution of this system enables one to find by means of quadratures a surface corresponding to S with parallelism of tangent planes.

In order that the two surfaces S and S_1 be associate, it is necessary, according to (9) and (87), that

$$\tau = -\lambda. \tag{89}$$

Now the equations (88) become

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0, \tag{90}$$

so that the necessary and sufficient condition for the existence of such a function λ is

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \tag{91}$$

Whenever this condition is satisfied by a conjugate system on S, the function λ, and consequently an associate of S, can be found by quadratures and the corresponding lines on S_1 form a conjugate system. Since the condition (91) expresses the equality of the invariants of the point equation of S, namely

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0,$$

we have the following theorem due to Cosserat*):

The problem of the infinitesimal deformation of a surface is equivalent to that of finding conjugate systems with equal point invariants.

Since S and S_1 have the same spherical representation and the relations (87) and (89) obtain, the following relations exist between the Christoffel symbols for the two surfaces referred to their common conjugate system**):

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = -\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = -\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1 = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1 = -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}. \tag{92}$$

Incidentally we remark that it follows from the first two of these equations that the parametric curves on S_1 have equal point invariants also — a result which is evident from the reciprocal character of the relation between S and S_1.

---

*) Annales de Toulouse, vol. 8, E. 39.

**) Bianchi, vol. 1, p. 167; Germ. trans. p. 135.

§ 8.

Surfaces of Translation and Surfaces of Voss.

The generators of a surface of translation have equal point invariants, for when these lines are parametric,

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

The function λ is now a constant which may be taken equal to unity. If the equations of the surface be written in the form

$$(92') \qquad x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v),$$

the corresponding associate will be defined by

$$x_1 = f_1 - \varphi_1, \quad y_1 = f_2 - \varphi_2, \quad z_1 = f_3 - \varphi_3.$$

Hence *for each surface of translation there is an associate surface of translation and the generatrices on both form the common conjugate system.* A particular case was considered in § 6.

Again, when S is a surface of Voss and the geodesic conjugate system has equal point invariants, the corresponding associate is a surface of Voss. For, if this system be parametric, we shall have

$$(93) \qquad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

and hence from (42) we have that $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}_1$ and $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}_1$ are zero.

If equations (93) be satisfied and D' be zero, the Codazzi equations*) reduce to

$$\frac{\partial \log D}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

so that if equation (91) is to be satisfied, we must have

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{D}{D''} = 0;$$

consequently the parametric curves are isothermal-conjugate. Hence:

The necessary and sufficient condition that a Voss surface admit of an associate which has a conjugate system corresponding to the geodesic conjugate system is that the latter be isothermal-conjugate; the associate surface also is a Voss surface with its geodesic conjugate system isothermal-conjugate and in correspondence with the similar system on the given surface.

We proceed to the determination of such surfaces of Voss. In con-

*) Bianchi, vol. 1, p. 119; Germ. trans. p. 91.

sequence of the relations (18), the necessary and sufficient condition that the conjugate parametric curves in both families be geodesic is

(94) $$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0,$$

and that they be isothermal-conjugate at the same time is*)

(95) $$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}'.$$

Equations (94) are equivalent to

(96) $$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

These equations as well as (95) are satisfied by $e = g = 0$. In this case the conjugate system represented by the parametric rectilinear generatrices of the sphere is composed of the lines of length zero of the surface. Hence *the minimal surfaces are surfaces of Voss with a geodesic isothermal-conjugate system of lines; the latter are the minimal curves.* In this case the surface can be defined by equations of the form (92′), where

$$\Sigma\varphi_1'^2 = 0, \quad \Sigma\psi_1'^2 = 0.$$

Now the associate corresponding to the constant value of λ is the adjoint of the given minimal surface, or a homothetic of it.

Another solution of (96) is

$$e = 0, \quad g = 1.$$

Now equation (95) and the Gauss equation for the sphere assume the forms

$$\frac{\partial^2}{dv^2}\frac{1}{f} = 0, \quad \frac{1}{f}\frac{\partial^2}{du\,dv}\log\frac{1}{f} = 1,$$

of which, as is readily shown, there is no common solution.

We pass now to the consideration of the most general solution of equations (96); then e is a function of u alone and g of v alone. By a suitable choice of parameters we can put

(97) $$e = g = 1, \quad f = -\cos\omega,$$

where ω is determined by the Gauss equation for the sphere which takes the form

(98) $$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} = \sin\omega.$$

When these values are substituted in (95), it is found that ω must satisfy also

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\tan\frac{\omega}{2} = 0.$$

*) Bianchi, Lezioni, vol. 1, p. 169; Germ. trans. p. 137.

The most general solution of this equation is

$$\tan\frac{\omega}{2} = \varphi(u+v)\cdot\psi(u-v), \tag{99}$$

where φ and ψ are arbitrary in form.

From (97) it is seen that the curves on the sphere are the spherical representation of the asymptotic lines upon a surface Σ whose linear element can be written in the form

$$ds^2 = \varrho^2(du^2 + 2\cos\omega\, du dv + dv^2),$$

where

$$\frac{1}{\varrho^2} = -K.$$

Hence a given Voss surface, other than a minimal surface, with isothermal-conjugate geodesic lines and the associate Voss surface are associates of a pseudospherical surface and the asymptotic lines on the latter correspond to the geodesic system on the former.

We proceed to the determination of the forms of the functions φ and ψ in (99) in order that equation (95) be satisfied, and we consider first the case $\psi = \text{const.}$, which can be taken equal to one. Since now ω is a function of $u+v$ alone, Σ is a surface of revolution; if it is of the parabolic type, $\tan\frac{\omega}{2} = e^{u+v}$, but for the elliptic and hyperbolic types ω is an elliptic function of $u+v$.*) Let S be a Voss surface of positive curvature, then since (95) obtains**), we have $D = D''$, so that to get S from Σ the functions μ and σ must be equal. Equations (13) reduce to

$$\frac{\partial \log\mu}{\partial u} = -\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega}\,\omega', \quad \frac{\partial\log\mu}{\partial v} = -\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega}\,\omega',$$

of which the integral is (equating the constant factor of integration to $+1$)

$$\mu = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\omega}{2}\cdot$$

Since $E = G$ for Σ, the same is true for S; hence the isothermal-conjugate geodesic system on S is composed of the characteristic lines***), for now

$$\frac{D}{E} = \frac{D''}{G}, \quad D' = 0.$$

For both S and Σ the directions of the lines of curvature are given by

$$du^2 - dv^2 = 0,$$

*) Bianchi, vol. 1, p. 226; Germ. trans. p. 192.

**) l. c., p. 169; p. 136.

***) Three particular systems of lines on a surface, Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 5 (1904) p. 429.

hence they correspond. Moreover, the linear element of S in terms of parameters referring to the lines of curvature is of the form

$$ds^2 = U(du^2 + dv^2),$$

where U is a function of u alone; consequently S also is a surface of revolution. In like manner it can be shown that the other Voss surface is a surface of revolution of negative curvature.

Finally, we consider the case when neither φ nor ψ is a constant. Equation (95) assumes the form

$$\varphi''\psi - \psi''\varphi - 2\varphi\psi\,\frac{\varphi'^2\psi^2 - \psi'^2\varphi^2}{1 + \varphi^2\psi^2} = \varphi\psi.$$

If we take φ and ψ for the independent variables and put

$$\varphi_1 = \varphi'^2, \quad \psi_1 = \psi'^2,$$

the above equation becomes

$$(100) \quad \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi} - \frac{\psi_1'}{\psi}\right)(1 + \varphi^2\psi^2) - 2(\varphi_1\psi^2 - \psi_1\varphi^2) - 2(1 + \varphi^2\psi^2) = 0,$$

where now the accents indicate differentiation with respect to φ or ψ. If this equation be differentiated with respect to φ and then with respect to ψ, the result can be reduced to

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi} - \frac{\varphi_1'}{\varphi^2} - 2 = \frac{\psi_1''}{\psi} - \frac{\psi_1'}{\psi^2} + 2.$$

Each side of this equation must equal a constant, say α, so that we find by quadratures

$$\varphi_1 = (\alpha + 1)\,\varphi^2 \log\varphi + \beta\varphi^2 + \delta, \quad \psi_1 = (\alpha - 1)\,\psi^2 \log\psi + \gamma\psi^2 + \varepsilon,$$

where β, γ, δ, ε are constants of integration. But these expressions do not satisfy equation (100). Hence:

Minimal surfaces and certain associates of pseudopherical surfaces of revolution are the only Voss surfaces with an isothermal-conjugate system of geodesic lines.

§ 9.

Conform Representation of Associate Surfaces. Limit Surfaces.

Let S and S_1 be two associate surfaces referred to their common conjugate system. From (87) it follows that the respective linear elements can be written

$$(101) \quad \begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ ds_1^2 &= \lambda^2(E du^2 - 2F du dv + G dv^2). \end{aligned}$$

From these it follows that the only cases in which the two surfaces are capable of conformal representation upon one another with these conjugate lines in correspondence are

$$1^0 \;\; E = G = 0; \quad 2^0 \;\; E = F = 0; \quad 3^0 \;\; F = 0.$$

We met with the first case earlier and found that the two surfaces are minimal, one the adjoint of the other or its homothetic. For the second case the linear element is a perfect square and consequently both surfaces are imaginary. In the third case the common conjugate system is composed of the lines of curvature on each surface. Now equation (91) is

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{E}{G} = 0,$$

so that S is an isothermic surface. Moreover, it follows from (101) that S_1 also is isothermic. Hence the theorem:

When the common conjugate system on two associate surfaces is composed of the lines of curvature for one surface, it is composed of the lines of curvature of the other and both surfaces are isothermic.

Let S be an isothermic surface with the lines of curvature parametric and the parameters isothermic; then equations (90) are

$$\frac{\partial \log \lambda E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \log \lambda E}{\partial u} = 0,$$

whence

$$\lambda = \frac{c}{E},$$

c being the constant of integration which may be taken equal to $+1$. Hence the associate surface S_1 is given by quadratures of the form

$$dx_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial x}{\partial u} du - \frac{\partial x}{\partial v} dv\right).$$

From this one finds for the linear element of S_1

$$ds_1^2 = \frac{1}{E}(du^2 + dv^2).$$

These results lead to the Bour-Darboux theorem*):

Every isothermic surface admits of an associate isothermic surface which can be found by quadratures.

The foregoing theorems enable us to establish without difficulty a theorem due to Ribaucour. Among all the surfaces applicable to a given surface there are those whose curvature is a maximum or minimum so to speak, that is the mean curvature is a maximum or minimum. Ribaucour has called them the *limit surfaces* of the group.

The necessary and sufficient condition that S be a limit surface is that the first variation of the mean curvature be zero. Let S be referred to its lines of curvature and let S' denote a surface arising from an infinitesimal deformation of S. We have found**) that the functions $(D)'$ and $(D'')'$ for S' have the form

---

*) Leçons, vol. 2, p. 243.

**) Infinitesimal Deformation of Surfaces, Amer. Journal, vol. 24 (1902), p. 189.

$$(D)' = D + \varepsilon(DD_1' - D'D_1)\varrho, \quad (D'')' = D'' + \varepsilon(D'D_1'' - D_1'D'')\varrho,$$

where D_1, D_1', D_1'' are the fundamental quantities for the associate of S determining the deformation, ε is a small constant and ϱ is a function of u and v whose form is of no importance here except that it cannot equal zero. Since S and S' are applicable and

$$F = F' = D' = 0,$$

the mean curvature of S' can be given the form

$$\frac{(D)'}{E} + \frac{(D'')'}{G} = \frac{D}{E} + \frac{D''}{G} + \varepsilon D_1'\varrho\left(\frac{D}{E} - \frac{D''}{G}\right).$$

The vanishing of the first variation gives the equation

$$D_1'\left(\frac{D}{E} - \frac{D''}{G}\right) = 0.$$

Neglecting the case of the sphere, we have D_1' equal to zero, that is the parametric system on S_1 is composed of the lines of curvature. Hence it follows from the above results that

The limit surfaces are isothermic.

When S is a sphere, it is the limit surface.

Zur Theorie der äquidistanten Kurven auf einer Fläche.

Von

R. von Lilienthal in Münster i./W.

Es ist eine eigentümliche Erscheinung, daß diejenigen beiden Scharen konjugierter Kurven auf einer positiv gekrümmten Fläche, bei denen jede Einzelkurve der einen Schar mit jeder Einzelkurve der anderen Schar einen Winkel bildet, der das Minimum aller Winkel darstellt, die an der betreffenden Stelle zwischen konjugierten Tangenten möglich sind, so selten betrachtet wurden, während die entsprechenden Kurven auf einer negativ gekrümmten Fläche, nämlich die Asymptotenlinien (oder Haupttangentenkurven), sich allgemeiner Beachtung erfreuen. Bereits Ch. Dupin (Développements de géométrie, Paris 1813, S. 192) und K. Peterson (Über Kurven und Flächen, Leipzig 1868, S. 35) fanden die wesentlichsten Eigenschaften der fraglichen Linien, sodann wurden sie von neuem von R. Hoppe (Archiv der Mathem. u. Physik 1883, Bd. 69, S. 19), von E. Pucci (Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti 1889, 1. Semester, Bd. 5, S. 501, vergl. daselbst V. Reina, S. 881) und von R. Raffy (Bulletin de la Société Mathém. de France 1902, Bd. 30, S. 226) untersucht. Keiner der drei letzteren erwähnt die frühere Literatur über den Gegenstand. Hoppe nennt die fraglichen Linien „Minimallinien", Pucci nennt sie zusammen mit den Asymptotenlinien der negativ gekrümmten Flächen „charakteristische Kurven", Raffy nennt sie „Diagonallinien". Nun werden die Worte „Minimallinien" und „Diagonallinien" bereits in anderem Sinne gebraucht, ich schließe mich daher der Bezeichnung *„charakteristische Linien"* an, in der jedoch die Asymptotenlinien nicht mit einbegriffen sein sollen.

Da in den gebräuchlichen Lehrbüchern der Differentialgeometrie die in Rede stehenden Kurven nicht erwähnt werden, will ich zunächst die Differentialgleichung dieser Linien kurz herleiten.

Sind R_1 und R_2 die als positiv vorausgesetzten Hauptkrümmungsradien einer positiv gekrümmten Fläche, und bedeuten φ_1 und φ_2 die

Winkel, welche zwei konjugierte Tangenten in einem regulären Flächenpunkt mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie bilden, so hat man bekanntlich:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{R_2}{R_1},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{R_2 \operatorname{cotg}\varphi_1 + R_1 \operatorname{tg}\varphi_1}{R_2 - R_1}.$$

Wir setzen φ_1 und φ_2 als positiv und $\varphi_2 > \varphi_1$ voraus. Soll $\varphi_2 - \varphi_1$ ein Minimum sein, so wird:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

Hiernach ist sowohl der Krümmungshalbmesser des durch φ_1, wie der des durch φ_2 bestimmten Normalschnitts gleich $\frac{R_1 + R_2}{2}$.

Die Formel für den Krümmungshalbmesser eines Normalschnitts liefert jetzt die Differentialgleichung der charakteristischen Linien in der Gestalt:

$$\frac{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(LN - M^2)},$$

oder:

$$\begin{aligned} &\{L(GL - EN) + 2M(EM - FL)\}du^2 \\ &+ 2\{M(GL - EN) + 2N(EM - FL)\}dudv \\ &- \{N(GL - EN) + 2M(FN - GM)\}dv^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind demnach charakteristische Linien, wenn sowohl M wie $GL - EN$ verschwindet.

Unter *„äquidistanten"* Kurven auf einer Fläche versteht man nach A. Voss ein solches System von Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, für das

$$ds^2 = du^2 + 2Fdudv + dv^2$$

wird, bei dem also die Bogenlängen der Einzelkurven zu Parametern genommen werden können. Auf den Flächen von konstanter negativer Krümmung sind sowohl die Asymptotenlinien wie ihre sphärischen Bilder äquidistant, man kann aber auch leicht zeigen, daß nur für diese Flächen die Asymptotenlinien oder ihre sphärischen Bilder äquidistant sind. Gilt etwas Entsprechendes für die charakteristischen Kurven?

In Begründung und Erweiterung eines Vortrages, den ich auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg 1904 gehalten habe, behandle ich im folgenden die *Bestimmung derjenigen Flächen, bei denen die charakteristischen Kurven oder deren sphärische Bilder äquidistant sind.*

Im ersten Falle hat man es mit Schiebungsflächen zu tun, da aus den Gleichungen:

$$M = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \quad \text{folgt:} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\, dv} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Für die hierher gehörenden, nicht Weingartenschen, Flächen wird im folgenden das Linienelement bestimmt und als Beispiel die schon von Raffy angegebene Fläche mit der Gleichung: $e^{mz} = \cos mx \cos my$ gefunden. Die hierher gehörenden Weingartenschen Flächen werden vollständig bestimmt, es ergeben sich ausschließlich Umdrehungsflächen, auf die um so mehr hingewiesen sei, als sie wegen ihrer Einfachheit und wegen ihrer geometrischen Eigenschaften ein vorzügliches Veranschaulichungsmittel in der Flächentheorie darstellen.

Hinsichtlich der Flächen, bei denen die sphärischen Bilder der charakteristischen Kurven äquidistant sind, wird im folgenden zunächst gezeigt, daß sie zu den Umdrehungsflächen gehören, worauf ihre vollständige Bestimmung gelingt. Es ergeben sich drei Arten von Umdrehungsflächen und entsprechend drei Arten von äquidistanten Kurven auf der Einheitskugel. Faßt man diese Kurven als die sphärischen Bilder der Asymptotenlinien von Flächen konstanter negativer Krümmung auf, so erweisen sich die letzteren als die Umdrehungsflächen der fraglichen Art.

§ 1.

Bedingungen für die Äquidistanz der charakteristischen Linien.

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser einer nicht abwickelbaren Fläche — R_1, R_2 — setzen wir als positive Größen voraus und denken die Winkel φ_1, φ_2, die von den Tangenten der charakteristischen Linien in einem regulären Flächenpunkt mit der zu R_1 gehörenden Krümmungslinie gebildet werden, durch die Gleichungen bestimmt:

$$\sin\varphi_1 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}, \quad \cos\varphi_1 = \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}},$$
$$\sin\varphi_2 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}, \quad \cos\varphi_2 = -\sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}.$$

Mit u und v bezeichnen wir die Parameter der Krümmungslinien und setzen:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Sind p und q die Parameter eines äquidistanten Kurvensystems auf der Fläche, so haben wir:

$$ds^2 = dp^2 + 2\cos\varphi\, dp\, dq + dq^2.$$

Besteht das fragliche Kurvensystem aus charakteristischen Linien, so muß sein:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \sqrt{\frac{R_1}{R_1+R_2}}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1+R_2}}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -\sqrt{\frac{R_1}{R_1+R_2}}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_1+R_2}}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}},$$

wozu vier weitere Gleichungen treten, die sich aus den hingeschriebenen durch Vertauschen von x mit y und z ergeben.

Wir fassen p und q als Funktionen von u und v auf und erhalten, wenn $\frac{\partial x}{\partial u}$ durch $\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ durch $\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial v}$ ersetzt wird:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{2}\,\dfrac{\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_1}}, & \dfrac{\partial p}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{2}\,\dfrac{\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_2}}, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{E}}{2}\,\dfrac{\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_1}}, & \dfrac{\partial q}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{2}\,\dfrac{\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_2}}. \end{cases}$$

Die Differentialformen:

$$\frac{\sqrt{R_1+R_2}}{2}\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{R_1}}\,du + \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{R_2}}\,dv\right),\qquad \frac{\sqrt{R_1+R_2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{R_1}}\,du + \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{R_2}}\,dv\right)$$

müssen somit vollständige Differentiale sein, und darin bestehen die notwendigen, und, wie leicht zu sehen, auch hinreichenden Bedingungen für die Äquidistanz der charakteristischen Linien. Da auch die Summe und die Differenz der fraglichen Differentialformen, also

$$\frac{\sqrt{G}\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_2}}\,dv \quad\text{und}\quad \frac{\sqrt{E}\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_1}}\,du,$$

vollständige Differentiale sein müssen, darf der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{G}\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_2}} \text{ nur von } v, \quad \text{der Ausdruck } \frac{\sqrt{E}\sqrt{R_1+R_2}}{\sqrt{R_1}} \text{ nur von } u$$

abhängen. Unter Benutzung der Fundamentalgleichungen:

$$\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{R_2}{R_1(R_2-R_1)}\,\frac{\partial R_1}{\partial v},\qquad \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{R_1}{R_2(R_1-R_2)}\,\frac{\partial R_2}{\partial u},$$

nehmen die gesuchten Bedingungen die folgenden Gestalten:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial u} = \dfrac{\partial R_2}{\partial u}\,\dfrac{R_1(3R_2+R_1)}{R_2(R_2-R_1)}, \\[2ex] \dfrac{\partial R_2}{\partial v} = \dfrac{\partial R_1}{\partial v}\,\dfrac{R_2(3R_1+R_2)}{R_1(R_1-R_2)}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sofort erkennen, daß keine der beiden Größen R_1 und R_2 konstant sein kann, ohne daß auch die andere konstant wäre. Wir haben daher nur zu unterscheiden zwischen dem *allgemeinen* Fall, in dem die Größen R_1 und R_2 als voneinander unabhängig vorausgesetzt werden, und dem *besonderen* Fall, in dem eine Gleichung zwischen R_1 und R_2 besteht, die Fläche also als eine Weingartensche Fläche angenommen wird.

Im allgemeinen Fall sei $R_1 = f_1(u, v)$, $R_2 = f_2(u, v)$. Man sieht leicht, daß in $f_1(u, v)$ oder in $f_2(u, v)$ nicht etwa eine der Veränderlichen u und v fehlen kann. Durch Elimination von v entstehe: $R_1 = F_1(R_2, u)$, durch Elimination von u entstehe: $R_2 = F_2(R_1, v)$. Hierdurch erhalten die Gleichungen (I) die Gestalt:

$$1 = \frac{\partial F_2}{\partial R_1} \frac{R_1(3F_2 + R_1)}{F_2(F_2 - R_1)}, \quad 1 = \frac{\partial F_1}{\partial R_2} \frac{R_2(3F_1 + R_2)}{F_1(F_1 - R_2)}.$$

Die Integralgleichungen dieser homogenen Differentialgleichungen sind, wenn F_2 und F_1 durch R_2 und R_1 ersetzt werden:

$$(R_1 + R_2)^2 = \varphi_1(v) \frac{R_1}{R_2}, \quad (R_1 + R_2)^2 = \varphi_2(u) \frac{R_2}{R_1},$$

wo $\varphi_1(v)$ eine willkürliche Funktion von v, $\varphi_2(u)$ eine solche von u bezeichnet. Es folgt zunächst:

$$\varphi_1(v) R_1^2 = \varphi_2(u) R_2^2,$$

sodann:

$$R_1^2 = \frac{\sqrt{\varphi_2(u)}^3 \sqrt{\varphi_1(v)}}{(\sqrt{\varphi_1(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)})^2}, \quad R_2^2 = \frac{\sqrt{\varphi_1(v)}^3 \sqrt{\varphi_2(u)}}{(\sqrt{\varphi_1(v)} + \sqrt{\varphi_2(u)})^2}.$$

Da man aber u durch eine Funktion von u, v durch eine Funktion von v ersetzen darf, ohne daß die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ ihre Eigenschaft als Krümmungslinien einbüßen, können wir schreiben:

$$R_1^2 = \frac{u^3 v}{(u + v)^2}, \quad R_2^2 = \frac{v^3 u}{(u + v)^2}.$$

Besteht zwischen R_1 und R_2 eine Gleichung, so verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_1}{\partial v} \\ \frac{\partial R_2}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und umgekehrt. Diese Determinante nimmt in unserem Fall den Wert an:

$$-4 \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial R_2}{\partial u} \frac{(R_1 + R_2)^2}{(R_1 - R_2)^2},$$

es muß daher $\frac{\partial R_1}{\partial v}$ oder $\frac{\partial R_2}{\partial u}$ verschwinden. Da der eine Fall in den

anderen durch Vertauschung von u und v übergeht, nehmen wir $\frac{\partial R_1}{\partial v}$ als verschwindend, so daß die Krümmungslinien $v = \text{const.}$ zugleich geodätische Linien sind. Unter dieser Voraussetzung ist die zweite der Gleichungen (I) von selbst erfüllt und die erste besitzt das Integral:

$$(R_1 + R_2)^2 = c^2 \frac{R_1}{R_2},$$

wo c^2 eine Konstante bezeichnet.

Unsere Aufgabe ist es zunächst, in beiden Fällen die Bestimmung des Linienelementes der gesuchten Flächen durchzuführen und sodann womöglich die Flächen selbst kennen zu lernen.

§ 2.

Bestimmung des Linienelementes im allgemeinen Fall.

Benutzen wir die beiden ersten Fundamentalgleichungen in der Gestalt:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{R_2 \frac{\partial R_1}{\partial v}}{R_1(R_1 - R_2)}, \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{R_1 \frac{\partial R_2}{\partial u}}{R_2(R_2 - R_1)},$$

so erhalten wir:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{2(u+v)},$$

somit:

$$\sqrt{E} = \frac{U}{\sqrt{u+v}}, \quad \sqrt{G} = \frac{V}{\sqrt{u+v}},$$

wo U eine noch zu bestimmende Funktion von u, V eine noch zu bestimmende Funktion von v bezeichnet.

Die dritte Fundamentalgleichung benutzen wir in der Gestalt:

$$\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)$$

und erhalten:

$$\frac{(u+v)^2}{u^2 v^2} = -\frac{U'}{2U^3} - \frac{V'}{2V^3} - \frac{1}{2(u+v)U^2} - \frac{1}{2(u+v)V^2}.$$

Nun werde:

$$\frac{1}{2U^2} = U_1, \quad \frac{1}{2V^2} = V_1, \quad \frac{(u+v)^2}{u^2 v^2} = A$$

gesetzt. Dann folgt:

$$A = \frac{1}{2}(U_1' + V_1') - \frac{U_1 + V_1}{u+v}. \tag{1}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach u ergibt sich:

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{1}{2} U_1'' - \frac{U_1'}{u+v} + \frac{U_1 + V_1}{(u+v)^2},$$

oder, wenn wir den Wert von $U_1 + V_1$ aus (1) einsetzen:

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{1}{2} U_1'' - \frac{U_1'}{u+v} + \frac{1}{2} \frac{U_1' + V_1'}{u+v} - \frac{u+v}{u^2 v^2}.$$

Nehmen wir jetzt:

$$B = \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{u+v}{u^2 v^2} = \frac{(u+v)(u-2v)}{u^3 v^2},$$

so kommt statt der vorigen Gleichung:

$$B = \frac{1}{2} U_1'' + \frac{1}{2} \frac{V_1' - U_1'}{u+v}. \tag{2}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach u folgt:

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{1}{2} U_1''' - \frac{1}{2} \frac{U''}{u+v} - \frac{1}{2} \frac{V_1' - U_1'}{(u+v)^2},$$

oder unter Berücksichtigung von (2):

$$\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{B}{u+v} = \frac{1}{2} U_1'''. \tag{3}$$

Aber:

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{-u^2 + 2uv + 6v^2}{u^4 v^2}, \quad \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{B}{u+v} = \frac{6}{u^4},$$

folglich:

$$U_1''' = \frac{12}{u^4},$$

so daß:

$$U_1 = -\frac{2}{u} + c_1 \frac{u^2}{2} + c_2 u + c_3. \tag{4}$$

In entsprechender Weise erhält man durch zweimalige Differentiation der Gleichung (1) nach v:

$$V_1 = -\frac{2}{v} + d_1 \frac{v^2}{2} + d_2 v + d_3. \tag{5}$$

Die Integrationskonstanten c_ν, d_ν müssen so bestimmt werden, daß die Gleichung (1) für alle Werte von u und v erfüllt wird.

Dies ergibt: $c_1 + d_1 = 0$, $c_2 - d_2 = 0$, $c_3 + d_3 = 0$, und damit erhalten wir endgültig:

$$U_1 = \frac{-2}{u} + c_1 \frac{u^2}{2} + c_2 u + c_3,$$

$$V_1 = \frac{-2}{v} - c_1 \frac{v^2}{2} + c_2 v - c_3.$$

Um E und G zu finden, sei bemerkt, daß:

$$E = \frac{U^2}{u+v} = \frac{1}{2(u+v)U_1}, \quad G = \frac{1}{2(u+v)V_1},$$

so daß:

$$E = \frac{u}{(u+v)(c_1u^3+2c_2u^2+2c_3u-4)}, \quad G = \frac{v}{(u+v)(-c_1v^3+2c_2v^2-2c_3v-4)}.$$

Da:

$$\frac{R_1+R_2}{R_1} = \frac{u+v}{u}, \quad \frac{R_1+R_2}{R_2} = \frac{u+v}{v},$$

so folgt nach § 1, (1):

$$2dp = \frac{du}{\sqrt{c_1u^3+2c_2u^2+2c_3u-4}} + \frac{dv}{\sqrt{-c_1v^3+2c_2v^2-2c_3v-4}},$$

$$2dq = \frac{-du}{\sqrt{c_1u^3+2c_2u^2+2c_3u-4}} + \frac{dv}{\sqrt{-c_1v^3+2c_2v^2-2c_3v-4}}.$$

Von Wichtigkeit ist nun der Nachweis, daß sich u und v stets zwischen gewissen Grenzen so wählen lassen, daß die Zahlen E und G positiv ausfallen.

Zunächst zeigen die Ausdrücke von R_1^2 und R_2^2 im § 1, daß u und v dasselbe Vorzeichen besitzen müssen. Wir setzen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, sowohl u wie v als positiv voraus.

Es sei zunächst $c_1 \gtrless 0$. Wir nehmen dann:

$$f(u) = c_1u^3 + 2c_2u^2 + 2c_3u - 4 = c_1(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma),$$

dann ist:

$$g(v) = -c_1v^3 + 2c_2v^2 - 2c_3v - 4 = -c_1(v+\alpha)(v+\beta)(v+\gamma).$$

1. Sind die Zahlen β und γ gleich, oder komplex konjugiert, so ist $(u-\beta)(u-\gamma)$ positiv, ebenso $(v+\beta)(v+\gamma)$. Da: $4 = c_1\alpha\beta\gamma$, besitzt α das Vorzeichen von c_1. Bei positivem c_1 ist $g(v) > 0$, wenn $v < -\alpha$, d. h. nur für negative Werte von v, bei negativem c_1 ist $f(u) > 0$, wenn $u < \alpha$, d. h. nur für negative Werte von u. Die Zahlen β und γ können daher weder einander gleich noch komplex konjugiert sein.

2. Sind die Zahlen α, β, γ reell und ungleich, so wählen wir die Bezeichnung so, daß $\alpha > \beta > \gamma$. Wenn $c_1 > 0$, ist $\alpha > 0$; $g(v)$ ist positiv, wenn $v < -\alpha$, oder wenn $-\beta < v < -\gamma$. Dies gibt für v nur dann positive Werte, wenn $\gamma < 0$, damit ist auch $\beta < 0$. Die Funktion $f(u)$ ist hier für positive Werte von u nur dann positiv, wenn $u > \alpha$. Ist $c_1 < 0$, so auch $\alpha\beta\gamma < 0$ und damit $\gamma < 0$. Da hier $f(u) > 0$, wenn $u < \gamma$ oder $\beta < u < \alpha$, so muß $\alpha > 0$ und damit $\beta > 0$ sein und u zwischen β und α genommen werden. Die Funktion $g(v)$ wird für positive Werte von v nur dann positiv, wenn $v > -\gamma$.

Nehmen wir ferner $c_1 = 0$, $c_2 \gtrless 0$, so sei:

$$f(u) = 2c_2u^2 + 2c_3u - 4 = 2c_2(u - \alpha)(u - \beta),$$
$$g(v) = 2c_2v^2 - 2c_3v - 4 = 2c_2(v + \alpha)(v + \beta),$$

wo jetzt: $-4 = 2c_2\alpha\beta$.

Wenn hier $c_2 > 0$, muß $\alpha\beta < 0$ sein. Wir setzen $\alpha > 0$, $\beta < 0$ voraus und erhalten $f(u) > 0$ für $u > \alpha$, $g(v) > 0$ für $v > -\beta$.

Wenn $c_2 < 0$, ergibt sich keine Möglichkeit, durch positive Werte von u und v sowohl $f(u)$ wie $g(v)$ positiv zu machen.

Ist endlich $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 \gtrless 0$, so können die Ausdrücke $2c_3u - 4$, $-2c_3v - 4$ für positive Werte von u und v nicht gleichzeitig positiv werden.

Wir sehen somit, daß bei geeigneter Wahl der Konstanten und der Veränderlichen die Funktionen E und G positive Werte annehmen.

Da nun auch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, nämlich

$$L = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{E}{R_1}, \quad \text{und} \quad N = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{G}{R_2}, \quad M = 0,$$

bekannt und die Fundamentalgleichungen erfüllt sind, so gibt es nach einem von Ossian Bonnet herrührenden Satz eine Fläche, deren Fundamentalgrößen mit den gefundenen E, G, L, N zusammenfallen. *Die Ausdrücke von E und G zeigen, daß die Krümmungslinien unserer Fläche isotherm sind.*

§ 3.

Bestimmung einer nicht Weingartenschen Fläche, deren charakteristische Kurven äquidistant sind.

Da die Auffindung der allgemeinsten Fläche, welche die im vorigen Paragraphen aufgestellten Fundamentalgrößen besitzt, auf große Schwierigkeiten stößt, will ich mich auf die Betrachtung eines besonderen Falles beschränken. Wir nehmen: $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, so daß:

$$2c_2u^2 + 2c_3u - 4 = 4(u + 1)(u - 1),$$
$$2c_2v^2 - 2c_3v - 4 = 4(v + 1)(v - 1),$$
$$\alpha = 1, \quad \beta = -1,$$
$$2(dp - dq) = \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad 2(dp + dq) = \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}}.$$

Da sowohl u wie v größer als 1 sein muß, setzen wir:

$$2(p - q) = \int_1^u \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \log\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right),$$

$$2(p+q)=\int\limits_1^v\frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}=\log\left(v+\sqrt{v^2-1}\right).$$

Dann folgt:

$$u=\frac{1}{2}\left(e^{2(p-q)}+e^{-2(p-q)}\right),$$

$$v=\frac{1}{2}\left(e^{2(p+q)}+e^{-2(p+q)}\right);$$

da nach § 1:

$$\cos\varphi=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{R_2-R_1}{R_1+R_2},$$

so erhalten wir ebenfalls nach § 1:

$$\cos\varphi=\frac{v-u}{v+u},$$

und damit:

$$\cos\varphi=\frac{(e^{2p}-e^{-2p})(e^{2q}-e^{-2q})}{(e^{2p}+e^{-2p})(e^{2q}+e^{-2q})}.$$

Da wir es mit einer Schiebungsfläche zu tun haben, sei:

$$x=f_1(p)+g_1(q),\quad y=f_2(p)+g_2(q),\quad z=f_3(p)+g_3(q)$$

mit den Bedingungen:

$$f_1'(p)^2+f_2'(p)^2+f_3'(p)^2=1,\quad g_1'(q)^2+g_2'(q)^2+g_3'(q)^2=1,$$

woraus sich ergibt:

$$\cos\varphi=f_1'(p)g_1'(q)+f_2'(p)g_2'(q)+f_3'(p)g_3'(q).$$

Wir genügen unseren Bedingungen und der letzten Gleichung durch folgende Wahl der Funktionen f_ν' und g_ν' bei konstantem m:

$$f_1'(p)=\frac{e^{mp}-e^{-mp}}{e^{mp}+e^{-mp}},\quad f_2'(p)=\frac{2}{e^{mp}+e^{-mp}},\quad f_3'(p)=0,.$$

$$g_1'(q)=\frac{e^{mq}-e^{-mq}}{e^{mq}+e^{-mq}},\quad g_2'(q)=0,\quad g_3'(q)=\frac{2}{e^{mq}+e^{-mq}}.$$

Da jetzt:

$$ds^2=dp^2+2\cos\varphi\,dp\,dq+dq^2,$$

so sind die konjugierten Kurven $p=\text{const.}$, $q=\text{const.}$ tatsächlich äquidistant. Daß sie auch charakteristische Kurven sind, zeigt sich folgendermaßen.

Man hat:

$$\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}=\frac{4}{(e^{mp}+e^{-mp})(e^{mq}+e^{-mq})},$$

$$\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=\frac{-2(e^{mp}-e^{-mp})}{(e^{mp}+e^{-mp})(e^{mq}+e^{-mq})},$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}=\frac{-2(e^{mq}-e^{-mq})}{(e^{mp}+e^{-mp})(e^{mq}+e^{-mq})}.$$

Setzen wir: $n = e^{2mp} + e^{-2mp} + e^{2mq} + e^{-2mq}$, so ergibt sich für die Richtungskosinus der Normalen:

$$X = \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad Y = \frac{e^{-mp} - e^{mp}}{\sqrt{n}}, \quad Z = \frac{e^{-mq} - e^{mq}}{\sqrt{n}}.$$

Da $\sum \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2$, ist noch zu zeigen, daß

$$\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}.$$

Man findet:

$$f_1''(p) = \frac{4m}{(e^{mp} + e^{-mp})^2}, \quad f_2''(p) = -\frac{2m\,(e^{mp} - e^{-mp})}{(e^{mp} + e^{-mp})^2},$$

somit $\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \frac{2m}{\sqrt{n}}$, und entsprechend $\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = \frac{2m}{\sqrt{n}}$.

Die Gleichungen unserer Fläche können wir in folgender Gestalt schreiben:

$$mx = \log \frac{(e^{mp} + e^{-mp})(e^{mq} + e^{-mq})}{4},$$

$$my = \operatorname{arctg} \frac{e^{mp} - e^{-mp}}{2}, \quad mz = \operatorname{arctg} \frac{e^{mq} - e^{-mq}}{2},$$

so daß auch:

$$e^{-mx} = \cos my \cos mz.$$

Diese Beziehung fand R. Raffy in der eingangs erwähnten Arbeit als die Gleichung einer Schiebungsfläche, deren Schiebungskurven in zueinander senkrechten Ebenen liegen und zugleich die charakteristischen Linien der Fläche darstellen.

§ 4.

Bestimmung der Weingartenschen Flächen, deren charakteristische Kurven äquidistant sind.

Wir fragen nach den Flächen, bei denen die Beziehung besteht:

$$(R + R_2)^2 = c^2 \frac{R_1}{R_2},$$

während R_1 und R_2 nur von u abhängen.

Statt u führen wir die Funktion $\tau = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$ von u als unabhängige Veränderliche ein und erhalten:

$$R_1 + R_2 = c\tau,$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1 + \tau^2}{c\tau^3}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1 + \tau^2}{c\tau}.$$

Aus der Fundamentalgleichung:

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial \tau} = -\frac{R_1}{R_2(R_2 - R_1)} \frac{\partial R_2}{\partial \tau}$$

folgt:

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial \tau} = -\frac{\tau}{1+\tau^2},$$

somit:

$$\sqrt{G} = \frac{V}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

wo V eine willkürliche Funktion von v bezeichnet.

Führt man statt v die durch die Beziehung:

$$\int V dv = v'$$

festgelegte Veränderliche v' ein, so folgt:

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Da nun $\sqrt{E}$ von v unabhängig ist, nimmt die dritte Fundamentalgleichung die Gestalt an:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tau}{\sqrt{E}(\sqrt{1+\tau^2})^3}\right) = \frac{\sqrt{E}(\sqrt{1+\tau^2})^3}{c^2\tau^4},$$

oder:

$$-\frac{\frac{dE}{d\tau}}{2E\sqrt{E}} \frac{\tau}{(\sqrt{1+\tau^2})^3} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1-2\tau^2}{(\sqrt{1+\tau^2})^5} = \frac{\sqrt{E}(\sqrt{1+\tau^2})^3}{c^2\tau^4},$$

oder endlich:

$$\frac{dE^{-1}}{d\tau} + E^{-1}\frac{2(1-2\tau^2)}{\tau(1+\tau^2)} - \frac{2(1+\tau^2)^3}{c^2\tau^5} = 0.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für E^{-1}. Die Integration ergibt:

$$E^{-1} = \frac{(1+\tau^2)^3}{\tau^2}\left(\gamma^2 - \frac{1}{c^2\tau^2}\right),$$

so daß:

$$E = \frac{c^2\tau^4}{(1+\tau^2)^3(\gamma^2 c^2\tau^2 - 1)}.$$

A. Enneper (Göttinger Nachrichten 1870, S. 335) und P. Stäckel (Leipziger Berichte 1898, S. 1) haben gezeigt, daß, wenn die sechs Fundamentalgrößen nur von *einer* Veränderlichen abhängen, die fragliche Fläche eine Schraubenfläche ist. Wenn F und M aber gleich Null sind, hat man es mit einer Umdrehungsfläche zu tun. Dies geht unmittelbar aus der Stäckelschen Gleichung (16) (a. a. O. S. 9) hervor, ließe sich aber auch leicht direkt beweisen.

Da nun die in Rede stehenden Flächen Umdrehungsflächen sind, setzen wir:

$$x = u\cos v_1,\quad y = u\sin v_1,\quad z = f(u),$$

wo u eine Funktion von τ, v_1 eine solche von v' ist, und erhalten:

$$ds^2 = (1 + f'(u)^2)\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 + u^2\cdot\left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2 dv'^2.$$

Da $G = \frac{1}{1+\tau^2}$, folgt:

$$\frac{1}{1+\tau^2} = u^2\left(\frac{dv_1}{dv'}\right)^2,$$

somit muß $u^2(1+\tau^2)$ eine Konstante sein, die wir mit ε^2 bezeichnen.

Die Gleichung:

$$E = (1 + f'(u)^2)\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2$$

liefert:

$$1 + f'(u)^2 = \frac{c^2\tau^2}{\varepsilon^2(\gamma^2c^2\tau^2 - 1)} = \frac{c^2(\varepsilon^2 - u^2)}{\varepsilon^2(\gamma^2c^2\varepsilon^2 - (\gamma^2c^2+1)u^2)},$$

daher:

$$f'(u)^2 = \frac{c^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2\gamma^2) + u^2(\varepsilon^2(\gamma^2c^2+1) - c^2)}{\gamma^2c^2\varepsilon^4 - \varepsilon^2(\gamma^2c^2+1)u^2}.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$f'(u)^2 = \frac{a_1 + a_2u^2}{b_1 - b_2u^2}$$

und erhalten:

$$f''(u) = \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)u}{\sqrt{a_1 + a_2u^2}\,(\sqrt{b_1 - b_2u^2})^3},$$

oder da: $a_2b_1 + a_1b_2 = \varepsilon^4c^2$:

$$f''(u) = \frac{\varepsilon^4c^2u}{\sqrt{a_1 + a_2u^2}\,(\sqrt{b_1 - b_2u^2})^3}.$$

Mit Hilfe der gefundenen Werte von $f'(u)$ und $f''(u)$ berechnen wir die Größen R_1 und R_2 und finden:

$$R_1 = \frac{c\,(\sqrt{\varepsilon^2 - u^2})^3\sqrt{a_1 + a_2u^2}}{\varepsilon^4u},\quad R_2 = \frac{cu\sqrt{\varepsilon^2 - u^2}}{\sqrt{a_1 + a_2u^2}},$$

daher:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{(\varepsilon^2 - u^2)(a_1 + a_2u^2)}{\varepsilon^4u^2}.$$

Dieser Ausdruck muß gleich τ^2 sein, also gleich $\frac{\varepsilon^2 - u^2}{u^2}$, daher folgt $a_2 = 0$, $a_1 = \varepsilon^4$. Es besteht also zwischen den drei Konstanten ε, γ, c die Beziehung:

$$\gamma^2 = \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2c^2}.$$

Dies liefert:

$$b_1 = \varepsilon^2(c^2 - \varepsilon^2), \quad b_2 = c^2,$$

$$R_1 = \frac{c\left(\sqrt{\varepsilon^2 - u^2}\right)^3}{\varepsilon^2 u}, \quad R_2 = \frac{cu\sqrt{\varepsilon^2 - u^2}}{\varepsilon^2},$$

$$f'(u)^2 = \frac{\varepsilon^4}{(c^2 - \varepsilon^2)\varepsilon^2 - c^2 u^2},$$

und somit:

$$f(u) = \frac{\varepsilon^2}{c} \arcsin \frac{cu}{\varepsilon\sqrt{c^2 - \varepsilon^2}},$$

wenn wir von einer additiven Konstanten absehen.

Für $\varepsilon^2 = c = 2$ entsteht:

$$f(u) = \arcsin u.$$

Dies liefert die Umdrehungsfläche der Sinuslinie um ihre Mittelgerade. Das Profil der allgemeinsten gefundenen Fläche läßt sich nach Wahl der Konstanten ε und $c > \varepsilon$ leicht mit Hilfe der Sinuslinie konstruieren.

§ 5.

Untersuchung der gefundenen Umdrehungsflächen.

Wir bestimmen zunächst die Bogenlängen p und q der charakteristischen Linien. Indem wir statt v_1 fortan v schreiben, haben wir als Gleichungen unserer Flächen die folgenden:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = m\arcsin\frac{u}{n},$$

wo:

$$m = \frac{\varepsilon^2}{c}, \quad n = \frac{\varepsilon}{c}\sqrt{c^2 - \varepsilon^2},$$

oder:

$$\varepsilon^2 = n^2 + m^2, \quad c = \frac{n^2 + m^2}{m}.$$

Hier wird:

$$R_1 = \frac{\left\{\sqrt{n^2 + m^2 - u^2}\right\}^3}{mu}, \quad R_2 = \frac{u\sqrt{n^2 + m^2 - u^2}}{m},$$

$$E = 1 + f'(u)^2 = \frac{n^2 + m^2 - u^2}{n^2 - u^2}, \quad G = u^2.$$

Wenden wir nun die Formeln § 1, (1) an, so kommt:

$$\frac{d(p-q)}{du} = \frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{\sqrt{n^2 - u^2}}, \quad \frac{d(p+q)}{dv} = \sqrt{n^2 + m^2},$$

daher:

$$p - q = \sqrt{n^2 + m^2} \arcsin \frac{u}{n}, \quad p + q = \sqrt{n^2 + m^2} \cdot v,$$

$$u = n \sin \frac{p - q}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \quad v = \frac{p + q}{\sqrt{n^2 + m^2}},$$

und:

$$(1) \begin{cases} x = n \sin \frac{p - q}{\sqrt{n^2 + m^2}} \cos \frac{p + q}{\sqrt{n^2 + m^2}} = \frac{n}{2}\left(\sin \frac{2p}{\sqrt{n^2 + m^2}} - \sin \frac{2q}{\sqrt{n^2 + m^2}}\right), \\ y = n \sin \frac{p - q}{\sqrt{n^2 + m^2}} \sin \frac{p + q}{\sqrt{n^2 + m^2}} = -\frac{n}{2}\left(\cos \frac{2p}{\sqrt{n^2 + m^2}} - \cos \frac{2q}{\sqrt{n^2 + m^2}}\right), \\ z = \qquad = m \frac{p - q}{\sqrt{n^2 + m^2}}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(2) \qquad ds^2 = dp^2 - \frac{2}{n^2 + m^2}\left(n^2 \cos \frac{2(p - q)}{\sqrt{n^2 + m^2}} + m^2\right) dp\, dq + dq^2.$$

Es sollen nun einige Eigenschaften der betrachteten charakteristischen Kurven mitgeteilt werden.

a) Nehmen wir eine Kurve $q = \text{const.}$, etwa $q = q_0$. Setzt man:

$$p = q_0 + \vartheta w,$$

wo:

$$w = \sqrt{n^2 + m^2},$$

so entsteht:

$$x = n \sin \vartheta \cos\left(\frac{2q_0}{w} + \vartheta\right), \quad y = n \sin \vartheta \sin\left(\frac{2q_0}{w} + \vartheta\right), \quad z = m\vartheta.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Erzeugung der Kurve $q = q_0$. Man ziehe in der xy-Ebene vom Koordinatenanfangspunkt aus eine Halbgerade, die mit der positiven x-Achse den Winkel $\frac{2q_0}{w}$ bildet. Führt diese Halbgerade eine Schraubenbewegung mit dem Parameter m und der Steighöhe $m\pi$ aus, deren Steigrichtung mit der Richtung der positiven z-Achse zusammenfällt, deren Drehungsrichtung dieselbe ist wie die, welche die positive x-Achse auf dem kürzesten Wege in die positive y-Achse überführt (positive Drehungsrichtung), so schneidet sie aus der Fläche den Teil der Kurve $q = q_0$ aus, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = m\pi$ liegt, also zwischen einer Spitze der Fläche und der nach oben hin auf sie folgenden Spitze. Aus diesem Teil wird aber die ganze Kurve $q = q_0$ durch wiederholte Parallelverschiebungen von der Größe $m\pi$ in der Richtung der positiven oder negativen z-Achse erhalten.

Nehmen wir nun eine Kurve $p = \text{const.}$, etwa $p = p_0$. Setzt man:

$$q = p_0 - \vartheta w,$$

so kommt:

$$x = n \sin \vartheta \cos\left(\frac{2p_0}{w} - \vartheta\right), \quad y = n \sin \vartheta \sin\left(\frac{2p_0}{w} - \vartheta\right), \quad z = m\vartheta.$$

Der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = m\pi$ gelegene Teil unserer Kurve wird folgendermaßen erzeugt. Man ziehe in der xy-Ebene vom Koordinatenanfangspunkte aus eine Halbgerade, die mit der positiven x-Achse den Winkel $\frac{2p_0}{w}$ einschließt und nehme mit ihr eine Schraubenbewegung vor mit demselben Parameter, derselben Steighöhe und Steigrichtung, aber der entgegengesetzten Drehungsrichtung wie bei der vorhin betrachteten Schraubenbewegung, so schneidet sie aus der Fläche das fragliche Kurvenstück aus, das nun durch dieselben Parallelverschiebungen, wie vorhin, die Gesamtkurve erzeugt.

Bemerkung. Bezeichnen wir überhaupt als „Schraubenlinie" eine Kurve, die aus einer Umdrehungsfläche von einer Geraden ausgeschnitten wird, welche die Achse der Fläche senkrecht schneidet und um sie herum eine Schraubenbewegung ausführt, so lassen sich leicht die Umdrehungsflächen bestimmen, auf denen die charakteristischen Linien oder die Asymptotenlinien zugleich Schraubenlinien sind. Wenn:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u)$$

die Gleichungen einer Umdrehungsfläche darstellen, so ist die Gleichung ihrer charakteristischen Linien:

$$f''(u)\, du^2 - u f'(u)\, dv^2 = 0.$$

Die Gleichung einer Schraubenlinie ist:

$$dz = m\, dv, \quad \text{d. h.} \quad f'(u)\, du = m\, dv.$$

Sollen daher die charakteristischen Linien zugleich Schraubenlinien sein, so muß die Funktion $f(u)$ der Gleichung genügen:

$$f''(u)\, m^2 - u f'(u)^3 = 0.$$

Die erste Integration liefert:

$$-\frac{m^2}{2f'(u)^2} - \frac{u^2}{2} + \frac{n^2}{2} = 0,$$

und daraus folgt:

$$f(u) = m \arcsin \frac{u}{n}\cdot$$

Die vorhin betrachteten Umdrehungsflächen sind daher die *einzigen* Umdrehungsflächen, auf denen die charakteristischen Linien aus Schraubenlinien bestehen.

Die Gleichung der Asymptotenlinien lautet:

$$f''(u)\, du^2 + u f'(u)\, dv^2 = 0.$$

Sollen die Asymptotenlinien Schraubenlinien sein, so muß $f(u)$ der Bedingung genügen:

$$m^2 f''(u) + u f'(u)^3 = 0.$$

Dies gibt zunächst:

$$-\frac{m^2}{2f'(u)^2}+\frac{u^2}{2}+\frac{n}{2}=0,$$

sodann, wenn wir mit a den Halbmesser des zu $z=0$ gehörenden Querschnitts bezeichnen:

$$f(u)=m\log\frac{u+\sqrt{u^2+n}}{a+\sqrt{a^2+n}}.$$

Nehmen wir in diesem Fall $m=1$, $a=1$, $n=0$, im vorigen $m=1$, $n=1$, so entsteht: $u=\sin z$ und $u=e^z$ und damit erhalten wir den Satz: Läßt man die durch die Gleichungen: $y=\sin x$ und $y=e^x$ bestimmten Kurven um die x-Achse sich drehen, so sind im ersten Fall die charakteristischen Kurven, im zweiten Fall die Asymptotenlinien der entstehenden Umdrehungsfläche Schraubenlinien mit dem Parameter Eins.

b) Legen wir die zweiten Ausdrücke von x und y in den Gleichungen (1) zugrunde, so erhalten wir für eine Kurve $q=q_0$, falls p gleich $q_0+\frac{1}{2}\vartheta w$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{n}{2}\sin\frac{2q_0}{w}+\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2q_0}{w}+\vartheta\right),\\
y &= \quad\frac{n}{2}\cos\frac{2q_0}{w}-\frac{n}{2}\cos\left(\frac{2q_0}{w}+\vartheta\right),\\
z &= \quad\frac{m}{2}\vartheta.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Kurven $q=\text{const.}$ gewöhnliche Schraubenlinien mit dem Parameter $\frac{m}{2}$ sind auf Kreiszylindern, deren Querschnitthalbmesser gleich $\frac{n}{2}$ ist, und deren Achsen die xy-Ebene in Punkten mit den Koordinaten:

$$x=-\frac{n}{2}\sin\frac{2q_0}{w},\quad y=\frac{n}{2}\cos\frac{2q_0}{w}$$

schneiden. Das Entsprechende gilt für eine Kurve $p=p_0$ auf Grund der Substitution $q=p_0+\frac{\vartheta w}{2}$.

Unsere Fläche entsteht daher auch durch Umdrehung einer gewöhnlichen Schraubenlinie um eine Erzeugende des Kreiszylinders, dem sie aufgeschrieben ist.

c) Um die Erzeugung unserer Flächen durch Parallelverschiebung einer charakteristischen Kurve zu beleuchten, betrachten wir eine Kurve $q=q_0$. Für $p=q_0$ erhalten wir die Spitze der Fläche im Koordinatenanfangspunkt O. Für $p=q_0-h$ erhalten wir einen zweiten Punkt O_1 der Kurve. Nun werde jeder Punkt der Kurve um einen Vektor, der

nach Größe und Richtung gleich dem Vektor $O_1 O$ ist, verschoben. Dabei geht der zum Wertepaar p, q_0 gehörende Kurvenpunkt in den Punkt mit den Koordinaten:

$$x' = \frac{n}{2}\left(\sin\frac{2p}{w} - \sin\frac{2q_0 - 2h}{w}\right),$$

$$y' = -\frac{n}{2}\left(\cos\frac{2p}{w} - \cos\frac{2q_0 - 2h}{w}\right),$$

$$z' = m\frac{p - q_0 + h}{w}$$

über. Der fragliche Punkt gehört also nach der Verschiebung zum selben Wert p wie vorher, liegt aber jetzt auf der Kurve $q = q_0 - h$.

d) A. Voss hat im Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, S. 21, auf jeder durch die Gleichungen:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u)$$

dargestellten Umdrehungsfläche auf folgende Weise eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit äquidistanter Kurvenscharen bestimmt. Nach Annahme zweier Konstanten a und k nehme man:

$$u' = k\int\frac{du}{u}\sqrt{\frac{a^2 - u^2}{u^2 - k^2}(1 + f'(u)^2)} + av,$$

$$v' = a\int\frac{du}{u}\sqrt{\frac{a^2 - u^2}{u^2 - k^2}(1 + f'(u)^2)} - kv.$$

Dann stellen die Gleichungen: $u' + v' = \text{const.}$, $u' - v' = \text{const.}$ zwei einfach unendliche Scharen äquidistanter Kurven dar. Auf den in Rede stehenden Flächen, wo $f(u) = m\arcsin\frac{u}{n}$, gehören die charakteristischen Kurven zu den von A. Voss bestimmten äquidistanten Kurven und entsprechen der Festsetzung: $k = 0$, $a = w$.

§ 6.

Bedingung für die Äquidistanz der sphärischen Bilder der charakteristischen Kurven.

Mit u und v bezeichnen wir wieder die Parameter der Krümmungslinien und nehmen:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

mit p und q bezeichnen wir die Parameter der charakteristischen Kurven und setzen:

$$ds^2 = E_1\,dp^2 + 2F_1\,dp\,dq + G_1\,dq^2.$$

Ist noch:

$$\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = L_1, \quad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial p\, \partial q} = M_1, \quad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = N_1,$$

so bestehen, wie eingangs gezeigt, die Bedingungen:

$$M_1 = 0, \quad G_1 L_1 = E_1 N_1,$$

damit erhalten wir zunächst:

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{L_1}{E_1 G_1 - F_1^2}\left(- G_1 \frac{\partial x}{\partial p} + F_1 \frac{\partial x}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{N_1}{E_1 G_1 - F_1^2}\left(F_1 \frac{\partial x}{\partial p} - E_1 \frac{\partial x}{\partial q}\right),$$

so daß:

$$e = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2 = \frac{G_1 L_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2}, \quad g = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2 = \frac{E_1 N_1^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

$$f = \sum \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial q} = - \frac{F_1 L_1 N_1}{E_1 G_1 - F_1^2}.$$

Die sphärischen Bilder der charakteristischen Kurven sind äquidistant, wenn e nur von p, g nur von q abhängt. Dann kann man aber p durch eine solche Funktion von p, q durch eine solche Funktion von q ersetzen, daß sowohl e wie g den Wert Eins erhält. Unter dieser Annahme wird: $E_1 = G_1$, $L_1 = N_1$, so daß:

$$E_1 = R_1 R_2, \quad F_1 = R_1 R_2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}.$$

Für das Quadrat des Linienelements erhält man also:

$$ds^2 = R_1 R_2 \left(dp^2 + 2\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}\, dp\, dq + dq^2\right),$$

und die Kurven $q =$ const., $p =$ const. sind „isotherm-konjugiert“ (L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. Lukat. Leipzig 1899. S. 135).

Da $\frac{L_1}{E_1}$, d. h. die Normalkrümmung der Kurven $q =$ const., gleich $\frac{2}{R_1 + R_2}$ ist, erhalten wir:

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2}\left(- \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\frac{\partial x}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2}\left(- \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial q}\right).$$

Für die Richtungskosinus der Tangenten der Kurven $q =$ const., $p =$ const ergibt sich:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial p}}{\sqrt{E_1}} = \cos \varphi_1 \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \sin \varphi_1 \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}}, \quad \frac{\frac{\partial x}{\partial q}}{\sqrt{G_1}} = \cos \varphi_2 \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \sin \varphi_2 \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Nun ist nach § 1:

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}, \qquad \sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}},$$

$$\cos \varphi_2 = -\sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}, \qquad \sin \varphi_2 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}},$$

und da:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -R_1 \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -R_2 \frac{\partial X}{\partial v},$$

sowie:

$$E_1 = G_1 = R_1 R_2,$$

so entsteht:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{R_1^2 \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{E}} - \frac{R_2^2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{G}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{R_1^2 \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{E}} - \frac{R_2^2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{R_1 \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \frac{R_2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{G}},$$

$$\frac{\partial X}{\partial q} = -\frac{R_1 \sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{E}} + \frac{R_2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}} \frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

Ersetzt man nun

$$\frac{\partial X}{\partial u} \text{ durch } \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} \text{ durch } \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial v},$$

so ergibt sich:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}\sqrt{R_1 + R_2}}{2 R_1 \sqrt{R_2}}, \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}\sqrt{R_1 + R_2}}{2 R_2 \sqrt{R_1}},$$

oder:

$$dp = \frac{\sqrt{E}\sqrt{R_1 + R_2}}{2 R_1 \sqrt{R_2}} du + \frac{\sqrt{G}\sqrt{R_1 + R_2}}{2 R_2 \sqrt{R_1}} dv,$$

$$dq = -\frac{\sqrt{E}\sqrt{R_1 + R_2}}{2 R_1 \sqrt{R_2}} du + \frac{\sqrt{G}\sqrt{R_1 + R_2}}{2 R_2 \sqrt{R_1}} dv.$$

Wenn umgekehrt die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen vollständige Differentiale sind, besitzen die sphärischen Bilder der charakteristischen Kurven die Eigenschaft, äquidistant zu sein. Für die fraglichen Bedingungen findet sich die Gestalt:

$$\text{(I)}\qquad\begin{cases} R_2(R_1+3R_2)\dfrac{\partial R_1}{\partial v}+R_1(R_1-R_2)\dfrac{\partial R_2}{\partial v}=0,\\[2mm] R_2(R_2-R_1)\dfrac{\partial R_1}{\partial u}+R_1(3R_1+R_2)\dfrac{\partial R_2}{\partial u}=0.\end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen aber, *daß im betrachteten Fall die charakteristischen Kurven zugleich geodätische Kurven sind.*

Es wird nämlich durch die Beziehung $\varphi(u,v)=\text{const.}$ eine geodätische Linie festgelegt, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+G\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+G\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}=0.$$

Nehmen wir nun $\varphi=p$, so entsteht:

$$\frac{G\dfrac{\partial p}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)^2+G\left(\dfrac{\partial p}{\partial u}\right)^2}}=\frac{\sqrt{G}\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1+R_2}},\qquad \frac{E\dfrac{\partial p}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)^2+G\left(\dfrac{\partial p}{\partial u}\right)^2}}=\frac{\sqrt{E}\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1+R_2}}.$$

Aber:

$$\frac{\partial\log\dfrac{\sqrt{G}\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1+R_2}}}{\partial u}=-\frac{R_1(3R_1+R_2)\dfrac{\partial R_2}{\partial u}+R_2(R_2-R_1)\dfrac{\partial R_1}{\partial u}}{2R_2(R_2-R_1)(R_2+R_1)}=0,$$

$$\frac{\partial\log\dfrac{\sqrt{E}\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1+R_2}}}{\partial v}=-\frac{R_2(R_1+3R_2)\dfrac{\partial R_1}{\partial v}+R_1(R_1-R_2)\dfrac{\partial R_2}{\partial v}}{2R_1(R_1-R_2)(R_1+R_2)}=0,$$

die Kurven $p=\text{const.}$ sind demnach geodätische Linien, und wegen der Gleichungen $\frac{\partial p}{\partial u}=-\frac{\partial q}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{\partial q}{\partial v}$ sind es auch die Kurven $q=\text{const.}$, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Hiernach kann die eingangs gestellte Frage auch so ausgesprochen werden, daß man nach den Flächen fragt, auf denen die charakteristischen Linien aus geodätischen Linien bestehen. Es handelt sich also um die Bestimmung einer Art von Vossschen Flächen (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 5, Nr. 39 a)).

Man hat:

$$\frac{\sqrt{G}\cdot\sqrt{R_1+R_2}}{R_2\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt{G}\cdot\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1+R_2}}\cdot\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_2})^3\sqrt{R_1}},$$

$$\frac{\sqrt{E}\cdot\sqrt{R_1+R_2}}{R_1\sqrt{R_2}}=\frac{\sqrt{E}\cdot\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1+R_2}}\cdot\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_1})^3\sqrt{R_2}}.$$

Nun hängen nach dem Vorigen die Ausdrücke $\frac{\sqrt{G}\cdot\sqrt{R_1+R_2}}{R_2\sqrt{R_1}}$ und

$\frac{\sqrt{G}\cdot\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1+R_2}}$ nur von v, die Ausdrücke $\frac{\sqrt{E}\cdot\sqrt{R_1+R_2}}{R_1\sqrt{R_2}}$ und $\frac{\sqrt{E}\cdot\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1+R_2}}$ nur von u ab, es ist daher auch $\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_2})^3\sqrt{R_1}}$ nur eine Funktion von v, $\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_1})^3\sqrt{R_2}}$ nur eine Funktion von u, was man auch durch Integration der Gleichungen (I) zeigen kann.

Wir weisen jetzt nach, *daß einer der Ausdrücke* $\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_2})^3\sqrt{R_1}}$, $\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_1})^3\sqrt{R_2}}$ *konstant ist.*

Angenommen es wäre:

$$R_2R_1^3 = \lambda(u)\,(R_1+R_2)^2, \qquad R_1R_2^3 = \varkappa(v)\,(R_1+R_2)^2,$$

wo weder $\lambda(u)$ noch $\varkappa(v)$ konstant sein soll. Dann folgt:

$$R_1^2 = \frac{\sqrt{\lambda(u)}}{\sqrt{\varkappa(v)}}\left(\sqrt{\lambda(u)}+\sqrt{\varkappa(v)}\right)^2, \qquad R_2^2 = \frac{\sqrt{\varkappa(v)}}{\sqrt{\lambda(u)}}\left(\sqrt{\lambda(u)}+\sqrt{\varkappa(v)}\right)^2.$$

Ersetzen wir $\sqrt{\lambda(u)}$ durch u, $\sqrt{\varkappa(v)}$ durch v, so entsteht:

$$R_1 = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\,(u+v), \qquad R_2 = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\,(u+v).$$

Die Fundamentalgleichung:

$$\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{R_2\frac{\partial R_1}{\partial v}}{R_1(R_1-R_2)}$$

ergibt:

$$\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{2(u+v)},$$

und ebenso folgt aus der zweiten Fundamentalgleichung:

$$\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{2(u+v)}.$$

Bezeichnet daher U eine Funktion von u allein, V eine solche von v allein, so ist:

$$\sqrt{E} = U\sqrt{u+v}, \qquad \sqrt{G} = V\sqrt{u+v}.$$

Die dritte Fundamentalgleichung liefert:

$$\frac{1}{2(u+v)}\left(\frac{1}{U^2}+\frac{1}{V^2}\right) + \frac{U'}{2U^3} + \frac{V'}{2V^3} = 1,$$

oder, wenn: $U_1 = \frac{1}{2U^2}$, $V_1 = \frac{1}{2V^2}$:

$$\frac{U_1+V_1}{u+v} - \frac{1}{2}(U_1'+V_1') = 1.$$

Differenziert man diese Gleichung nach u, so kommt:

$$\frac{U_1'}{u+v} - \frac{U_1+V_1}{(u+v)^2} - \frac{1}{2}U_1'' = 0,$$

diese Gleichung nach v differenziert ergibt:

$$\frac{U_1+V_1}{u+v} - \frac{1}{2}(U_1'+V_1') = 0,$$

und das steht im Widerspruch mit der drittletzten Gleichung.

Es bleibt daher nur die Möglichkeit, daß einer der Ausdrücke $\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_2})^3\sqrt{R_1}}$, $\frac{R_1+R_2}{(\sqrt{R_1})^3\sqrt{R_2}}$ konstant ist. Nehmen wir den ersten als konstant, so wird der zweite eine Funktion von u allein, nehmen wir den zweiten als konstant, so wird der erste eine Funktion von v allein. Es geht also die eine Annahme durch Vertauschen von u und v in die andere über, so daß nur die erste weiter verfolgt zu werden braucht.

§ 7.

Bestimmung aller Flächen mit geodätischen charakteristischen Kurven.

Wir nehmen, unter n eine positive Konstante verstehend,

$$(R_1+R_2)^2 = n^2 R_1 R_2^3.$$

R_1 und R_2 hängen hier nur von u ab. Anstatt u führen wir die Funktion $\sqrt{R_1 R_2}$ von u als unabhängige Veränderliche ein und setzen:

$$\sqrt{R_1 R_2} = \tau.$$

Dann ist:

$$R_1 = \tau\sqrt{n\tau - 1}, \quad R_2 = \frac{\tau}{\sqrt{n\tau-1}}.$$

Nach der ersten Fundamentalgleichung wird $\sqrt{E}$ eine Funktion von τ allein, die zweite liefert:

$$\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial\tau} = \frac{1}{2\tau},$$

folglich ist:

$$\sqrt{G} = V\sqrt{\tau},$$

wo V eine Funktion von v allein bedeutet.

Die dritte Fundamentalgleichung ergibt:

$$\frac{d\sqrt{E}}{d\tau} = -\frac{\sqrt{E}}{2\tau} + \frac{2(\sqrt{E})^3}{\tau}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $2\sqrt{E}$, so kommt:

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{-E + 4E^2}{\tau},$$

daher:

$$E = \frac{1}{\tau\gamma + 4},$$

$$ds^2 = \frac{d\tau^2}{\tau\gamma + 4} + \tau\, dv_1^2,$$

wo γ eine Konstante bedeutet und statt $V dv$ einfach dv_1 gesetzt ist.

Da E, G, R_1 und R_2 nur von τ abhängen, gehören die gesuchten Flächen zu den Umdrehungsflächen.

Für eine solche sei:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u),$$

so daß:

$$ds^2 = (1 + f'(u)^2)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

Da τ nur eine Funktion von u, v_1 nur eine solche von v ist, erhalten wir zunächst:

$$u^2\, dv^2 = \tau\, dv_1^2,$$

d. h.:

$$dv_1 = c\, dv, \quad u = c\sqrt{\tau},$$

wo c eine Konstante bedeutet; sodann ergibt die Beziehung:

$$\frac{d\tau^2}{\gamma\tau + 4} = (1 + f'(u)^2)\, du^2$$

die Bestimmung:

$$f'(u)^2 = \frac{u^2(4 - \gamma c^2) - 4c^4}{c^2(\gamma u^2 + 4c^2)}.$$

Um die Gleichung zwischen n, γ, c zu finden, bilden wir den Ausdruck für R_2. Es ist:

$$R_2 = \frac{u\sqrt{1 + f'(u)^2}}{f'(u)} = \frac{2u^2}{\sqrt{u^2(4 - \gamma c^2) - 4c^4}} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau\, \frac{4 - \gamma c^2}{4c^2} - 1}},$$

folglich:

$$n = \frac{4 - \gamma c^2}{4c^2}, \quad \gamma = \frac{4(1 - nc^2)}{c^2},$$

$$f'(u)^2 = \frac{cn^2\left(u^2 - \frac{c^2}{n}\right)}{u^2(1 - nc^2) + c^4},$$

sowie:

$$dp = \frac{c^2\, du}{2\sqrt{\left(u^2(1 - nc^2) + c^4\right)\left(u^2 - \frac{c^2}{n}\right)}} + \frac{c\sqrt{n}}{2}\, dv,$$

$$dq = -\frac{c^2\, du}{2\sqrt{\left(u^2(1 - nc^2) + c^4\right)\left(u^2 - \frac{c^2}{n}\right)}} + \frac{c\sqrt{n}}{2}\, dv.$$

Bei der Berechnung von $f(u)$ sind drei Fälle zu unterscheiden, da die Zahl $1 - nc^2$ gleich, kleiner oder größer als Null ausfallen kann.

1) $1 - nc^2 = 0$. Hier ist:

$$f'(u) = \sqrt{u^2n^2 - 1}.$$

Der kleinste Wert von u ist in diesem Fall gleich $\frac{1}{n}\cdot$ Legen wir durch den betreffenden Parallelkreis die Ebene $z = 0$, so entsteht:

$$f(u) = \int_{\frac{1}{n}}^{u} \sqrt{u^2n^2-1}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2n^2-1} - \frac{1}{2n}\log\left(nu + \sqrt{u^2n^2-1}\right).$$

Der Schnitt der Fläche mit der xz-Ebene hat die nebenstehende Gestalt. Dem positiven Wert der Wurzel aus $n^2u^2 - 1$ entspricht der oberhalb der xy-Ebene gelegene Teil der Fläche, auf dessen Betrachtung wir uns wegen der Symmetrie der Fläche hinsichtlich der xy-Ebene beschränken.

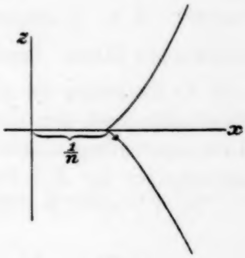

Fig. 1.

Die Gleichungen:

$$2\,dp = \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{n^2}}} + dv,$$

$$2\,dq = -\frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{n^2}}} + dv$$

ergeben:

$$2p = \log\left(nu + \sqrt{n^2u^2 - 1}\right) + v,$$

$$2q = -\log\left(nu + \sqrt{nu^2 - 1}\right) + v,$$

falls wir zu Kurven $p = 0$, $q = 0$ diejenigen beiden charakteristischen Kurven wählen, welche vom Punkt $x = \frac{1}{n}$, $y = 0$, $z = 0$ ausgehen. Die Kurven $q = \text{const.}$ laufen mit positiver, die Kurven $p = \text{const.}$ mit negativer Drehungsrichtung unendlich oft um die z-Achse herum.

Die Koordinaten des sphärischen Bildes unserer Fläche sind unter Benutzung der Veränderlichen u, v:

$$X = -\frac{\sqrt{u^2n^2 - 1}}{un}\cos v, \quad Y = -\frac{\sqrt{u^2n^2 - 1}}{un}\sin v, \quad Z = \frac{1}{un},$$

bei Benutzung der Veränderlichen p, q folgt:

$$X = \frac{e^{q-p} - e^{p-q}}{e^{q-p} + e^{p-q}} \cos(p+q), \qquad Y = \frac{e^{q-p} - e^{p-q}}{e^{q-p} + e^{p-q}} \sin(p+q),$$

$$Z = \frac{2}{e^{q-p} + e^{p-q}}.$$

Betrachten wir den Verlauf der Kurven $q = 0$, $p = 0$ auf der Einheitskugel. Da für $q = 0$: $p = \log\left(nu + \sqrt{nu^2 - 1}\right)$, ist die Zahl p positiv, d. h. p bedeutet die positiv genommene Bogenlänge der Kurve $q = 0$, genommen vom Nordpol $(X = Y = 0,\ Z = 1)$ aus. Da $\frac{e^{-p} - e^{p}}{e^{-p} + e^{p}}$ negativ ist, so liegt die senkrechte Projektion unserer Kurve auf die XY-Ebene zuerst, d. h. von $p = 0$ bis $p = \frac{\pi}{2}$, im dritten, dann im vierten Quadranten u. s. f. Die Kurve selbst läuft also mit positiver Drehungsrichtung unendlich oft um die Z-Achse herum und nähert sich asymptotisch dem Äquator. Für die Kurve $p = 0$ auf dem oberen Teil der Umdrehungsfläche ist v beständig negativ, d. h. q bedeutet die negativ genommene Bogenlänge ihres sphärischen Bildes. Lassen wir q von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$ abnehmen, so erstreckt sich die Projektion der sphärischen Kurve auf die XY-Ebene vom zweiten Quadranten nach dem ersten zu d. h. die Kurve selbst läuft mit negativer Drehungsrichtung unendlich oft um die Z-Achse herum und nähert sich asymptotisch der XY-Ebene.

2) $1 - nc^2 < 0$. Hier ist:

$$f'(u) = \sqrt{\frac{nc^2}{nc^2 - 1}} \frac{u^2 - \frac{c^2}{n}}{\sqrt{-\left(u^2 - \frac{c^2}{n}\right)\left(u^2 - \frac{c^4}{nc^2 - 1}\right)}}.$$

Da:

$$\frac{c^2}{n} = \frac{c^4}{nc^2} < \frac{c^4}{nc^2 - 1},$$

so hat man:

$$\frac{c^2}{n} \leqq u^2 \leqq \frac{c^4}{nc^2 - 1}.$$

Da

$$\frac{c^2}{n} > \frac{1}{n^2},$$

ist

$$u > \frac{1}{n}.$$

Die Fläche besteht aus unendlich vielen kongruenten Teilen, die Radien der kleinsten Parallelkreise sind gleich $\frac{c}{\sqrt{n}}$, die der größten gleich $\frac{c^2}{\sqrt{nc^2 - 1}}$.

Der Schnitt der zx-Ebene mit der Fläche hat die nebenstehende Gestalt. Wir legen die xy-Ebene durch einen Parallelkreis mit dem kleinsten Halbmesser und setzen:

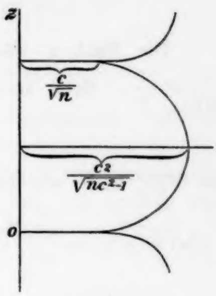

Fig. 2.

$$f(u) = \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{nc^2-1}} \int\limits_{\frac{c}{\sqrt{n}}}^{u} \frac{\sqrt{u^2 - \frac{c^2}{n}}}{\sqrt{\frac{c^4}{nc^2-1} - u^2}}\, du,$$

$$\varkappa^2 = \frac{1}{nc^2}.$$

Dann liefert die Substitution:

$$u = \frac{1}{\varkappa n \Delta\varphi}, \qquad \text{wo} \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi},$$

die Bestimmung:

$$f(u) = \frac{\varkappa}{n} \int\limits_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi^3}\, d\varphi$$

oder:

$$f(u) = -\frac{\varkappa}{n(1-\varkappa^2)} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\varkappa n} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{\varkappa n(1-\varkappa^2)} \int\limits_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi.$$

Lassen wir die Kurven $p = 0$, $q = 0$ von dem Punkt $x = \frac{c}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\varkappa n}$ der X-Achse ausgehen, so ergibt sich:

$$p = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{v}{2\varkappa}, \qquad q = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{v}{2\varkappa}$$

d. h.

$$\varphi = \operatorname{am}(p-q), \qquad v = \varkappa(p+q).$$

Die Koordinaten des sphärischen Bildes der charakteristischen Kurven sind:

$$X = -\sin\operatorname{am}(p-q)\cos\varkappa(p+q), \qquad Y = -\sin\operatorname{am}(p-q)\sin\varkappa(p+q),$$
$$Z = \cos\operatorname{am}(p-q).$$

Die Kurven $q = \text{const.}$ auf der Fläche gehen, sich in positiver Richtung um die Z-Achse drehend, weiter, die Kurven $p = \text{const.}$ drehen sich in negativer Richtung um die Z-Achse. Auf der Einheitskugel verlaufen die Kurven $q = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ in ähnlicher Weise vom Nordpol bis zum Südpol, wobei die Weglänge gleich $2K$ ist.

3) $1 - nc^2 > 0$. Hier wird:

$$f'(u)^2 = \frac{c^2 n \left(u^2 - \frac{c^2}{n}\right)}{(1 - nc^2)\left(u^2 + \frac{c^4}{1 - nc^2}\right)}.$$

Die Zahl u wächst von $\frac{c}{\sqrt{n}}$ an bis ins Unendliche, dabei ist $\frac{c}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$. Setzt man hier:

$$c^2 = \frac{\varkappa^2}{n}, \qquad u = \frac{\varkappa}{n \cos\varphi},$$

so folgt, wenn wir die xy-Ebene durch den kleinsten Parallelkreis legen:

$$f(u) = g(\varphi) = \frac{\varkappa^2}{n}\int_0^\varphi \operatorname{tg}^2\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\varkappa^2}{n(1 - \varkappa^2)}\left(\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi - \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi\right).$$

Lassen wir die Kurven $p = 0$, $q = 0$ von dem Punkt $x = \frac{\varkappa}{n}$ der x-Achse ausgehen, so ergibt sich:

$$2p = \varkappa\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \varkappa v, \qquad 2q = -\varkappa\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \varkappa v.$$

Ferner wird:

$$X = -\varkappa \sin\operatorname{am}\frac{p-q}{\varkappa}\cos\frac{p+q}{\varkappa}, \qquad Y = -\varkappa \sin\operatorname{am}\frac{p-q}{\varkappa}\sin\frac{p+q}{\varkappa},$$

$$Z = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}\frac{p-q}{\varkappa}}.$$

Auf der Umdrehungsfläche laufen die Kurven $q = \text{const.}$ mit positiver, die Kurven $p = \text{const.}$ mit negativer Drehungsrichtung um die z-Achse vom kleinsten Parallelkreis aus ins Unendliche, dabei ist die Größe des Drehungswinkels gleich K. Auf der Einheitskugel gehen die Kurven $q = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ vom Nordpol aus bis zum Parallelkreis $Z = \sqrt{1 - \varkappa^2}$, die Bogenlänge des fraglichen Weges ist gleich $\varkappa \cdot K$.

Schlußbemerkung.

Die vorigen Ergebnisse zeigen, daß in den betrachteten drei Fällen jedesmal die auftretenden Flächen derjenigen Fläche ähnlich sind, die sich für $n = 1$ ergibt, wenn im zweiten und dritten Fall die Zahl $\varkappa$ festgehalten wird. Dies Verhalten entspricht durchaus dem der Umdrehungsflächen von konstanter negativer Krümmung. Wir können aber noch weiter gehen. Jedem äquidistanten Kurvensystem auf der Einheitskugel entspricht bekanntlich eine Schar einander ähnlicher Flächen von konstanter negativer Krümmung. Wir haben drei solcher Systeme gefunden, und das Quadrat des Linienelements der Einheitskugel ist im ersten Fall:

$$d\sigma^2 = dp^2 + 2\,\frac{(e^{q-p} - e^{p-q})^2 - 4}{(e^{q-p} + e^{p-q})^2}\,dp\,dq + dq^2,$$

im zweiten:

$$d\sigma^2 = dp^2 + 2(-1 + 2\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(p-q))\,dp\,dq + dq^2,$$

im dritten:

$$d\sigma^2 = dp^2 - 2\cos 2\,\mathrm{am}\,\frac{p-q}{\varkappa}\,dp\,dq + dq^2.$$

Bestimmt man nun diejenigen Flächen von konstanter negativer Krümmung, bei denen das sphärische Bild der Asymptotenlinien mit den in Rede stehenden sphärischen Kurven zusammenfällt, so ergeben sich im ersten Fall die Umdrehungsflächen vom parabolischen, im zweiten Fall die vom hyperbolischen, im dritten Fall die vom elliptischen Typus.

Münster i./W., im August 1905.

Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik.

Von

G. Zemplén in Budapest.

In einer früheren Arbeit*) wurde gezeigt, wie für eine Flüssigkeit, in welcher sich eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit fortpflanzt, die auf der Fläche zu erfüllenden *dynamischen Kompatibilitätsbedingungen* aus dem Hamiltonschen Prinzipe der stationären Wirkung hergeleitet werden können. Im folgenden werden ähnliche Überlegungen auf die Strömung der Elektrizität im Raume, insbesondere auf die Bewegung eines „Elektrons“ angewandt.

Im § 1 behandle ich zuerst die stetigen Strömungen der Elektrizität auf Grund des Prinzips der stationären Wirkung. Es wird sich dabei eine — wie ich glaube — vollständigere Formulierung des Schwarzschildschen Prinzips**) ergeben.

Im § 2 wird dasselbe Prinzip auf unstetige Strömungen angewandt; es werden behandelt: die stetige Bewegung eines starren Elektrons und der Elektronenstoß für den Fall endlicher Volumladung sowie die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen.

Im § 3 wird endlich das Feld und die Bewegung eines starren Elektrons mit Flächenladung untersucht.

§ 1.
Stetige Elektrizitätsströmung.

Es soll der Raum x, y, z mit strömender Elektrizität erfüllt sein, die elektrische Ladung soll an den Volumelementen haften; ein elektrischer Punkt sei durch die Parameter a, b, c gekennzeichnet (etwa durch die Werte von x, y, z zur Zeit $t = 0$), dann ist der Strömungsvorgang be-

*) Math. Ann., Bd. 61, p. 437 (1906).

**) Göttinger Nachr. 1903, p. 126.

schrieben, wenn x, y, z als Funktionen von a, b, c, t gegeben sind. Es ist dabei die Dichte der Elektrizität im Punkte a, b, c zur Zeit t durch die Kontinuitätsgleichung:

$$(1) \qquad \frac{\varrho_0}{\varrho} = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} = \omega$$

definiert; ϱ_0 ist dabei eine die Anfangsverteilung der Elektrizität charakterisierende Funktion von a, b, c (etwa die Dichte zur Zeit $t = 0$); *die unteren Indizes bedeuten hier sowie auch im folgenden partielle Differentiationen.*

Wir bedienen uns je nach Bedarf außer dieser Lagrangeschen auch der Eulerschen Auffassung, indem wir die Bewegung durch die als Funktion von x, y, z, t aufzufassende Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und Dichte ϱ beschreiben. *Die Komponenten eines Vektors sollen im folgenden durch obere Indizes bezeichnet werden* ($\mathfrak{v}^x = x_t$, $\mathfrak{v}^y = y_t$, $\mathfrak{v}^z = z_t$). Dann genügen die Größen $\varrho, \mathfrak{v}^x, \mathfrak{v}^y, \mathfrak{v}^z$ der Kontinuitätsgleichung:

$$(2) \qquad \varrho_t + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = 0.$$

Ist die Strömung der Elektrizität bekannt, so ist dadurch die Erscheinung noch nicht vollständig beschrieben, wir fragen auch nach dem *Felde* der strömenden Ladungen, d. h. nach der in jedem Punkte x, y, z zur Zeit t herrschenden elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ und magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ können auf übliche Weise*) auf das skalare Potential $\Phi(x, y, z, t)$ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}(x, y, z, t)$ zurückgeführt werden:

$$(3) \qquad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \mathfrak{A}_t,$$

$$(4) \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist dabei $= 1$ gesetzt.

Diese Zerlegung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ist eindeutig, wenn Φ und $\mathfrak{A}$ der Bedingung:

$$(5) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{A} + \Phi_t = 0$$

unterworfen sind.*)

Zur vollständigen Beschreibung der Erscheinung müssen also einerseits Φ und $\mathfrak{A}$ als Funktionen von x, y, z, t, andererseits x, y, z als Funktionen von a, b, c dargestellt werden.

Es soll nun vorläufig vorausgesetzt werden, daß sämtliche hier auftretenden Funktionen mit allen in der Rechnung vorkommenden Ableitungen stetig sind.

---

*) Encyklopädie der math. Wiss. V, 14, 3, p. 157 (Artikel Lorentz).

Die zur Bestimmung der Funktionen

$$\Phi(x, y, z, t),\quad \mathfrak{A}^x(x, y, z, t),\quad \mathfrak{A}^y(x, y, z, t),\quad \mathfrak{A}^z(x, y, z, t),$$
$$x(a, b, c, t),\quad y(a, b, c, t),\quad z(a, b, c, t)$$

dienenden Gleichungen ergeben sich aus folgendem Variationsprinzip:

Es soll die erste Variation des Integrals:

$$J^L \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \omega \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} + \varrho_0(\Phi - x_t \mathfrak{A}^x - y_t \mathfrak{A}^y - z_t \mathfrak{A}^z) \right\} da\,db\,dc$$

verschwinden, wenn man einerseits x, y, z als Funktionen von a, b, c, t, andererseits Φ und $\mathfrak{A}$ als Funktionen von x, y, z, t so variiert, daß die Bedingungsgleichung (5) *erfüllt und die Variation sämtlicher variierter Funktionen an den Integrationsgrenzen gleich* 0 *sei.* $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ sind dabei Abkürzungen für die in (3) und (4) auftretenden Aggregate der Differentialquotienten von Φ und $\mathfrak{A}$.

Es ist dies kein Variationsprinzip im gewöhnlichen Sinne, denn es treten darin unbekannte Funktionen Φ und $\mathfrak{A}$ der selbst unbekannten Funktionen x, y, z unter dem Integralzeichen auf. Man erhält jedoch die Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Funktionen, wenn man von allen zulässigen Variationen des Integrals J^L zwei Gruppen von Variationen auswählt und die Bedingungen für das Verschwinden derselben aufstellt:

I. Gruppe: Solche Variationen, bei welchen *nur das Feld* (Φ und $\mathfrak{A}$ als Funktionen von x, y, z, t) variiert wird, die Bewegung (x, y, z als Funktionen von a, b, c, t) jedoch nicht.

II. Gruppe: Solche Variationen, bei welchen *nur die Bewegung* variiert wird, das Feld aber nicht.

Das Problem zerfällt so in zwei Variationsprobleme im üblichen Sinne, oder — wenn man will — das Prinzip in zwei Prinzipe.

Um die Variationen der ersten Gruppe zu bilden, transformiere man das „Lagrangesche" Integral J^L auf das „Eulersche" J^E, so daß man an Stelle von a, b, c, t die neuen Integrationsvariabeln x, y, z, t einführt; man erhält so das

I. Prinzip. *Es soll die Variation des mit J^L gleichen Integrals:*

$$J^E \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} + \varrho(\Phi - \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{A}) \right\} dx\,dy\,dz^{*)}$$

verschwinden, wenn man darin ϱ und $\mathfrak{v}$ als gegebene, Φ und $\mathfrak{A}$ als gesuchte Funktionen von x, y, z, t betrachtet und Φ und $\mathfrak{A}$ so variiert, daß

---

*) $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{A}$ bedeutet das skalare Produkt von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{A}$; das Vektorprodukt wird mit $\mathfrak{v} \times \mathfrak{A}$ bezeichnet werden.

ihre Variation an den Integrationsgrenzen $=0$ *und außerdem die Bedingung* (5) *erfüllt sei.* ϱ und $\mathfrak{v}$ müssen selbstverständlich so vorgeschrieben sein, daß die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

Die Lagrangeschen Gleichungen dieses *isoperimetrischen* Problems liefern die *Feldgleichungen.*

Die Berücksichtigung der zweiten Gruppe von Variationen führt auf das folgende gewöhnliche Variationsproblem resp. auf das

II. Prinzip. *Es soll die erste Variation des Integrals* J^L *verschwinden, wenn man darin* Φ *und* $\mathfrak{A}$ *als gegebene Funktionen von* x, y, z, *diese aber als unbekannte Funktionen von* a, b, c, t *betrachtet. Die Variationen von* x, y, z *müssen an den Integrationsgrenzen verschwinden.*

Die Lagrangeschen Gleichungen dieses Problems sind die *Bewegungsgleichungen* der elektrischen Strömung.

Das von Schwarzschild formulierte Variationsprinzip der Elektrodynamik ist insofern von diesem verschieden, als bei Schwarzschild die Größen Φ und $\mathfrak{A}$ der Bedingung (5) nicht unterworfen sind. Die Lagrangeschen Gleichungen des I. Prinzips sind dann ohne Berücksichtigung dieser Bedingung:

$$\Lambda \equiv \nabla \Phi + \operatorname{div} \mathfrak{A}_t = -4\pi\varrho\text{*)}, \tag{6}$$

$$L \equiv \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \operatorname{grad}\Phi - \mathfrak{A}_t = -4\pi\varrho\mathfrak{v}. \tag{7}$$

Diese Gleichungen sind jedoch wegen der identischen Relation

$$\Lambda_t + \operatorname{div} L \equiv 0$$

nicht unabhängig voneinander, so daß daraus Φ, $\mathfrak{A}^x$, $\mathfrak{A}^y$, $\mathfrak{A}^z$ nicht bestimmt werden können. Aus (6) und (7) erhält man allerdings auf Grund der Gleichungen (3) und (4) die Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$:

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\varrho, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_t + 4\pi\varrho\mathfrak{v}, \tag{9}$$

welche mit den aus (3) und (4) gewonnenen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\mathfrak{H}_t$$

zur Bestimmung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ausreichen. Für Φ und $\mathfrak{A}$ jedoch ergibt das Schwarzschildsche Prinzip bloß die Gleichungen (6) und (7), woraus dieselben nicht bestimmt werden können, und welche erst durch Hinzunahme der Bedingung (5) in die üblichen Gleichungen für die verzögerten Potentiale übergehen.

Um daher aus dem Variationsprinzip sogleich auch die letzteren herleiten zu können, erscheint es vorteilhaft, die Bedingung (5) von Anfang

*) $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

an in das Variationsproblem einzuführen. Das Prinzip I führt sodann auf ein isoperimetrisches Problem, welches mit einem entsprechenden gewöhnlichen Variationsproblem in bezug auf das Integral

$$\overline{J^E} = J^E + \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda (\operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t) dx dy dz$$

mit den unbekannten Funktionen Φ, $\mathfrak{A}^x$, $\mathfrak{A}^y$, $\mathfrak{A}^z$, λ von x, y, z, t äquivalent ist.

Die Lagrangeschen Gleichungen dieses Problems sind:

$$\Lambda = 4\pi\lambda_t - 4\pi\varrho, \tag{10}$$

$$L = -4\pi \operatorname{grad} \lambda - 4\pi\varrho\mathfrak{v}, \tag{11}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t = 0. \tag{5}$$

Aus $\Lambda_t + \operatorname{div} L = 0$ und der Kontinuitätsgleichung folgt für λ die Wellengleichung:

$$\lambda_{t^2} - \nabla\lambda = 0. \tag{12}$$

Wir machen nun die Voraussetzung, daß unser System von $t = -\infty$ bis zu einer gewissen Zeit $t' < t_0$ in Ruhe war, daß also für $t'' < t'$ die Sätze der Elektrostatik anwendbar waren, daß also $\Lambda = -4\pi\varrho$, $L = 0$ gesetzt werden konnte, dann ist für dieselbe Zeit

$$\lambda(x, y, z, t'') = 1,$$
$$\lambda_t(x, y, z, t'') = 0,$$

also nach der bekannten*) Lösung der Wellengleichung λ durchweg eine Konstante $(= 1)$.

Dann ergeben sich aber aus (10) und (11) mit Rücksicht auf (5) die üblichen Gleichungen für die retardierten Potentiale:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \Lambda^* &\equiv \Phi_{t^2} - \nabla\Phi = 4\pi\varrho, \\ L^* &\equiv \mathfrak{A}_{t^2} - \nabla\mathfrak{A} = 4\pi\varrho\mathfrak{v}, \end{aligned}$$

aus welchen nun umgekehrt, unter derselben Voraussetzung über die Vorgeschichte unseres Systems, geschlossen werden kann, daß die Bedingung (5) bei allen Lösungen der Gleichungen (13) erfüllt ist; es ist nämlich:

$$\Lambda_t^* + \operatorname{div} L^* \equiv (\operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t)_{t^2} - \nabla(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t) = 0.$$

War also zur Zeit $t = t''$ die Bedingung (5) und die Gleichung:

$$(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t)_t = 0$$

erfüllt, so wird die Bedingung (5) auch zu allen späteren Zeiten überall bestehen.

*) s. z. B. Riemann-Weber, Part. Differentialgleichungen II, p. 302.

Es liegt in der Natur der Sache, daß wir hier Voraussetzungen über die Vorgeschichte der Erscheinungen machen müssen; es ist dies eine direkte Folge der Grundhypothese der Maxwellschen Theorie, laut welcher sich die Erregungen im Äther mit einer gewissen Geschwindigkeit fortpflanzen.

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, haben wir die Lagrangeschen Gleichungen unseres Prinzips II zu bilden; dieselben lauten:

$$\varrho_0(\Phi_x - x_t\mathfrak{A}_x^x - y_t\mathfrak{A}_x^y - z_t\mathfrak{A}_x^z) + \omega\left(\frac{\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2}{8\pi}\right)_x$$
$$-\frac{d}{da}\left(\frac{\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2}{8\pi}\,\omega_{x_a}\right)-\frac{d}{db}\left(\frac{\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2}{8\pi}\,\omega_{x_b}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{H}^2-\mathfrak{E}^2}{8\pi}\,\omega_{x_c}\right)+\varrho_0\frac{d\mathfrak{A}^x}{dt}=0 \text{ usw.}$$

Es ist dabei

$$\frac{d}{da}=\frac{\partial}{\partial x}x_a+\frac{\partial}{\partial y}y_a+\frac{\partial}{\partial z}z_a+\frac{\partial}{\partial a},\quad\cdots,\quad\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}x_t+\frac{\partial}{\partial y}y_t+\frac{\partial}{\partial z}z_t+\frac{\partial}{\partial t}.$$

Mit Rücksicht auf

$$(\omega_{x_a})_a+(\omega_{x_b})_b+(\omega_{x_c})_c=0$$

erhält man daraus die Gleichung

$$\text{(14)}\qquad \operatorname{grad}\Phi+\mathfrak{A}_t-\mathfrak{v}\times\operatorname{rot}\mathfrak{A}=0,$$

welche mit der üblichen Bewegungsgleichung

$$\mathfrak{F}\equiv\mathfrak{E}+\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}=0$$

identisch ist, wo $\mathfrak{F}$ die mechanische Kraft pro Ladungseinheit bedeutet.

Das vorausgeschickte Variationsprinzip liefert also tatsächlich die vollständige Lösung des Problems in Form der Feldgleichungen (13) und der Bewegungsgleichungen (14).

§ 2.

Unstetige Bewegungen bei endlichen Volumladungen.

Wir wollen nun untersuchen, was für Bedingungen aus dem Variationsprinzip entspringen, wenn wir Φ, $\mathfrak{A}^x$, $\mathfrak{A}^y$, $\mathfrak{A}^z$ selbst durchaus als stetig annehmen, von ϱ, $\mathfrak{v}$ und von den ersten Ableitungen der Potentiale jedoch voraussetzen, daß sie auf gewissen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten der Variabeln x, y, z, t (Flächen im vierdimensionalen Raume) endliche Sprünge erleiden.

Wir werden zu diesem Probleme geführt, sobald wir unsere Resultate auf einen ganz einfachen Spezialfall, auf die Bewegung eines starren, z. B. kugelförmigen Elektrons mit gleichmäßiger Volumladung anwenden wollen. Die im I. Prinzipe auftretenden Funktionen ϱ und $\mathfrak{v}$ sind dann in jedem Augenblicke auf der Elektronenoberfläche unstetig. Diese Unstetigkeiten sind unter a) behandelt.

Eine zweite Art solcher Unstetigkeiten (b)) sind diejenigen, welche bei einer plötzlichen Änderung der Geschwindigkeit unseres starren Elektrons, beim sogen. *Elektronenstoß* auftreten: $\mathfrak{v}$ wird in diesem Falle zu einer gewissen Zeit $t = \tau$ im ganzen Inneren des Elektrons unstetig.

Endlich (c)) kann man die Frage stellen, wie sich eine auf irgend einer Fläche vorhandene Unstetigkeit des Feldes im Raume fortpflanzt; diese Frage führt uns zur Untersuchung der Fortpflanzung *elektromagnetischer Wellen.*

Alle diese Probleme hat P. Hertz*) in seiner Dissertation unter der Voraussetzung behandelt, daß die Potentiale *und* die elektrischen und magnetischen Kräfte $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sowohl auf der Elektronenoberfläche als auch beim Elektronenstoße, endlich auch auf den Wellenflächen stetig sind. Wir setzen die Stetigkeit nur für die Potentiale voraus, erlauben endliche Sprünge bereits in ihren ersten Ableitungen und suchen die Bedingungen, denen diese Sprünge unterworfen sind, aus dem Variationsprinzipe zu gewinnen.

Alle diese Bedingungen lassen sich durch entsprechende Anwendung des folgenden analytischen *Hilfssatzes* herleiten:

Es sei folgendes Variationsproblem vorgelegt:

„Es soll die erste Variation des Integrals:

$$\mathfrak{J} \equiv \iiiint G(f, g, \cdots, f_\xi, f_\eta, \cdots, f_t, g_\xi, \cdots)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dt$$

verschwinden, wenn man darin $f, g, \cdots$ als Funktionen von ξ, η, ζ, t so variiert, daß ihre Werte an den gegebenen Integrationsgrenzen unverändert bleiben.

Sind alsdann $f, g, \cdots$ Lösungen dieses Problems, welche selbst überall stetig sind, deren Ableitungen jedoch auf einer gewissen Fläche (im vierdimensionalen Raume)

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, t) = 0$$

endliche Sprünge erleiden können, während außerhalb derselben auch diese Ableitungen stetig sind, dann genügen $f, g, \cdots$ für $\psi < 0$ und *$\psi > 0$ den gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen und auf der Fläche $\psi = 0$ den* ***Kompatibilitätsbedingungen:***

$$(15)\qquad \begin{cases} [G_{f_\xi}]\psi_\xi + [G_{f_\eta}]\psi_\eta + [G_{f_\zeta}]\psi_\zeta + [G_{f_t}]\psi_t = 0, \\ [G_{g_\xi}]\psi_\xi + [G_{g_\eta}]\psi_\eta + [G_{g_\zeta}]\psi_\zeta + [G_{g_t}]\psi_t = 0. \end{cases}$$

Hier bezeichnet die eckige Klammer den Sprung der in derselben eingeschlossenen Größe, wenn man von der Seite $\psi < 0$ auf die Seite $\psi > 0$ übergeht.

*) P. Hertz, Inauguraldissertation: Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons, Göttingen 1904.

Man erhält diese Bedingungen, indem man das Integral $\mathfrak{J}$ in zwei additive Teile zerlegt, von denen der eine sich auf das Gebiet $\psi < 0$, der andere auf $\psi > 0$ bezieht; variiert man beide Teile und transformiert sie in bekannter Weise mit Hilfe des Greenschen Satzes, so erhält man aus beiden Teilintergralen je ein über $\psi = 0$ ausgedehntes Flächenintegral; die Summe dieser beiden Flächenintegrale muß bei beliebiger Variation von $f, g, \cdots$ verschwinden; daraus entspringen die Bedingungen (15).

a) Stetige Bewegung eines starren Elektrons mit endlicher Volumladung.

Es soll ein starres, kugelförmiges Elektron mit endlicher Volumladung gegeben sein, welches sich im Äther fortbewegt; dann erleiden ϱ und $\mathfrak{v}$ auf der Elektronenoberfläche:

$$\psi(x, y, z, t) \equiv (x - X(t))^2 + (y - Y(t))^2 + (z - Z(t))^2 - A^2 = 0 \tag{16}$$

endliche Sprünge. Hier bezeichnen $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ die Koordinaten des Elektronenmittelpunktes, A den Radius des Elektrons; für $\psi > 0$ sind ϱ und $\mathfrak{v}$ gleich Null, für $\psi < 0$ im allgemeinen von Null verschieden.

Wir verfahren wieder ganz ähnlich wie bei den stetigen Strömungen, geben zuerst die Bewegung (ϱ, $\mathfrak{v}$, X, Y, Z, also auch ψ) an und fragen nach den Feldgleichungen, indem wir voraussetzen, daß die Ableitungen der Potentiale auf der Elektronenoberfläche endliche Sprünge erleiden. Unser I. Prinzip, kombiniert mit unserem Hilfssatz, in welchem

$$\xi = x,\ \eta = y,\ \zeta = z,\ f = \Phi,\ g = \mathfrak{A}^x, \cdots, \mathfrak{J} = \overline{J^E}$$

zu setzen ist, liefert die Gleichungen:

für $\psi < 0$:
$$\begin{aligned} \Lambda &= 4\pi\lambda_t^{(1)} - 4\pi\varrho, \\ L &= -4\pi \operatorname{grad} \lambda^{(1)} - 4\pi\varrho\mathfrak{v}, \\ 0 &= \operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t \end{aligned}$$

und fünf entsprechende mit einer Funktion $\lambda^{(2)}$ für $\psi > 0$, endlich für $\psi = 0$ (aus (15))

$$\begin{aligned} &[\Phi_x + \mathfrak{A}_t^x]\,\psi_x + [\Phi_y + \mathfrak{A}_t^y]\,\psi_y + [\Phi_z + \mathfrak{A}_t^z]\,\psi_z = 4\pi[\lambda]\,\psi_t, \\ &[\mathfrak{A}_x^y - \mathfrak{A}_y^x]\,\psi_y - [\mathfrak{A}_z^x - \mathfrak{A}_x^z]\,\psi_z + [\Phi_x + \mathfrak{A}_t^x]\,\psi_t = 4\pi[\lambda]\,\psi_x, \\ &[\mathfrak{A}_y^z - \mathfrak{A}_z^y]\,\psi_z - [\mathfrak{A}_x^y - \mathfrak{A}_y^x]\,\psi_x + [\Phi_y + \mathfrak{A}_t^y]\,\psi_t = 4\pi[\lambda]\,\psi_y, \\ &[\mathfrak{A}_z^x - \mathfrak{A}_x^z]\,\psi_x - [\mathfrak{A}_y^z - \mathfrak{A}_z^y]\,\psi_y + [\Phi_z + \mathfrak{A}_t^z]\,\psi_t = 4\pi[\lambda]\,\psi_z, \end{aligned} \tag{17}$$

außerdem auch:

$$[\operatorname{div} \mathfrak{A}] + [\Phi_t] = 0. \tag{18}$$

Die Gleichungen (17) lassen sich folgendermaßen kurz zusammenfassen:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{E}] \cdot \operatorname{grad} \psi &= 4\pi[\lambda]\,\psi_t, \\ [\mathfrak{H}] \times \operatorname{grad} \psi - [\mathfrak{E}]\,\psi_t &= 4\pi[\lambda] \operatorname{grad} \psi. \end{aligned} \tag{19}$$

Wir haben vorderhand noch keine Veranlassung, λ auf der Elektronenoberfläche als stetig vorauszusetzen; die Stetigkeit von λ ergibt sich vielmehr aus den Kompatibilitätsbedingungen (17) und (18), wenn man berücksichtigt, daß die Ableitungen der Potentiale auch den sogen. *kinematischen Kompatibilitätsbedingungen**) genügen müssen, welche aus der Forderung entspringen, daß die Potentiale selbst stetig sind, während die Sprünge der Ableitungen auf einer im Raume sich fortpflanzenden Fläche bleiben müssen: nach diesen Gleichungen sind die Sprünge der Ableitungen den entsprechenden Differentialquotienten von ψ proportional, also:

$$(20)\qquad \begin{cases} [\Phi_x] = \Gamma\psi_x, & [\Phi_y] = \Gamma\psi_y, \quad [\Phi_z] = \Gamma\psi_z, \quad [\Phi_t] = \Gamma\psi_t, \\ [\mathfrak{A}_x] = \mathfrak{G}\psi_x, & [\mathfrak{A}_y] = \mathfrak{G}\psi_y, \quad [\mathfrak{A}_z] = \mathfrak{G}\psi_z, \quad [\mathfrak{A}_t] = \mathfrak{G}\psi_t. \end{cases}$$

Aus (18) ergibt sich:

$$(21)\qquad \mathfrak{G}^x\psi_x + \mathfrak{G}^y\psi_y + \mathfrak{G}^z\psi_z + \Gamma\psi_t = 0,$$

und aus (17) mit Rücksicht auf diese Gleichung:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \Gamma\Psi &= 4\pi[\lambda]\,\psi_t, \\ -\mathfrak{G}\Psi &= 4\pi[\lambda]\,\mathrm{grad}\,\psi, \end{aligned}$$

wo $\Psi \equiv \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 - \psi_t^2$.

Andererseits erhält man aus (17), wenn man die Gleichungen resp. mit $\psi_t, -\psi_x, -\psi_y, -\psi_z$ multipliziert und addiert, die Beziehung:

$$[\lambda]\Psi = 0.$$

Es ist nun entweder $[\lambda] = 0$ oder $\Psi = 0$; für $\Psi = 0$ folgt jedoch aus (22) ebenfalls $[\lambda] = 0$. Die Stetigkeit von λ ist daher ganz allgemein bewiesen.

Die Kompatibilitätsbedingungen (21) reduzieren sich auf folgende Alternative:

Es ist entweder:

$$(23)\qquad \Gamma = \mathfrak{G}^x = \mathfrak{G}^y = \mathfrak{G}^z = 0$$

oder $\Psi = 0$.

Die Gleichungen (23) sagen aus, daß die ersten Ableitungen der Potentiale *stetig* sind.

$\Psi = 0$ bedeutet, daß die Unstetigkeitsfläche sich im Raume mit der konstanten Geschwindigkeit $= \pm 1$ (mit Lichtgeschwindigkeit) fortpflanzt: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit θ einer Fläche $\psi(x, y, z, t) = 0$ ist nämlich:

$$\theta = \pm \frac{\psi_t}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}},$$

und aus $\Psi = 0$ folgt $\theta = \pm 1$.

*) J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1903, p. 97. Siehe auch Encykl. der math. Wiss. IV 2, p. 284 (Artikel Zemplén).

Soll $\psi = 0$ jederzeit die Elektronenoberfläche bedeuten, so ist offenbar die Bedingung $\Psi = 0$ nicht erfüllt, und es bleibt nur das System (23) übrig. *Eine immer an der Elektronenoberfläche haftende Unstetigkeit der Ableitungen der Potentiale ist also mit dem Prinzip der stationären Wirkung unverträglich.* Ist aber eine Unstetigkeit auf der Elektronenoberfläche entstanden, so pflanzt sich dieselbe mit Lichtgeschwindigkeit fort.

Außerhalb und innerhalb der Elektronenoberfläche gelten wieder die üblichen Feldgleichungen für Φ und $\mathfrak{A}$, denn man kann — nachdem die Stetigkeit von λ bewiesen ist — wieder durch Voraussetzung des elektrostatischen Gleichgewichts für eine Zeit $t' < t_0$ erreichen, daß λ durchweg $= 1$ sei.

Das II. Prinzip führt im vorliegenden Falle zu keinen besonderen Kompatibilitätsgleichungen, denn bedeuten a, b, c die Werte von x, y, z zur Zeit $t = 0$ und wird $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$ gesetzt, so wird außerhalb des Elektrons keine Elektrizitätsströmung vorhanden sein, also für

$$a^2 + b^2 + c^2 - A^2 > 0,$$

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Es wird also der Teil des Integrals J^L, welcher sich auf $a^2 + b^2 + c^2 > A^2$ bezieht, konstant, und im übrigen Integrationsgebiet wird wieder alles stetig variieren.

b) Der Elektronenstoß.

Wir werden nun voraussetzen, daß die Bewegung unseres Elektrons zur Zeit $t = \tau$ einer plötzlichen Änderung unterworfen sei, so daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ zu derselben Zeit endliche Sprünge erleiden. Wir setzen wieder die Stetigkeit der Potentiale voraus und erlauben Sprünge in den ersten Ableitungen, so daß die Ergebnisse des Abschnittes a) übertragbar sind mit der Bemerkung, daß im vorliegenden Falle zwei Unstetigkeitsflächen auftreten: die bewegliche Elektronenoberfläche und die „Ebene"

$$t - \tau = 0$$

im vierdimensionalen Raume.

Um die Feldgleichungen aufzustellen, wird das Integrel $\overline{J^E}$ in *vier* Teile zerlegt, entsprechend den vier Gebieten, in welchen die zwei Unstetigkeitsflächen den vierdimensionalen Raum zerteilen. Für die Elektronenoberfläche gelten unverändert die vorherigen Bedingungen, während für den Augenblick des Stoßes dieselben Formeln mit

$$\psi \equiv t - \tau$$

gelten. Für dieses ψ ist Ψ nicht gleich Null, also folgt sofort

$$\Gamma = \mathfrak{G}^x = \mathfrak{G}^y = \mathfrak{G}^z = 0,$$

d. h. die Stetigkeit der Ableitungen. *Es sind also beim Elektronenstoß die ersten Ableitungen der Potentiale stetig.*

Hier müssen wir noch die Ergebnisse unseres zweiten Prinzips prüfen, denn es wird auch der auf $a^2 + b^2 + c^2 < A^2$ bezogene Teil des Integrals $\mathfrak{J}^L$ durch die Unstetigkeitsfläche $t = \tau$ im vierdimensionalen Raume in zwei Teile zerlegt.

Die Variation der Bewegung kann jedoch nicht ganz willkürlich sein, denn wir haben das Elektron als starr vorausgesetzt, was mit dem Verschwinden der Deformationsgrößen gleichbedeutend ist; bei der Variation von x, y, z müssen daher die Bedingungen

$$x_a - 1 = 0, \quad y_b - 1 = 0, \quad z_c - 1 = 0,$$
$$y_c + z_b = 0, \quad z_a + x_c = 0, \quad x_b + y_a = 0$$

erfüllt werden. Bedeuten daher Ξ^a, H^b, Z^c, $\mathsf{H}^c = \mathsf{Z}^b$, $\mathsf{Z}^a = \Xi^c$, $\Xi^b = \mathsf{H}^a$ Funktionen von a, b, c, t (die von der Starrheit herrührenden Reaktionskräfte), dann ist folgendes Integral zu variieren:

$$\begin{aligned}\overline{J^L} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint\limits_{a^2+b^2+c^2<A^2} \Big\{ \frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi}\, \omega + \varrho\,(\Phi - x_t \mathfrak{A}_t^x - y_t \mathfrak{A}_t^y - z_t \mathfrak{A}_t^z) \\ + \Xi^a (x_a - 1) + \mathsf{H}^b (y_b - 1) + \mathsf{Z}^c (z_c - 1) \\ + \mathsf{H}^c (y_c + z_b) + \mathsf{Z}^a (z_a + x_c) + \Xi^b (x_b + y_a) \Big\}\, da\, db\, dc.\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für die stetigen Stellen werden daher ähnlich lauten, wie die Gleichgewichtsbedingungen eines elastischen Körpers unter Einwirkung der inneren Druckkräfte Ξ^a, H^b, $\cdots$ und der äußeren Kraft

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{H}.$$

Für den Augenblick des Stoßes erhält man, wenn man in unserem Hilfssatz $\xi = a$, $\eta = b$, $\zeta = c$, $f = x$, $g = y, \cdots, \mathfrak{J} = \overline{J^L}$, $\psi = t - \tau$ setzt:

$$[\mathfrak{A}^x] = [\mathfrak{A}^y] = [\mathfrak{A}^z] = 0,$$

also wiederum keine besondere Bedingung.

Wir können daher für den Fall der endlichen Volumladung folgende allgemeinen Sätze aussprechen:

I. *Bei einer beliebigen, stetigen oder unstetigen Bewegung eines Elektrons ist die Voraussetzung der Stetigkeit der ersten Ableitungen der Potentiale mit dem Prinzipe der stationären Wirkung verträglich.*

II. *Eine auf einer Fläche irgendwie entstandene Unstetigkeit in den ersten Ableitungen der Potentiale pflanzt sich mit Lichtgeschwindigkeit fort.*

c) Die elektromagnetischen Wellen.

Die sich im Raume fortpflanzenden Unstetigkeiten der elektrischen und magnetischen Kraft werden *elektromagnetische Wellen* genannt. Für

diese ergeben sich aus unseren Kompatibilitätsbedingungen (19) folgende Resultate:

1) Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist gleich der Lichtgeschwindigkeit.

2) Es ist auf der Welle:

$$[\mathfrak{E}] \cdot \mathfrak{a} = 0, \tag{23}$$

$$[\mathfrak{H}] \times \mathfrak{a} = [\mathfrak{E}], \tag{24}$$

wo jetzt $\mathfrak{a}$ den Einheitsvektor in der Richtung der Wellennormale bezeichnet.

Die Gleichung (23) ist übrigens eine Folge der Gleichungen (24), sie spricht aus, daß die Unstetigkeit der elektrischen Kraft immer tangential zur Wellenfläche, also *transversal* ist. Die geometrische Bedeutung der Kompatibilitätsbedingungen wird besonders klar, wenn man z. B. die z-Achse mit der Wellennormale zusammenfallen läßt; dann ist:

$$-[\mathfrak{H}^y] = [\mathfrak{E}^x], \quad [\mathfrak{H}^x] = [\mathfrak{E}^y], \quad 0 = [\mathfrak{E}^z]. \tag{25}$$

Ist außerdem noch $[\mathfrak{H}^z] = 0$, was mit unserem Variationsprinzipe ebenfalls verträglich ist, so ist die Unstetigkeit *rein transversal;* solche Unstetigkeitsflächen können die Lichtwellen sein. Eben weil $[\mathfrak{H}^z]$ noch beliebig gewählt werden kann, ist es ersichtlich, daß noch eine große Mannigfaltigkeit von solchen elektromagnetischen Wellen möglich ist, auf welchen die Unstetigkeit nur in der elektrischen Kraft transversal ist.

Die Bedingungen (25) stimmen übrigens mit den gewönlichen Ansätzen über Lichtwellen überein, nur daß bei den letzteren noch die Bedingung $[\mathfrak{H}^z] = 0$ hinzukommt.

§ 3.

Unstetigkeiten im Falle der Flächenladung.

Es wird angenommen, daß die Elektrizität mit endlicher Flächendichte auf einer sich im Raume fortbewegenden Fläche

$$\psi(x, y, z, t) = 0$$

verteilt ist. Die auf dem Flächenelemente do derselben vorhandene Elektrizitätsmenge sei $\sigma\, do$, σ sei also die Flächendichte der Elektrizität.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wird dadurch der kinematischen Bedingung

$$\psi_t + \mathfrak{v}^x \psi_x + \mathfrak{v}^y \psi_y + \mathfrak{v}^z \psi_z = 0 \tag{26}$$

unterworfen, welche ausspricht, daß die Geschwindigkeit der elektrischen Teilchen immer in der Fläche ψ liegen muß.

Die Eulersche Form des im Prinzip I. zu variierenden Integrals wird dann aus der Summe eines Raumintegrals und eines Flächenintegrals bestehen:

$$\overline{J^E} \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2}{8\pi} + \lambda(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \Phi_t) \right] dx\, dy\, dz + \iint_{\psi = 0} \sigma(\Phi - \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{A})\, do \right\} \cdot$$

Schreiben wir die Bewegung vor und fragen wieder nach den Bedingungen, denen Φ und $\mathfrak{A}$ im Falle einer Unstetigkeit ihrer Ableitungen auf der Fläche ψ genügen müssen, dann liefert unser Hilfssatz mit Rücksicht auf das hier auftretende Flächenintegral folgende Gleichungen:

$$(27) \qquad \begin{cases} [\mathfrak{E}] \cdot \operatorname{grad} \psi = 4\pi [\lambda]\, \psi_t + 4\pi\sigma, \\ [\mathfrak{H}] \times \operatorname{grad} \psi - [\mathfrak{E}]\, \psi_t = 4\pi [\lambda] \operatorname{grad} \psi - 4\pi\sigma\mathfrak{v}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen (20) erhält man hieraus:

$$(28) \qquad \begin{cases} \Gamma\Psi = 4\pi [\lambda]\, \psi_t + 4\pi\sigma, \\ \mathfrak{G}\Psi = 4\pi [\lambda]\, \psi_x - 4\pi\sigma\mathfrak{v}. \end{cases}$$

Es kann nun aus diesen Gleichungen, ähnlich wie im Falle der Volumladungen, die Stetigkeit von λ bewiesen werden.

Multipliziert man die erste Gleichung (27) mit ψ_t, die zweite mit $-\psi_x$, die dritte mit $-\psi_y$, usw. und addiert sie, dann erhält man mit Rücksicht auf (26) wiederum die Gleichung

$$[\lambda]\, \Psi = 0.$$

Es ist nun entweder $[\lambda] = 0$ oder $\Psi = 0$. Für den letzteren Fall folgt aber aus (28) nicht mehr die Stetigkeit von λ, wie es bei den endlichen Volumladungen der Fall war. Für eine mit Flächenladung belegte, sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitende oder sich zusammenziehende Fläche wird daher $[\lambda]$ von 0 verschieden und

$$= - \frac{\sigma}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}} \cdot$$

Von diesem Falle abgesehen, werden für $\Psi \neq 0$, z. B. für die Bewegung eines starren Elektrons mit endlicher Flächendichte die Gleichungen:

$$(29) \qquad \begin{cases} \Phi_\rho - \nabla\Phi = 0, \\ \mathfrak{A}_\rho - \nabla\mathfrak{A} = 0 \end{cases}$$

außerhalb und innerhalb der Elektronenoberfläche gelten.

Die Randbedingungen für die Integration derselben werden zum Teil durch die Gleichungen (27) geliefert, wenn man darin $[\lambda] = 0$ setzt. Sie stimmen übrigens für den Fall der Elektrostatik mit der bekannten Bedingung für den Sprung der ersten Ableitungen des Potentials auf einer mit Flächendichte belegten Fläche überein.

Das Prinzip II. liefert auch hier keine besonderen Kompatibilitätsbedingungen.

Für den Elektronenstoß im Falle endlicher Flächendichte erhält man aus dem Prinzipe I.:

$$[\lambda] = 0,$$

$$[\mathfrak{E}] = 0,$$

also auch

$$[\mathfrak{H}] = 0$$

außerhalb der Elektronenoberfläche und für diese selbst die früheren Bedingungen für eine beliebige Zeit vor und nach dem Stoße.

Aus dem Prinzipe II. erhält man wieder für die Elektronenoberfläche beim Stoß:

$$[\mathfrak{A}^x] = [\mathfrak{A}^y] = [\mathfrak{A}^z] = 0.$$

*

Alle diese Bedingungen für die Elektronenoberfläche sowohl bei Volumen- als Oberflächenladung sind unter der Annahme abgeleitet worden, daß die Unstetigkeit an der Elektronenoberfläche *haftet.* Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird sich dieselbe von der Fläche abtrennen und sodann gelten die früher abgeleiteten Sätze für ihre Fortpflanzung.

Göttingen, im Juli 1905.

Nachtrag bei der Korrektur.

Im September 1905 hat E. Marx auf der Naturforscherversammlung in Meran über seine Experimente berichtet, laut welchen sich *Röntgenstrahlen mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen.* Die obigen Resultate sind also mit diesem experimentellen Resultat in Einklang, vorausgesetzt, daß die Röntgenstrahlung aus der Fortpflanzung irgend welcher Unstetigkeiten der elektromagnetischen Kräfte besteht.

Budapest, im Juli 1906.

Über die Ableitung der Impulsgleichungen gewöhnlicher Stoßwellen.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn Hilbert.)

Von

Julius Farkas in Kolozsvár (Ungarn).

In dem 61. Bande dieser Zeitschrift hat Herr Zemplén, Ihrem heuristischen Winke folgend, Impulsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzipe abgeleitet. Da aber die im Interesse der mathematischen Behandlung mit Recht postulierten Unstetigkeitsflächen in der Wirklichkeit niemals auftreten, so müssen sich diese Gleichungen auf Grundlage des Stetigkeitsprinzips aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen auch ableiten lassen und sind nur zulässig unter den Bedingungen, unter welchen sie sich aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen ergeben.

Sie können in der Tat aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - \left(\frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{\partial A_2}{\partial b} + \frac{\partial A_3}{\partial c}\right), \text{ etc.}$$

abgeleitet werden, wenn nämlich an Stelle der sich fortpflanzenden Unstetigkeitsfläche ein sich fortpflanzender sehr dünner Zwischenraum gesetzt wird, durch welchen hindurch Dichte, Geschwindigkeit, Druckkräfte sich sehr schnell, aber doch stetig und differenzierbar mit dem Orte ändern, und wenn noch gewisse, in der Regel statthafte Annahmen über das Benehmen dieser Größen in dem Zwischenraume gemacht werden.

In der Nähe der sich fortpflanzenden differenzierbaren Fläche $\psi(abct) = 0$ sollen sich diese Größen im Lagrangeschen Felde im allgemeinen schnell mit dem Orte ändern. Multipliziert man die Bewegungsgleichungen in der Nähe dieser Fläche mit einem Linienelement δn auf der Normalen, und integriert dann dieselben durch den dünnen Zwischenraum hindurch, so gelangt man unter den angedeuteten Annahmen nach geeigneten Umformungen zu den gesuchten Impulsgleichungen.

Sind nämlich zur Zeit t α, β, γ die Richtungskosinus der Normalen n der Fläche ψ im Punkte (abc), und macht man die meistens zutreffende

Annahme, daß die zur Fläche ψ tangentialen Ableitungen der schnell veränderlichen Größen gegen die normalen Ableitungen derselben verschwindend klein sind, so kann

$$\frac{\partial A_1}{\partial a} = \alpha \frac{\partial A_1}{\partial n}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial b} = \beta \frac{\partial A_2}{\partial n}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial c} = \gamma \frac{\partial A_3}{\partial n}, \text{ etc.}$$

in den Integralen gesetzt werden, und folglich haben wir

$$\int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\partial A_1}{\partial a}\, \delta n = \int\limits_{(1)}^{(2)} \alpha \frac{\partial A_1}{\partial n}\, \delta n = \alpha (A_1^{(2)} - A_1^{(1)}), \text{ etc.}$$

Die Integrale für X, Y, Z können gewöhnlich vernachlässigt werden. Was endlich die Integrale

$$J_x \equiv \int\limits_{(1)}^{(2)} \varrho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\, \delta n, \text{ etc.}$$

anbelangt, so soll die größtenteils ebenfalls gültige Annahme gemacht werden: wenn die Fläche ψ sich in dem Zeitintervalle $t \longrightarrow t + \delta t$ längs der Strecke $(\alpha, \beta, \gamma)\,\delta n$ fortpflanzt, so differieren die zur Zeit $t + \delta t$ zu dem Endpunkte dieser Strecke und die zur Zeit t zu dem Anfangspunkte dieser Strecke gehörigen Werte der Geschwindigkeit der Massenbewegung $\partial(x, y, z) : \partial t$ viel weniger als die zu beiden Punkten zur Zeit t gehörigen Werte, oder die zu dem Anfangspunkte zur Zeit t und zur Zeit $t + \delta t$ gehörigen Werte derselben, so daß

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \delta n + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \delta t = 0, \text{ etc.}$$

in den Integralen J gesetzt werden darf, woraus

$$J_x = -\int\limits_{(1)}^{(2)} \varrho_0 \frac{\delta n}{\delta t} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \delta n = -\varrho_0 \frac{\delta n}{\delta t}\left(\frac{\partial x^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial x^{(1)}}{\partial t}\right), \text{ etc.}$$

sich ergibt.

Das hiermit übereinstimmende Resultat des Hamiltonschen Prinzips ist wohl dem Umstande zuzuschreiben, daß die hier gemachten Annahmen in dem Begriffe einer gewöhnlichen Unstetigkeitsfläche implizite enthalten sind. Es sind aber Vorrichtungen möglich, durch welche Stoßwellen erzeugt werden können, die sich diesen Annahmen nicht fügen und die daher den abgeleiteten Impulsgleichungen im allgemeinen nicht folgen.

Es möge noch nachträglich erwähnt werden, daß die Zulässigkeit aller hier für die Fläche ψ gemachten Annahmen eigentlich nur für die entsprechende Fläche im Eulerschen Felde unmittelbar ersichtlich ist. Alle diese Annahmen gehen aber in der Regel unverletzt aus dem Euler-

schen Felde in das Lagrangesche Feld über. Diesbezüglich ist insbesondere zu beachten, daß den tangentialen Änderungen einer Funktion F in dem einen Felde tangentiale Änderungen derselben im anderen Felde entsprechen, und zwar in dem Sinne der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial a}\left(M\frac{\partial \psi}{\partial c} - N\frac{\partial \psi}{\partial b}\right) + \frac{\partial F}{\partial b}\left(N\frac{\partial \psi}{\partial a} - L\frac{\partial \psi}{\partial c}\right) + \frac{\partial F}{\partial c}\left(L\frac{\partial \psi}{\partial b} - M\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}\left(Q\frac{\partial \psi}{\partial z} - R\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(R\frac{\partial \psi}{\partial x} - P\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(P\frac{\partial \psi}{\partial y} - Q\frac{\partial \psi}{\partial x}\right),$$

wo

$$P \equiv \frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}L + \frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}M + \frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}N, \text{ etc.}$$

zu denken ist. Die tangentialen Ableitungen sind also im allgemeinen in beiden Feldern von derselben Größenordnung.

re
m
t-

n